УДК 539.376:678

ЧИСЛЕННОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА С ВЯЗКОУПРУГИМИ КОМПОНЕНТАМИ

© 2009 Е.В. Куимова, Н.А. Труфанов[1]

Рассматриваются вопросы численного определения эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленно армированных полимерных композитов по свойствам компонентов. Дана общая постановка краевой задачи термовязкоупругости на ячейке периодичности, описаны частные вычислительные эксперименты для отыскания эффективных свойств композита. Рассмотрено влияние объемной релаксации связующего на свойства однонаправленного композита. Получены эффективные обобщенные функции релаксации однонаправленного органопластика и эффективные функции температурно-временного сдвига. Подтверждено простое термореологическое поведение органопластика при наличии такого же поведения волокон и связующего.

Ключевые слова: полимерные материалы, однонаправленный волокнистый композит, эффективные свойства, термовязкоупругость, численное прогнозирование, обобщенные функции релаксации, функции температурно-временного сдвига.

Введение

Волокнистые полимерные композиционные материалы (ПКМ) широко используются в машино-, авиа- и судостроении, а также электро- и радиотехнике и других отраслях. Основу волокнистых ПКМ составляют армирующие волокнистые наполнители, объединенные в монолитный композиционный материал полимерной матрицей. Одной из основных задач механики композиционных материалов является определение механических характеристик композита по свойствам его компонентов. Элементы конструкций из композиционных материалов составляются обычно из различно ориентированных однонаправленно армированных слоев, уложенных в определенной

[1]Куимова Елена Владимировна (ekuimova@yandex.ru), Труфанов Николай Александрович (truf2@perm.ru), кафедра вычислительной математики и механики Пермского государственного технического университета, 614000, Россия, г. Пермь, пр. Комсомольский, 29а.

последовательности, поэтому в основе методов расчета и проектирования таких конструкций лежат механические характеристики однонаправленно армированного слоя, которые требуется определить экспериментально или расчетным путем. Механическое поведение таких композитов значительно зависит от времени, что обусловлено ярко выраженными вязкоупругими свойствами полимерных связующих и некоторых типов волокон.

Проблеме прогнозирования вязкоупругих характеристик однонаправленных волокнистых ПКМ по известным вязкоупругим свойствам волокон и связующего уделено значительное число работ [1—5]. В общем случае должны быть известны из независимых экспериментов все вязкоупругие характеристики волокон и связующего. Из наиболее распространенных волокон существенными деформациями ползучести обладают органические волокна, ползучестью других типов волокон (стеклянных, углеродных, борных) можно в большинстве случаев пренебречь [1, 2]. Органическое волокно обладает трансверсальной изотропией вязкоупругих свойств, и для него требуется определение пяти независимых функций ползучести, однако на практике удается найти только характеристику продольной ползучести [3, 6], а определение трансверсальных характеристик встречает, в силу особенностей строения волокна, значительные трудности и производится в ряде работ косвенным способом [7] по найденным из эксперимента свойствам однонаправленного композита и известным свойствам связующего, или данные характеристики считаются упругими [2]. Полимерные связующие чаще всего являются изотропными вязкоупругими материалами, свойства которых определяются двумя независимыми вязкоупругими характеристиками. В ряде работ изучены свойства продольной ползучести полимерных связующих [3, 5, 8, 9], имеются данные о наличии существенной объемной ползучести [10—12].

С математической точки зрения решение задачи прогнозирования вязкоупругих свойств однонаправленного композита осложнено наличием в постановке задачи вязкоупругости нескольких независимых вязкоупругих операторов, характеризующих свойства волокна и связующего, что делает неприменимыми традиционные методы решения краевых задач вязкоупругости, ориентированные на наличие одного оператора [5, 13, 14]. Во многих работах вводятся различные гипотезы, уменьшающие число независимых операторов, одной из самых распространенных является гипотеза об отсутствии объемной релаксации у полимерного связующего [5, 15]. В этом случае поведение связующего определяется одной вязкоупругой характеристикой (например, функцией продольной ползучести). Если рассматривать композиты в рамках этой гипотезы и только с упругими волокнами, то решение задачи возможно осуществить известными хорошо разработанными методами. По терминологии Б.Е. Победри [16], такие вязкоупругие композиты называют простыми. Однако влияние применения гипотезы об отсутствии объемных релаксационных свойств связующего на количественные результаты по прогнозированию эффективных вязкоупругих характеристик

не изучено. В рамках данной работы выполнены сравнительные исследования численного прогнозирования эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композитов с упругими волокнами с использованием и без использования гипотезы о чисто упругом поведении материала связующего в условиях действия гидростатического давления.

В случае, если в качестве наполнителя используются органические волокна, задача осложняется присутствием вязкоупругих операторов, определяющих свойства волокна. Для решения этой задачи в работе предложен вариант метода квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями [13, 17]. Известно, что свойства полимерных композитов существенно зависят от температуры [3, 4, 15, 18, 19]. Экспериментальные исследования свойств компонентов композита в широком температурном диапазоне приведены в работах [3, 8, 15, 20]. Во многих работах показано соблюдение принципа температурно-временной аналогии для композита и его компонентов [3, 15, 20, 21, 22], однако при решении задачи термовязкоупругости для органопластика возникает ситуация, когда функции температурно-временной редукции компонент композита значительно различаются [15, 22], в связи с этим возникает проблема проверки гипотезы о термореологически простом поведении композита в целом и определения функции температурно-временной редукции композита. В работе приведены результаты прогнозирования термовязкоупругих свойств органопластика в широком температурном диапазоне, в том числе и функции температурно-временного сдвига, построенные по функциям такого же сдвига его компонентов.

1. Постановка задачи

Рассматриваются однонаправленно армированные композиционные материалы, волокна которых являются упругими изотропными (стекловолокно), упругими монотропными (борное и углеродное волокно) или вязкоупругими монотропными (органическое волокно) материалами, а связующее является изотропным материалом, обладающим вязкоупругими свойствами (например, эпоксидное связующее ЭДТ-10).

Общая постановка краевой задачи теории термовязкоупругости для тела, занимающего область $V \equiv V^B \cup V^C$ с границей S, где V^B — область, принадлежащая волокну, V^C — область, принадлежащая связующему, включает в себя для $t > 0$:
уравнения равновесия

$$div\hat{\sigma}\left(\mathbf{x}, t\right) = 0, \qquad \mathbf{x} \in V, \tag{1.1}$$

геометрические соотношения теории малых деформаций

$$2\hat{\varepsilon}\left(\mathbf{x}, t\right) = \nabla\mathbf{u}\left(\mathbf{x}, t\right) + \left(\nabla\mathbf{u}\left(\mathbf{x}, t\right)\right)^T, \qquad \mathbf{x} \in V, \tag{1.2}$$

граничные условия

$$\mathbf{u}\left(\mathbf{x},t\right)=\mathbf{U}\left(\mathbf{x},t\right), \qquad \mathbf{x}\in S_u, \tag{1.3}$$

$$\hat{\sigma}\left(\mathbf{x},t\right)\cdot\mathbf{n}\left(\mathbf{x}\right)=0, \qquad \mathbf{x}\in S_\sigma. \tag{1.4}$$

Для замыкания системы уравнений (1.1)—(1.4) необходимо записать определяющие соотношения. Для описания поведения изотропного связующего воспользуемся линейной теорией термовязкоупругости с учетом объемной релаксации и гипотезой о термореологически простом поведении:

$$\begin{aligned}
&\sigma\left(\mathbf{x},t\right)=\mathrm{R}_B^{C*}\left(\theta\left(\mathbf{x},t\right)-3\alpha^C\left(T\left(\mathbf{x},t\right)-T_H^C\right)\right)=\\
&=\int\limits_0^t R_B^C\left(t_1'-\tau_1'\right)d\left(\theta\left(\mathbf{x},\tau\right)-3\alpha^C\left(T\left(\mathbf{x},\tau\right)-T_H^C\right)\right), \qquad \mathbf{x}\in V^C,\\
&\hat{s}\left(\mathbf{x},t\right)=\mathrm{R}_G^{C*}\hat{e}\left(\mathbf{x},t\right)=\int\limits_0^t R_G^C\left(t_2'-\tau_2'\right)d\hat{e}\left(\mathbf{x},\tau\right), \qquad \mathbf{x}\in V^C,\\
&t_1'=\int\limits_0^t\frac{d\xi}{a_T^G(T(\mathbf{x},\xi))}, \qquad t_2'=\int\limits_0^t\frac{d\xi}{a_T^V(T(\mathbf{x},\xi))}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Физические соотношения для волокна в рамках линейной теории вязкоупругости при условии термореологически простого поведения имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\hat{\sigma}\left(\mathbf{x},t\right)={}^4\hat{\mathrm{R}}^{B*}\cdot\cdot\left(\hat{\varepsilon}\left(\mathbf{x},t\right)-\hat{\alpha}^B\left(T\left(\mathbf{x},t\right)-T_H^B\right)\right)=\\
&=\int\limits_0^t {}^4\hat{R}^B\left(t_3'-\tau_3'\right)\cdot\cdot d\left(\hat{\varepsilon}\left(\mathbf{x},\tau\right)-\hat{\alpha}^B\left(T\left(\mathbf{x},\tau\right)-T_H^B\right)\right), \qquad \mathbf{x}\in V^B,\\
&t_3'=\int\limits_0^t\frac{d\xi}{a_T^B(T(\mathbf{x},\xi))}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

В соотношениях (1.1)—(1.6): $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ — тензоры напряжений и деформаций с компонентами σ_{ij} и ε_{ij} соответственно; $\mathbf{u}$, $\mathbf{n}$ — векторы перемещений и внешней единичной нормали к поверхности S с компонентами u_i, n_i; $\mathbf{x}$ — радиус-вектор произвольной точки тела, имеющий компоненты x_i; $\mathbf{U}$ — заданный на части S_u границы S вектор перемещений с компонентами U_i; $S_u\cup S_\sigma\equiv S$; $i,\ j=1,2,3$; t, t_1', t_2', t_3' — время и модифицированные времена связующего и волокна соответственно; $R_B^C\left(t\right)$, $R_G^C\left(t\right)$ — функции объемной и сдвиговой релаксации связующего, a_T^V, a_T^G — соответствующие функции температурно-временного сдвига связующего; ${}^4\hat{R}^B\left(t\right)$ — тензор функций релаксации волокна; a_T^B — функция температурно-временного сдвига волокна; T_H — начальная температура; T_0 — температура приведения; индекс C характеризует параметры связующего, индекс B — параметры волокна.

Выберем декартову систему координат таким образом, чтобы ее ось OZ была направлена вдоль направления укладки волокон.

Тензор функций релаксации ${}^4\hat{R}^B\left(t\right)$ трансверсально изотропного волокна содержит пять независимых функций релаксации и, соответственно, должно быть пять разных модифицированных времен волокна. Однако в

литературе удается найти экспериментальные данные только для продольной вязкоупругой характеристики волокон, поэтому остальные параметры волокна будем считать упругими, а модифицированное время t_3' в соотношениях (1.6) имеет отношение только к функции продольной релаксации вдоль оси OZ.

Для упругих волокон (углеродное, стеклянное и борное) тензор ${}^4\hat{R}^B(t) = {}^4\hat{R}^B$ не зависит от времени, соотношения (1.6) принимают вид закона термоупругого деформирования

$$\hat{\sigma}(\mathbf{x},t) = {}^4\hat{R}^B \cdot\cdot \left(\hat{\varepsilon}(\mathbf{x},t) - \hat{\alpha}^B\left(T(\mathbf{x},t) - T_H^B\right)\right), \qquad \mathbf{x} \in V, \tag{1.7}$$

упругие константы, определяющие поведение материала, приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Упругие характеристики компонентов композита [15]

Волокно	E_1, ГПа	E_2, ГПа	ν_{12}	ν_{23}	G_{12}, ГПа
ЭДТ-10	3,1	-	0,42	-	-
Углеродное	226	12,9	0,31	0,2	60
Стеклянное	93,2	-	0,24	-	-
Борное	370	-	0,15	-	-
Органическое	121	3,35	0,27	0,17	2,6

При рассмотрении материала композита в некотором малом объеме можно считать его неоднородным. Но в этом случае задача описания его свойств становится очень сложной. Для преодоления этой трудности вводится гипотеза континуума [23], которая включает процедуру осреднения, посредством нее структура и состояние материала идеализируются таким образом, что материал считается однородным, для которого присущие однородной среде характерные свойства одинаковы во всех точках. Основная задача состоит в использовании процедуры осреднения для предсказания эффективных свойств идеализированной однородной среды через свойства фаз и геометрические характеристики.

Рассматриваем однонаправленно армированный слой как неограниченную непрерывно армированную среду со структурой, образованной выпрямленными и одинаково ориентированными цилиндрическими волокнами с равными круговыми поперечными сечениями. Пространство между волокнами заполнено связующей средой — матрицей, характеристики которой отличны от характеристик волокон.

Выделим из данной среды элемент симметрии (будем рассматривать гексагональную укладку волокон) — ячейку периодичности (рис. 1.1). Предположим, что в границах ячейки градиент внешнего поля воздействий изменяется незначительно.

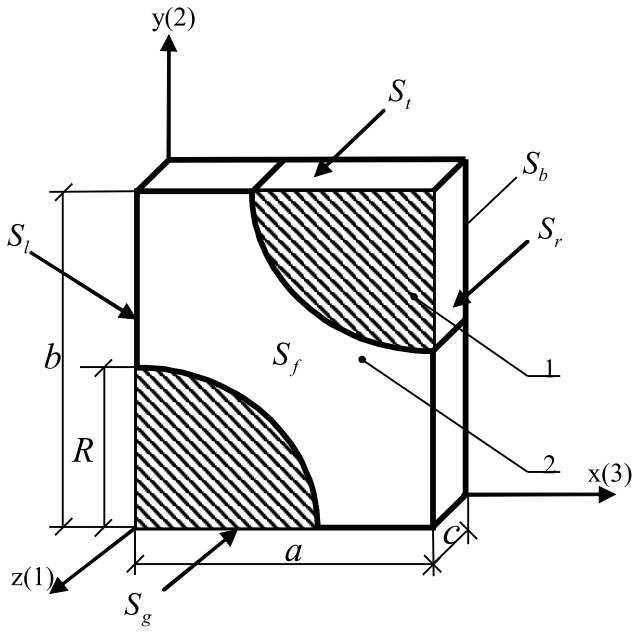

Рис. 1.1. Ячейка периодичности и принятая система координат (заштрихованные области — волокно): a, b, c — ширина, высота и глубина ячейки; R — радиус волокна; S_f, S_b, S_l, S_r, S_g, S_t — передняя, задняя, левая, правая, нижняя и верхняя грани ячейки периодичности соответственно

Относительное объемное содержание волокна в композите через параметры ячейки периодичности можно выразить соотношением: $\mu = \frac{2V^B}{V^C+2V^B} = \frac{\pi R^2}{2ab}$. Для гексагональной упаковки $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$.

Исходя из структуры однонаправленного композита с гексагональной укладкой волокон и согласно гипотезе континуума, материал можно считать однородной средой, которая имеет ось упругой симметрии, совпадающую с направлением волокон, т. е. является трансверсально-изотропным материалом. Таким образом, композит характеризуется пятью операторами: операторными модулями упругости E_1^* и E_2^*, соответствующими направлениям вдоль и поперек волокон, операторными коэффициентами Пуассона ν_{12}^* и ν_{23}^* и операторным модулем сдвига G_{12}^*:

$$\mathrm{E}_1^*\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} E_1(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\,d\tau, \quad \mathrm{E}_2^*\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} E_2(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\,d\tau,$$
$$\nu_{12}^*\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \nu_{12}(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\,d\tau, \quad \nu_{23}^*\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \nu_{23}(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\,d\tau,$$
$$G_{12}^*\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G_{12}(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\,d\tau,$$

ядра которых требуется определить из решения задачи (1.1)—(1.6).

Опишем вычислительные эксперименты, которые необходимо поставить на трехмерной ячейке периодичности для нахождения вязкоупругих харак-

теристик композита: продольная релаксация вдоль направления волокон, поперечная релаксация в плоскости, перпендикулярной направлению волокон, и сдвиговая релаксация вдоль направления волокон.

1.1. Продольная релаксация ячейки периодичности

Для данного случая деформирования необходимо реализовать следующие условия на границах ячейки периодичности:

$$\begin{array}{llll}
u_1(\mathbf{x},t)=0, & \mathbf{x}\in S_b; & u_1(\mathbf{x},t)=U_1^0 h(t), & \mathbf{x}\in S_f;\\
u_2(\mathbf{x},t)=0, & \mathbf{x}\in S_g; & u_2(\mathbf{x},t)=U_2(t), & \mathbf{x}\in S_t;\\
u_3(\mathbf{x},t)=0, & \mathbf{x}\in S_l; & u_3(\mathbf{x},t)=U_3(t), & \mathbf{x}\in S_r;\\
\sigma_{12}(\mathbf{x},t)=\sigma_{13}(\mathbf{x},t)=0, & \mathbf{x}\in S_f; & & \\
\sigma_{12}(\mathbf{x},t)=\sigma_{23}(\mathbf{x},t)=0, & \mathbf{x}\in S_t; & & \\
\sigma_{13}(\mathbf{x},t)=\sigma_{23}(\mathbf{x},t)=0, & \mathbf{x}\in S_r, & &
\end{array}$$

где $h(t)$ — единичная ступенчатая функция Хевисайда.

Величина U_1^0 задается, а U_2 и U_3 — неизвестные функции времени.

Для описания механических свойств композита введем понятие средних напряжений и средних деформаций:

$$\langle\sigma_{ij}(t)\rangle=\frac{1}{V}\int\limits_V \sigma_{ij}(\mathbf{x},t)\,dV, \qquad t>0;$$

$$\langle\varepsilon_{ij}(t)\rangle=\frac{1}{V}\int\limits_V \varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t)\,dV, \qquad t>0.$$

Деформация композита в продольном направлении при $t\geqslant 0$ постоянна и запишется следующим образом:

$$\varepsilon_{11}^0=\langle\varepsilon_{11}(t)\rangle=\frac{U_1^0}{c}.$$

Из решения задачи на ячейке периодичности необходимо найти следующие величины: релаксацию осредненных продольных напряжений $\langle\sigma_{11}(t)\rangle$ и изменение осредненных поперечных деформаций во времени

$$\langle\varepsilon_{22}(t)\rangle=\frac{U_2(t)}{b}; \quad \langle\varepsilon_{33}(t)\rangle=\frac{U_3(t)}{a}.$$

При этом непосредственно из решения должно следовать

$$\langle\sigma_{22}\rangle=\langle\sigma_{33}\rangle=\langle\sigma_{12}\rangle=\langle\sigma_{13}\rangle=\langle\sigma_{23}\rangle=0.$$

Эффективные характеристики композита: ядра операторного модуля упругости $E_1(t)$ и операторного коэффициента Пуассона $\nu_{12}(t)$ определяются из следующих соотношений:

$E_1(t)=\langle\sigma_{11}(t)\rangle/\varepsilon_{11}^0; \qquad \nu_{12}(t)=\langle\varepsilon_{22}(t)\rangle/\varepsilon_{11}^0; \qquad \nu_{13}(t)=\langle\varepsilon_{33}(t)\rangle/\varepsilon_{11}^0.$

В силу трансверсальной изотропии свойств непосредственно из решения должно получиться выполнение равенства $\nu_{12}(t)=\nu_{13}(t)$.

1.2. Поперечная релаксация ячейки периодичности

Для данного случая деформирования необходимо реализовать следующие условия на границах ячейки периодичности:

$$\begin{array}{llll}
u_1(\mathbf{x},t)=0, & \mathbf{x}\in S_b; & u_1(\mathbf{x},t)=U_1(t), & \mathbf{x}\in S_f;\\
u_2(\mathbf{x},t)=0, & \mathbf{x}\in S_g; & u_2(\mathbf{x},t)=U_2^0 h(t), & \mathbf{x}\in S_t;\\
u_3(\mathbf{x},t)=0, & \mathbf{x}\in S_l; & u_3(\mathbf{x},t)=U_3(t), & \mathbf{x}\in S_r;\\
\sigma_{12}(\mathbf{x},t)=\sigma_{13}(\mathbf{x},t)=0, & \mathbf{x}\in S_f; & & \\
\sigma_{12}(\mathbf{x},t)=\sigma_{23}(\mathbf{x},t)=0, & \mathbf{x}\in S_t; & & \\
\sigma_{13}(\mathbf{x},t)=\sigma_{23}(\mathbf{x},t)=0, & \mathbf{x}\in S_r. & &
\end{array}$$

Величина U_2^0 задается, а U_1 и U_3 — неизвестные функции времени.

Деформация композита в поперечном направлении при $t \geqslant 0$ постоянна и запишется следующим образом:

$$\varepsilon_{22}^0 = \langle \varepsilon_{22}(t)\rangle = \frac{U_2^0}{b}.$$

Из решения задачи на ячейке периодичности необходимо найти следующие величины: релаксацию осредненных поперечных нормальных напряжений $\langle \sigma_{22}(t)\rangle$ и изменение осредненных деформаций во времени

$$\langle \varepsilon_{11}(t)\rangle = \frac{U_1(t)}{c}; \quad \langle \varepsilon_{33}(t)\rangle = \frac{U_3(t)}{a}.$$

При этом непосредственно из решения должно следовать

$$\langle \sigma_{11}\rangle = \langle \sigma_{33}\rangle = \langle \sigma_{12}\rangle = \langle \sigma_{13}\rangle = \langle \sigma_{23}\rangle = 0.$$

Эффективные характеристики композита: ядра операторного модуля упругости $E_2(t)$ и операторного коэффициента Пуассона $\nu_{23}(t)$ определяются из следующих соотношений:

$$E_2(t) = \langle \sigma_{22}(t)\rangle / \varepsilon_{22}^0; \quad \nu_{23}(t) = \langle \varepsilon_{33}(t)\rangle / \varepsilon_{22}^0; \quad \nu_{21}(t) = \langle \varepsilon_{11}(t)\rangle / \varepsilon_{22}^0.$$

В силу трансверсальной изотропии свойств непосредственно из решения должно получаться выполнение операторного равенства $\nu_{21}^* \mathrm{E}_2^* = \nu_{12}^* \mathrm{E}_1^*$ или

$$\int_0^t \nu_{21}(t-\tau)\, E_2(\tau)\, d\tau = \int_0^t \nu_{12}(t-\tau)\, E_1(\tau)\, d\tau.$$

1.3. Сдвиговая продольная релаксация ячейки периодичности

Для реализации условий продольного сдвига на ячейке периодичности необходимо задать следующие граничные условия:

$$
\begin{array}{lll}
u_1(\mathbf{x},t) = \beta_1 y h(t), & \sigma_{12}(\mathbf{x},t) = \sigma_{13}(\mathbf{x},t) = 0; & \mathbf{x} \in S_f, S_b, \\
u_2(\mathbf{x},t) = U_2(t), & \sigma_{12}(\mathbf{x},t) = \sigma_{23}(\mathbf{x},t) = 0; & \mathbf{x} \in S_t, \\
u_1(\mathbf{x},t) = u_2(\mathbf{x},t) = 0, & \sigma_{23}(\mathbf{x},t) = 0; & \mathbf{x} \in S_g, \\
u_3(\mathbf{x},t) = U_3(t), & \sigma_{12}(\mathbf{x},t) = \sigma_{13}(\mathbf{x},t) = 0; & \mathbf{x} \in S_r, \\
u_3(\mathbf{x},t) = 0, & \sigma_{12}(\mathbf{x},t) = \sigma_{13}(\mathbf{x},t) = 0; & \mathbf{x} \in S_l.
\end{array}
$$

Деформация сдвига композита в продольном направлении при $t \geqslant 0$ постоянна и запишется следующим образом:

$$\varepsilon_{12}^0 = \langle \varepsilon_{12}(t) \rangle = \beta_1/2.$$

Из решения задачи на ячейке периодичности необходимо найти следующие величины: релаксацию осредненных касательных напряжений $\langle \sigma_{12}(t) \rangle$ и изменение осредненных поперечных деформаций во времени
$\langle \varepsilon_{22}(t) \rangle = \frac{U_2(t)}{b}$; $\langle \varepsilon_{33}(t) \rangle = \frac{U_3(t)}{a}$.

При этом непосредственно из решения должно следовать

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = \langle \sigma_{13} \rangle = \langle \sigma_{23} \rangle = 0.$$

Ядро эффективного операторного модуля сдвига $G_{12}(t)$ определяется из следующего соотношения:

$$G_{12}(t) = \langle \sigma_{12}(t) \rangle / \beta_1.$$

Непосредственно из решения должно получиться выполнение равенства $U_2(t) = U_3(t) = 0$, так как в силу трансверсальной изотропии свойств нет связи между сдвиговыми и линейными деформациями.

2. Учет объемной релаксации связующего

Во многих работах (например, [5, 15]) вводится гипотеза об отсутствии объемной релаксации связующего, упрощающая постановку задачи (1.1)—(1.6). Исследуем, какой вклад вносит учет объемной релаксации связующего в вязкоупругие характеристики композита.

Будем рассматривать однонаправленно армированные композиционные материалы, волокна которых являются упругими изотропными (стекловолокно) или упругими монотропными (углеродное волокно) материалами, а связующее является изотропным материалом, обладающим вязкоупругими свойствами (эпоксидная смола) (задача (1.1)—(1.5),(1.7)). Для описания вязкоупругих свойств связующего использовались результаты работы [11], в которой приведены данные для кривых объемной податливости при различных температурах. Для расчета выбрана температура $T = 303$ K. Данные по ползучести в продольном направлении были взяты из работы [3] (рис. 2.1). На рисунке сплошной линией показана функция объемной релаксации $B(t)$, пунктирной линией — функция продольной релаксации $E(t)$.

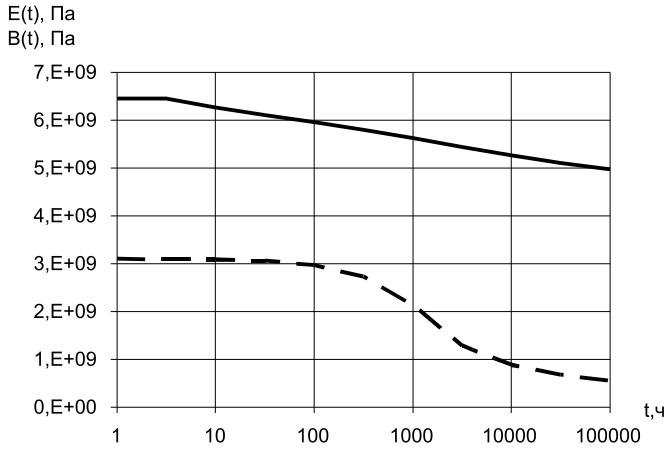

Рис. 2.1. Вязкоупругие свойства эпоксидного связующего: — функция объемной релаксации $B(t)$; - - функция продольной релаксации $E(t)$)

Постановка данной краевой задачи (1.1)—(1.5), (1.7) на ячейке периодичности содержит два независимых вязкоупругих оператора. Для ее решения был использован приближенный метод — метод квазиконстантных операторов, основные положения которого для кусочно-однородных вязкоупругих сред подробно изложены в работе [13]. В соответствии с теорией метода при постоянных во времени внешних воздействиях решение задачи вязкоупругости с достаточно высокой точностью можно получать, заменяя в постановке задачи вязкоупругие операторы соответствующими функциями релаксации или ползучести, что сводится, по сути, в нашем случае к построению зависимости решения трех краевых задач теории упругости (одноосное растяжение вдоль направления волокон, одноосное растяжение в плоскости, перпендикулярной направлению волокон, и сдвиг вдоль направления волокон) от переменных во времени упругих характеристик компонентов.

Будем использовать методику определения эффективных свойств композита по свойствам его компонентов на ячейке периодичности методом конечных элементов (подробное описание этой методики приведено в работе [5]). Предварительно эта методика была оттестирована на задачах по прогнозированию упругих характеристик композитов. Результаты решения таких задач представлены в табл. 2.1.

Погрешность численного прогнозирования, определяемая как относительная к среднестатистическому значению соответствующей экспериментальной характеристики, приводилась только в случаях, когда результат расчета выходил за рамки доверительного интервала результатов эксперимента. Наблюдается достаточно хорошее соответствие экспериментальных и расчетных упругих характеристик за исключением коэффициента Пуассона

ν_{23} углепластика, что, возможно, связано с недостаточно точным определением трансверсальных упругих характеристик углеродного волокна.

Таблица 2.1

Упругие характеристики композитов. Сравнение с данными экспериментов

	μ	E_1, ГПа	E_2, ГПа	ν_{12}	ν_{23}	G_{12}, ГПа
Исходные данные [23]						
Органическое волокно		127	3,35	0,26	0,17	3
Углеродное волокно		226	12,9	0,31	0,2	60
Связующее ЭДТ-10		3,1		0,42		
Данные эксперимента [23]						
Органопластик	0,4	50,5 $\pm 5,7$	3,63 $\pm 0,44$	0,37 $\pm 0,06$	0,46 $\pm 0,02$	1,58 $\pm 0,19$
Углепластик	0,4	87,3 $\pm 8,6$	5,88 $\pm 0,76$	0,38 $\pm 0,03$	0,46 $\pm 0,03$	3,82 $\pm 0,11$
Результаты расчета						
Органопластик	0,4	52,70442	3,64932	0,36645	0,50215	1,66667
Погрешность расчетов					4,8 %	
Углепластик	0,4	92,31620	5,84279	0,37536	0,58269	3,20837
Погрешность расчетов					20,1 %	13,1 %

По описанным параметрам компонентов композита проведено два типа расчета: с учетом и без учета объемной релаксации связующего. Результаты расчетов для углепластика приведены на рис. 2.2. Рассчитана относительная погрешность δ, которая определяется следующим образом:

$$\delta_X = \left| \frac{X^v - X}{X^v} \right| 100\%,$$

где X — расчетное свойство композита, полученное при расчете без использования гипотезы об отсутствии объемной релаксации; X^v — расчетное свойство композита, полученное при расчете с учетом объемной релаксации связующего.

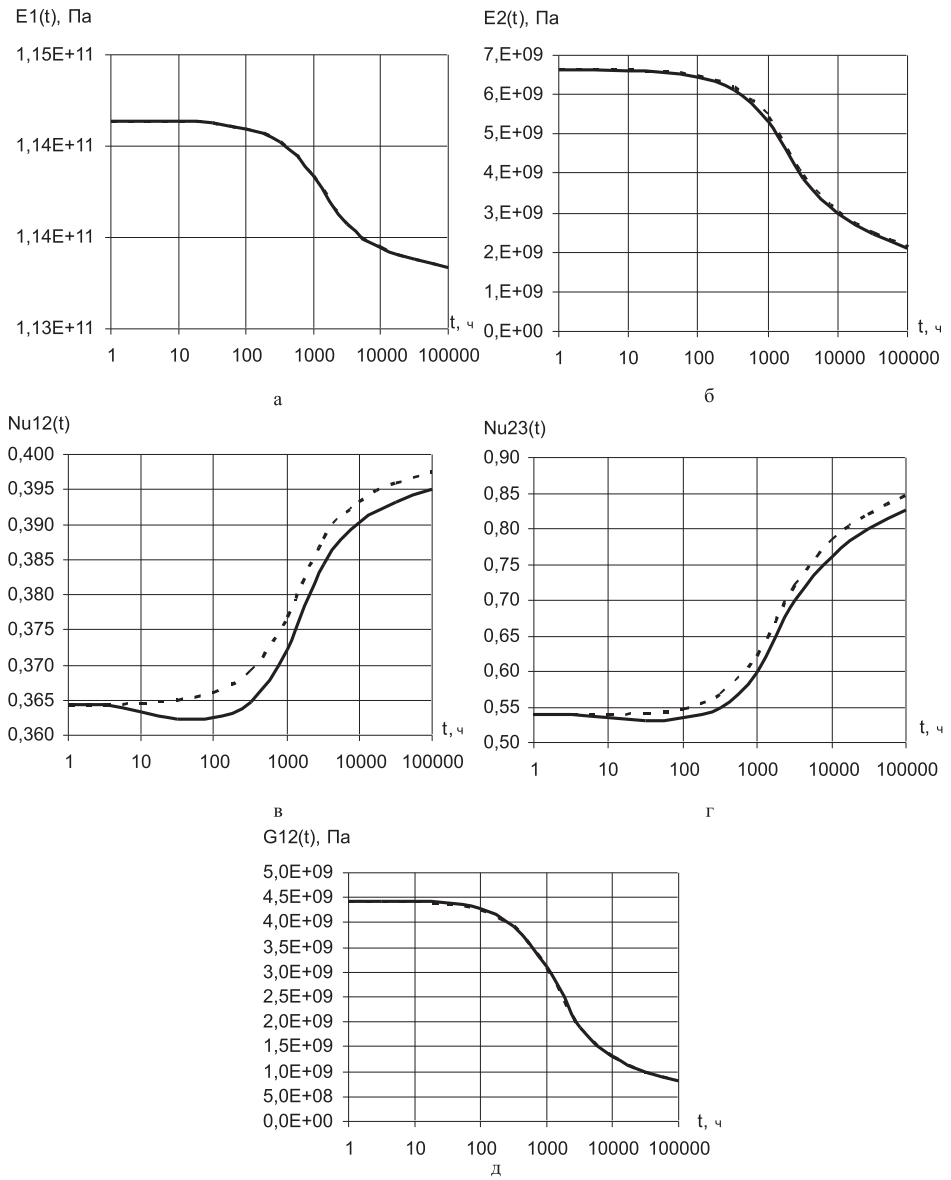

Рис. 2.2. Вязкоупругие характеристики углепластика при температуре $T = 303$ К (— с учетом объемной релаксации; - - без учета объемной релаксации): *а* – функция продольной релаксации $E_1(t)$, Па; *б* – функция поперечной релаксации $E_2(t)$, Па; *в* – ядро операторного коэффициента Пуассона в плоскости вдоль направления волокон $\nu_{12}(t)$; *г* – ядро операторного коэффициента Пуассона в плоскости перпендикулярной направлению укладки волокон $\nu_{23}(t)$; *д* – функция сдвиговой релаксации $G_{12}(t)$, Па

По проведенным расчетам можно сделать следующие выводы. Расчет функций продольной, поперечной и сдвиговой релаксации простых композитов с использованием гипотезы об отсутствии объемной релаксации связующего приводит к незначительной погрешности, которая не превышает 1 %. При определении ядер операторных коэффициентов Пуассона следует учитывать, что введение данной гипотезы качественно меняет картину данных характеристик (при отсутствии объемной релаксации ядра операторных коэффициентов монотонно растут во времени, при наличии — имеется зона убывания функций времени с последующим более быстрым ростом), что, однако, не сильно влияет на их численные значения, и максимальная погрешность составляет порядка 3 %.

3. Эффективные термовязкоупругие характеристики органопластика

Рассмотрим решение краевой задачи вязкоупругости (1.1)—(1.6) применительно к ячейке периодичности органопластика, считая волокно вязкоупругим при растяжении в продольном направлении, принимая остальные характеристики волокна упругими. Связующее (эпоксидная смола ЭДТ-10) является вязкоупругим изотропным материалом, при этом используется гипотеза об отсутствии объемной релаксации.

Таким образом, в задаче имеется два различных вязкоупругих оператора. Для решения воспользуемся приближенным методом квазиконстантных операторов [24], погрешность которого мала, если для ядер вязкоупругих операторов, входящих в решение, выполняются условия квазиконстантности. Для ядра $E_1^B(t)$ оператора продольной релаксации E_1^{B*} органоволокна показатель квазиконстантности равен $\beta_B = 0{,}13$, а для ядра $E^C(t)$ оператора продольной релаксации E^{C*} связующего ЭДТ-10 показатель квазиконстантности равен $\beta_B = 0{,}324$ [24]. Существующие теоретические оценки [24] позволяют утверждать, что относительная погрешность решения по методу квазиконстантных операторов в этом случае гарантированно не превысит 10 % (величина порядка квадрата максимального по величине показателя квазиконстантности). При реализации описанных краевых задач на ячейке периодичности внешние воздействия представляют собой мгновенно приложенные в начальный момент времени и неизменяющиеся далее величины, в этом случае решение по методу квазиконстантных операторов по форме соответствует так называемому методу переменных параметров упругости и, например, для компонент тензора напряжений имеет вид [24]:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t) = \sigma_{ij}^{(e)}\left[\mathbf{x}, E_1^B(t), E_2^B, G_{12}^B, \nu_{12}^B, \nu_{23}^B, E^C(t), B^C\right] + \\ +\mathrm{O}\left(\beta_B^2\right) + \mathrm{O}\left(\beta_B\beta_C\right) + \mathrm{O}\left(\beta_C^2\right),$$

где под $\sigma_{ij}^{(e)}$ понимается решение соответствующей упругой задачи.

Рассмотрим также применение метода квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями [17], который позволяет увеличить точность при наличии в решении оператора с относительно большим показателем квазиконстантности (в данном случае показатель квазиконстантности связующего).

Решение упругой задачи на ячейке периодичности имеет вид:

$$\sigma_{ij}^{(e)}(\mathbf{x},t) = \bar{\sigma}_{ij}^{(e)}\left(\mathbf{x}, E_1^B, E_2^B, G_{12}^B, \nu_{12}^B, \nu_{23}^B, B^C, \omega^C\right) h(t), \tag{3.1}$$

где для удобства использована упругая константа

$$\omega^C = 2G^C \Big/ 3B^C = \left(9B^C \big/ \left(2E^C\right) - 1/2\right)^{-1}.$$

Введем в рассмотрение систему дробно-рациональных функций аргумента ω^C:

$$\varphi_1 = \left(\omega^C\right)^{-1}, \quad \varphi_2 = 1, \quad \varphi_3 = \omega^C, \quad \varphi_n = \tfrac{1}{1+\beta_n\omega^C}, \quad n = \overline{4,N}, \tag{3.2}$$

где β_n — набор положительных чисел.

Выбор системы базисных функций в виде (3.2) соответствует методу аппроксимаций [14, 16]. Аппроксимируем каждую компоненту тензорной функции $\bar{\sigma}_{ij}^{(e)}\left(\mathbf{x}, E_1^B, E_2^B, G_{12}^B, \nu_{12}^B, \nu_{23}^B, B^C, \omega^C\right)$ конечным рядом по системе функций (3.2), тогда

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(e)}(\mathbf{x},t) \approx \sum_{n=1}^{N} F_n^{ij}\left(\mathbf{x}, E_1^B, E_2^B, G_{12}^B, \nu_{12}^B, \nu_{23}^B, B^C\right) \varphi_n\left(\omega^C\right), \tag{3.3}$$

где для каждой фиксированной точки $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \in V$, F_n^{ij} — подлежащие определению коэффициенты аппроксимации.

Используя представление аналитической функции F_n^{ij} в виде интеграла Коши по аргументу E_1^B и применяя принцип Вольтерры к соотношениям (3.3) с учетом (3.1), запишем вязкоупругое решение в форме

$$\sigma_{jk}(\mathbf{x},t) = \\ = \sum_{n=1}^{N}\left[\tfrac{1}{(2\pi i)}\oint_{\gamma} \tfrac{F_n^{jk}\left(\mathbf{x}, z, E_2^B, G_{12}^B, \nu_{12}^B, \nu_{23}^B, B^C\right)dz}{\left(z - \mathrm{E}_1^{B*}\right)}\right]\varphi_n\left(\omega^C\right) h(t), \tag{3.4}$$

где i — мнимая единица; γ — замкнутый контур в комплексной плоскости, представляющий собой, например, окружность радиуса r с центром E_1^B. Контур выбирается таким образом, чтобы он располагался в области аналитичности функций F_n^{jk} по соответствующему переменному E_1^B и охватывал точку $z = E_1^B$. Функции параметра z в (3.4) являются аналитическими продолжениями по z упругих решений (3.3).

После проведения операций с квазиконстантным оператором $\left(z - \mathrm{E}_1^{B*}\right)^{-1}$ [13] получим

$$\sigma_{jk}\left(\mathbf{x},t\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\int_{0}^{t}F_{n}^{jk}\left[\mathbf{x},E_{1}^{B}\left(\tau\right),E_{2}^{B},G_{12}^{B},\nu_{12}^{B},\nu_{23}^{B},B^{C}\right]\frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi_{n}\left(\omega^{C*}\right)h\left(t\right)\right]d\tau+ \tag{3.5}$$
$$+\mathrm{O}\left(\beta_{B}^{2}\right)+\mathrm{O}\left(\beta_{B}\beta_{C}\right)+\mathrm{O}\left(\beta_{C}^{2}\right).$$

Для реализации описанного метода в виде (3.3) необходимо решить два вопроса. Во-первых, требуется определить коэффициенты разложения F_{n}^{jk}. Точное представление упругого решения в форме (3.3) возможно лишь для узкого круга простейших задач. В остальных случаях приходится прибегать к методу численной реализации упругого решения [14], который в данном случае позволяет для некоторого фиксированного $\tau=\tau_{m}$ отыскать коэффициенты F_{nm}^{jk} из системы алгебраических уравнений

$$\sigma_{jk}^{(l)}\left[\mathbf{x},E_{1}^{B}\left(\tau_{m}\right),E_{2}^{B},G_{12}^{B},\nu_{12}^{B},\nu_{23}^{B},B^{C},\omega_{l}^{C}\right]=$$
$$=\sum_{n=1}^{N}F_{nm}^{jk}\varphi_{n}\left(\omega_{l}^{C}\right),\qquad l=\overline{1,L},$$

где $\omega_{1}^{C},\omega_{2}^{C},\ldots,\omega_{L}^{C}$ — набор чисел.

Вычисление интеграла в (3.5) удобно вести численно с использованием квадратурных формул Гаусса, в которых τ_{m} — узлы интегрирования, тогда система (3.4) должна быть решена столько раз, сколько узлов содержит квадратурная формула.

Во-вторых, для реализации (3.5) необходимо расшифровать выражения $\varphi_{1}\left(\omega^{C*}\right)h\left(t\right)$ и $\varphi_{n}\left(\omega^{C*}\right)h\left(t\right)$. При

$$\omega^{C*}\varphi\left(t\right)=\int_{0}^{t}\omega^{C}\left(t-\tau\right)\varphi\left(\tau\right)d\tau,\qquad \omega^{C}\left(t\right)=\omega^{C}\left(1-\int_{0}^{t}\Gamma_{G}^{C}\left(\tau\right)d\tau\right)$$

выражение (3.5) приобретает вид:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)=\tfrac{F_{1}^{ij}(\mathbf{x},t)}{\omega^{C}}+F_{2}^{ij}(\mathbf{x},t)+F_{3}^{ij}(\mathbf{x},t)\omega^{C}+\sum_{n=4}^{N}\tfrac{F_{n}^{ij}(\mathbf{x},t)}{1+\beta_{n}\omega^{C}}+$$
$$+\int_{0}^{t}\left[\tfrac{F_{1}^{ij}(\mathbf{x},\tau)}{\omega^{C}}K_{G}^{C}(t-\tau)-F_{3}^{ij}(\mathbf{x},\tau)\omega^{C}\Gamma_{G}^{C}(t-\tau)+\sum_{n=4}^{N}\tfrac{F_{n}^{ij}(\mathbf{x},t)}{1+\beta_{n}\omega^{C}}K_{C}'(t-\tau)\right]d\tau,$$

где $K_{G}^{C}\left(t\right)$ — ядро сдвиговой ползучести материала связующего; $\Gamma_{G}^{C}\left(t\right)$ — ядро сдвиговой релаксации материала связующего; $K_{C}'\left(t\right)$ — резольвента ядра $\Gamma_{G}^{C}\left(t\right)\beta_{n}\omega/(\beta_{n}+\omega)$.

Приведем результаты расчетов методом квазиконстантных операторов и методом квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями (рассматриваются моменты времени 1250, 2500, 5000, 10000 и 20000 ч) в сравнении с данными эксперимента [2].

Рассматривается однонаправленный органопластик с объемным содержанием волокон 50 % и их гексагональной укладкой. Необходимые для рас-

чета характеристики упругости приведены в табл. 2.1. Для описания вязкоупругих свойств органических волокон использовались результаты работы [15], для ЭДТ-10 использованы данные по ползучести работы [3]. Результаты расчетов методом квазиконстантных операторов и методом квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями в сравнении с данными эксперимента приведены на рис. 3.1.

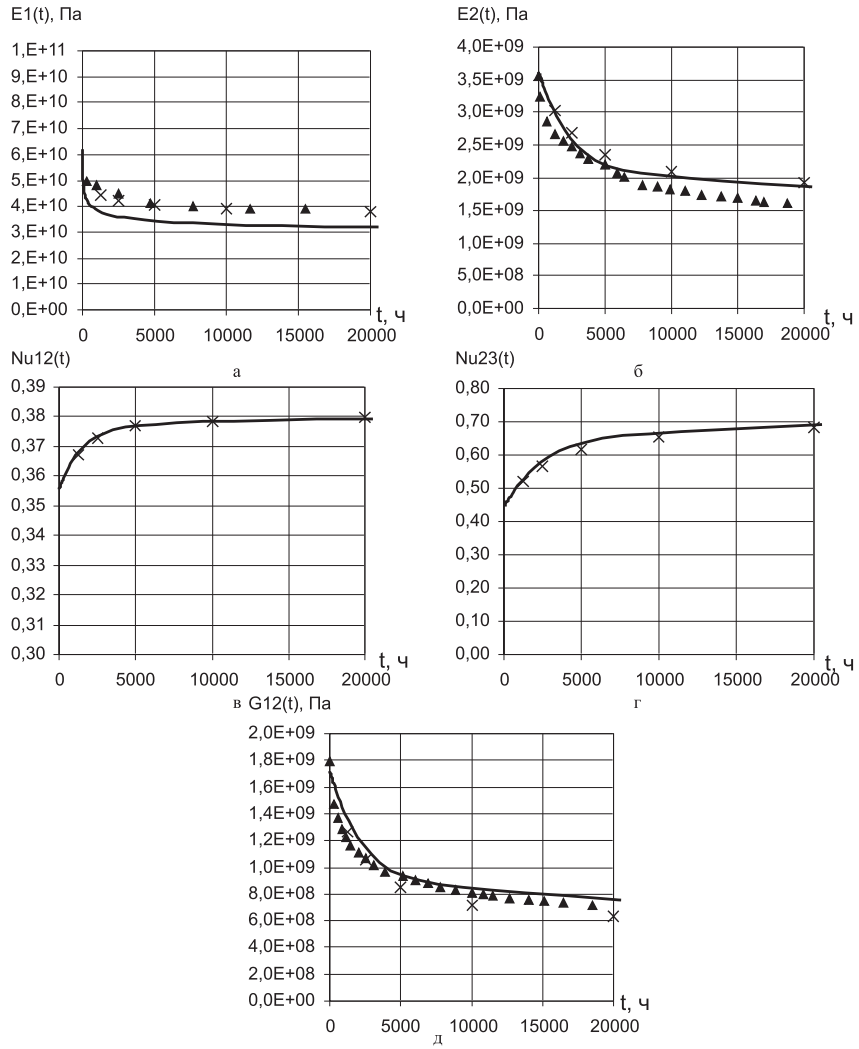

Рис. 3.1. Обобщенные вязкоупругие характеристики органопластика: —— – метод квазиконстантных операторов; × – метод квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями; ▲ – результаты эксперимента [2]; *а* – функция продольной релаксации $E_1(t)$, Па; *б* – функция поперечной релаксации $E_2(t)$, Па; *в* – ядро операторного коэффициента Пуассона в плоскости вдоль направления волокон $\nu_{12}(t)$; *г* – ядро операторного коэффициента Пуассона в плоскости, перпендикулярной направлению укладки волокон $\nu_{23}(t)$; *д* – функция сдвиговой релаксации $G_{12}(t)$, Па

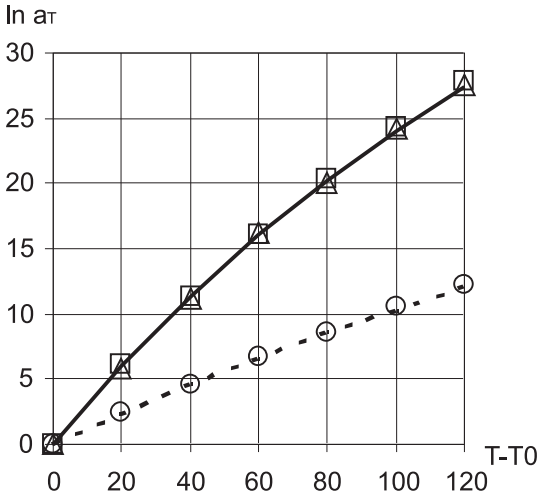

Рис. 3.2. Функция температурно-временной редукции для вязкоупругих характеристик органопластика $\ln(a_T)$ и для $E_1(t)$ композита — ○; для $E_2(t)$ и $G_{12}(t)$ композита — □; для $\nu_{12}(t)$ и $\nu_{23}(t)$ композита — △; для $E(t)$ связующего — —; для $E_1(t)$ волокна — - - -

В качестве исходных данных для расчетов использовались обобщенные функции продольной релаксации волокон и связующего, функции температурно-временной редукции a_T которых различны. В результате получены пять эффективных обобщенных функций композита, для которых значения a_T неизвестны. Для определения проведена серия расчетов для различных значений температуры и построены зависимости свойств композита в полулогарифмической системе координат, затем путем горизонтальных сдвигов определены значения $\ln a_T$ для каждой вязкоупругой характеристики композита. Полученные данные приведены на графике вместе с функциями температурно-временной редукции связующего и волокон (рис. 3.2).

Заключение

Совместное применение метода квазиконстантных операторов и метода конечных элементов удобно в практическом использовании и дает достаточно точный численный алгоритм для прогнозирования эффективных вязкоупругих характеристик однонаправленных композитов.

По результатам вычислительных экспериментов можно сделать следующие выводы: однонаправленный органопластик проявляет термореологически простое поведение, при этом функция температурно-временной редукции для обобщенной функции продольной релаксации органопластика практически совпадает с функцией для органических волокон, а функции температурно-временной редукции для остальных обобщенных характеристик практически совпадают с функцией связующего.

Литература

[1] Плуме Э.З. Сравнительный анализ ползучести однонаправленных композитов, армированных волокнами различного типа // Механика композитных материалов. 1992. № 4. С. 557—566.

[2] Максимов Р.Д., Плуме Э.З. Ползучесть однонаправленно армированных полимерных композитов // Механика композитных материалов. 1984. № 2. С. 215—223.

[3] Максимов Р.Д., Плуме Э.З. Прогнозирование ползучести однонаправленно армированного пластика с термореологически простыми структурными компонентами // Механика композитных материалов. 1982. № 6. С. 1081—1089.

[4] Кочетков В.А. Прогнозирование термического деформирования слоистых гибридных композитов с учетом термовязкоупругих свойств связующего и волокон // Механика композитных материалов. 1993. № 3. С. 317—323.

[5] Термомеханика вязкоупругих материалов в условиях релаксационных и фазовых переходов / Н.А. Труфанов [и др.] // Региональный конкурс РФФИ-Урал. Результаты научных исследований, полученные за 2005 г. Аннотационные отчеты. Екатеринбург: ПНЦ УрО РАН. 2006. С. 93—97.

[6] Зелин В.И., Янсон Ю.О. Определение ядер ползучести по результатам кратковременных испытаний // Механика полимеров. 1977. № 6. С. 972—975.

[7] Труфанов Н.А., Сметанников О.Ю. Приближенное определение трансверсальных вязкоупругих свойств органоволокна в составе однонаправленного органопластика // Численное моделирование статического и динамического деформирования конструкций. Свердловск: УрО АН СССР. 1990. С. 114—118.

[8] Максимов Р.Д., Плуме Э.З. Длительная ползучесть органопластика // Механика композитных материалов. 2001. № 4. С. 435—450.

[9] Уржумцев Ю.С. Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов М.: Наука, 1982. 222 с.

[10] Дзене И.Я., Ректиньш М.Ф. Объемные деформации полимерных смол в условиях кратковременной ползучести // Механика композитных материалов. 1986. № 6. С. 1114—1117.

[11] Гольдман А.Я. Прогнозирование деформационно-прочностных свойств полимерных и композиционных материалов Л.: Химия, 1988. 272 с.

[12] Малмейстер А.А., Янсон Ю.О. Прогнозирование релаксационных свойств эпоксидного связующего ЭДТ-10 при сложном напряженном состоянии // Механика композитных материалов. 1983. № 5. С. 889-894.

[13] Методы прикладной вязкоупругости / А.А. Адамов [и др.]. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.

[14] Победря Б.Е. Численные методы в теории ползучести и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.

[15] Максимов Р.Д., Кочетков В.А. Прогнозирование термического деформирования гибридных композитов с вязкоупругими компонентами // Механика композитных материалов. 1989. № 6. С. 969—979.

[16] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

[17] Труфанов Н.А. Применение частичных аппроксимаций в методе квазиконстантных операторов // Вестник ПГТУ. Полимерные материалы. 1997. № 3. С. 86—89.

[18] Ташкинов А.А., Шавшуков В.Е. Тепловое расширение однонаправленных и пространственных ортогонально армированных волокнистых композитов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2003. № 2. С. 133—141.

[19] Федоровский Г.Д. Исследование термовязкоупругих характеристик намоточных стеклопластиков в поперечном направлении // Механика композитных материалов. 1983. № 4. С. 713—718.

[20] Киселев А.Д., Кочетков В.А. Ползучесть эпоксидного связующего при термоциклировании // Механика композитных материалов. 1992. № 4. С. 557—566.

[21] Янсон Ю.О., Дмитриенко И.П., Зелин В.И. Прогнозирование деформаций ползучести однонаправлено армированного органопластика по результатам квазистатических испытаний // Механика композитных материалов. 1983. № 4. С. 610—613.

[22] Анискевич К.К. Оценка функции температурно-временной редукции ЭДТ-10 по результатам дилатометрических испытаний // Механика композитных материалов. 1989. № 4. С. 737—753.

[23] Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 304 с.

[24] Малый В.И., Труфанов Н.А. Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 148—154.

Поступила в редакцию 19/*II*/2009.
в окончательном варианте — 19/*II*/2009.

THE NUMERICAL PREDICTION OF EFFECTIVE THERMOVISCOELASTIC PROPERTIES OF UNIDIRECTIONAL FIBER COMPOSITE WITH THE VISCOELASTIC COMPONENTS

© 2009 E.V. Kuimova, N.A. Trufanov[2]

The problems of numerical identification of effective thermoviscoelastic properties of the unidirectional reinforced polymeric composite on the base of components properties are considered. General statement of a boundary value problem of thermoviscoelasticity for a cell of periodicity is yielded; special computing experiments for searching effective properties of a composite are featured. The effect of a volumetric relaxation of the binder on the properties of the unidirectional composite is considered. Effective generalized functions of a relaxation of unidirectional organoplasty and effective functions of temperature-time shift are gained. It is confirmed that organoplasty shows simple thermorheological behaviour at presence of simple thermorheological behaviour of fibers and the binder. Simple thermorheological behaviour of organoplasty at presence of simple thermorheological behaviour of fibers and the binder is confirmed.

Key words and phrases: polymeric materials, unidirectional fiber, composite, effective properties, thermoviscoelasticity, numerical prediction, generalized functions of a relaxation, functions of temperature-time shift.

Paper received 19/*II*/2009.
Paper accepted 19/*II*/2009.

[2]Kuimova Elena Vladimirovna (ekuimova@yandex.ru), Trufanov Nikolay Aleksandrovich (truf2@perm.ru), Dept. of Numerical Mathematics and Mechanics, Perm State Technical University, Perm, 614000, Russia.