УДК 517.958

МОДЕЛЬ РАССЕЯНИЯ НЕЙТРАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ НА НЕСТАЦИОНАРНОЙ КРИВОЙ

© 2013 Е.А. Ведутенко, С.В. Талалов[1]

В рамках нерелятивистской квантовой теории построена математическая модель, описывающая рассеяние нейтральной массивной частицы на эволюционирующей кривой определенного класса. Вычислена первая "динамическая" поправка к волновой функции рассеяния — поправка, обусловленная малым нестационарным возмущением прямой.

Ключевые слова: сепарабельный потенциал, нестационарное уравнение Шредингера.

I. Модели нерелятивистской теории рассеяния изучены к настоящему времени достаточно подробно и составляют содержание многих классических монографий [1]. Однако сказанное относится в основном к рассеянию на стационарных объектах; построение соответствующих моделей со сложными движущимися рассеивателями, меняющими в динамике свою структуру (форму, например), представляет собой задачу существенно более сложную. Это связано, в том числе, со значительными математическими трудностями, возникающими при рассмотрении потенциалов взаимодействия, явно зависящих от времени [2]. В данной статье мы предложим модель, описывающую взаимодействие бесструктурной частицы с некоторой гладкой эволюционирующей кривой $\mathbf{x}(s, t)$, где $s \in (-\infty, \infty)$ — параметр вдоль кривой, t – время. При построении модели используются идеи и методы работы [3].

Итак, принимаются следующие допущения:

- для описания взаимодействия применима нерелятивистская квантовая теория;
- потенциал взаимодействия определяется матричными элементами:

$$\langle \mathbf{p} \mid \hat{V}_a(t) \mid \mathbf{p}' \rangle = \epsilon_a \, \chi_a(\mathbf{p})\chi_a(\mathbf{p}') \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{x}(s,\,t)} g(s) ds \,, \tag{1}$$

  где $\chi_a(\mathbf{p}) = \theta(1/a - |\,\mathbf{p}|)$, ϵ_a – константа взаимодейстия и функция $g(s)$ является функцией пространства $\mathcal{S}'$ (обобщенной функцией медленного роста);

- класс рассматриваемых кривых задается представлением

$$\mathbf{x}(s,\,t) = \mathbf{n}_3 s + \lambda t \boldsymbol{\rho}(s,\,t)\,, \qquad \boldsymbol{\rho}(s,\,t) \equiv \sum_{j=1}^{3} \mathbf{n}_j \rho_j(s,\,t)\,, \tag{2}$$

[1]Ведутенко Елена Анатольевна (Physics@tltsu.ru), Талалов Сергей Владимирович (svtalalov@tltsu.ru), кафедра общей и теоретической физики Тольяттинского государственного университета, 445667, Российская Федерация, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14.

где $\lambda = const$, функции $\rho_j(s, \cdot) \in \mathcal{S}$ (пространству Шварца), а векторы $\mathbf{n}_j$ есть орты декартовой системы координат. Заметим, что $\mathbf{x}(s, 0) \equiv \mathbf{n}_3 s$.

Здесь будет уместным указать мотивировку выбора потенциала (1). Предположим, что параметры $s = s_0$ и $t = t_0$ фиксированы. Тогда потенциал

$$\langle \mathbf{p} \mid \hat{V}_a^0 \mid \mathbf{p'} \rangle = \epsilon_a \, \chi_a(\mathbf{p}) \chi_a(\mathbf{p'}) e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p'})\mathbf{x}_0}$$

является вариантом хорошо известного сепарабельного потенциала для "силового центра" $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(s_0, t_0)$. Более того, справедлива формула

$$\lim_{a\to 0} \langle \mathbf{r} \mid \hat{V}_a^0 \mid \mathbf{r'} \rangle \equiv \lim_{a\to 0} \epsilon_a f_a(\mathbf{r}-\mathbf{x}_0)\overline{f}_a(\mathbf{r'}-\mathbf{x}_0) = \alpha\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}_0)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r'})$$

при подходящем способе $\epsilon_a \to 0$ [4]. Таким образом, потенциал (1) представляет собой потенциал V_a^0, продолженный вдоль кривой $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$. При этом функция $g(s)$ моделирует линейную структуру данного (одномерного) рассеивателя. Так, например, выбирая функцию $g(s)$ из множества $\mathcal{D}$ (функций с компактным носителем), мы моделируем процесс рассеяния на конечной кривой. В том случае, если $g(s) = \sum_{i=1}^{N} \delta(s - s_i)$, мы имеем модель рассеяния на N движущихся рассеивателях. Отметим, последняя задача изучалась ранее авторами в работе [5]. В настоящей статье мы рассматриваем только случай с конечным параметром $a \sim 0$ и рассеиваемые частицы с импульсами $|\,\mathbf{p}| < 1/a$. Нелокальность сепарабельного потенциала здесь не существенна, т. к. функция $f_a(\mathbf{r})$ пренебрежимо мала[2] для $r > a$. Предел $a \to 0$ в предлагаемой модели не выполняется по следующим причинам:

1) в реальности все одномерные рассеиватели имеют конечные "поперечные" размеры, что и учитывается здесь конечным значением параметра a;

2) предел $a \to 0$ приводит к существенным математическим сложностям (см., например [6]), которые в данной модели не вполне оправданы;

3) при конечном ненулевом значении параметра a потенциал (1) определяет корректный интегральный оператор в гильбертовом пространстве $L^2(R_3)$ в любой момент времени t. Этот факт позволяет исследовать нестационарную задачу рассеяния на эволюционирующей кривой.

Заметим, что сепарабельная аппроксимация для δ-потенциала фактически использовалась в работе [4], в которой впервые была дана строгая интерпретация гамильтониана вида $-\Delta + \alpha\delta(\mathbf{r})$.

II. Итак, рассмотрим массивную частицу (далее везде $m = 1/2$, $\hbar = 1$) при $t \to -\infty$, свободную и соответственно описываемую вектором состояния $|\psi^-(t)\rangle$. Пусть вектор $|\psi(t)\rangle$ описывает состояние частицы в конечный момент времени t. Тогда волновая функция $\psi(\mathbf{p}, t) = \langle \mathbf{p}|\psi(t)\rangle$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению [1]:

$$\psi(\mathbf{p}, t) = \psi^-(\mathbf{p}, t) - i \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3\mathbf{p'} e^{-ip^2(t-t')} \langle \mathbf{p} \mid \hat{V}_a(t') \mid \mathbf{p'} \rangle \psi(\mathbf{p'}, t'). \qquad (3)$$

[2] Функция $\chi_a(\mathbf{p})$ выбрана здесь в виде $\theta(1/a - |\,\mathbf{p}|)$ исключительно для упрощения формул. Мы можем переопределить $\chi_a(\mathbf{p})$ так, что ее Фурье-образ $f_a(\mathbf{r}) \equiv 0$ для $r > a$.

Воспользовавшись явным выражением (1) для потенциала $V_a(t)$, находим:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{p},t) &= \phi(\mathbf{p},t) - \qquad (4)\\ &- i\epsilon_a\chi_a(\mathbf{p})\int\limits_0^t dt' e^{-ip^2(t-t')}\int\limits_{-\infty}^{\infty} ds' g(s') e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}(s',\,t')} I(s',t')\,, \\ I(s,t) &= \int d^3\mathbf{p}\chi_a(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}(s,\,t)}\psi(\mathbf{p},t)\,, \qquad (5) \end{aligned}$$

где функция

$$\phi(\mathbf{p},t) \equiv \psi^-(\mathbf{p},t) - i\int\limits_{-\infty}^{0} dt' \int d^3\mathbf{p}' e^{-ip^2(t-t')}\langle \mathbf{p} \mid \hat{V}_a(t') \mid \mathbf{p}'\rangle \psi(\mathbf{p}',t')$$

удовлетворяет, очевидно, нестационарному уравнению Шредингера (УШ) без взаимодействия. Пусть далее функция $\varphi_k(\mathbf{p})$ есть решение стационарного УШ с энергией $E = k^2$ и потенциалом (1) для случая $\mathbf{x}(s,\,t) = \mathbf{n}_3 s$:

$$\varphi_k(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}) - 2\pi\epsilon_a \frac{\chi_a(\mathbf{p})C_g(p_3)}{k^2 - p^2 + i0}\,.$$

Здесь введены вспомогательные обозначения:

$$C_g(p_3) = \int d^3\mathbf{p}'\tilde{g}(p_3 - p_3')\chi_a(\mathbf{p}')\varphi_k(\mathbf{p}')\,, \qquad \tilde{g}(p) = (1/2\pi)\int e^{-ips} g(s) ds\,.$$

Функция $C_g(p_3)$ в рассматриваемой модели задается, вообще говоря, произвольно и зависит от состояния движения частицы вдоль прямой $\mathbf{n}_3 s$. К сделанным в начале статьи модельным допущениям добавим следующее:

- пакет $\psi^-(\mathbf{p},t)$ сформирован так, что $\phi(\mathbf{p},t) = e^{-ip^2 t}\varphi_k(\mathbf{p})$.

Наложение такого требования приводит к уравнению на функцию $\psi^-(\mathbf{p},t)$, которое в данной работе мы изучать не будем.

Таким образом, функция $I(s,t)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$I(s,t) = I_k(s,t) - \epsilon_a \int\limits_0^t dt' \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds' g(s') K(s,t;s',t') I(s',t')\,, \qquad (6)$$

где введено обозначение для свободного члена

$$I_k(s,t) \equiv \int d^3\mathbf{p}\chi_a(\mathbf{p}) e^{i[\mathbf{p}\mathbf{x}(s,\,t) - p^2 t]}\varphi_k(\mathbf{p})$$

и ядра

$$K(s,t;s',t') = i\int d^3\mathbf{p}\chi_a(\mathbf{p}) e^{i[-p^2(t-t') + \mathbf{p}(\mathbf{x}(s,\,t) - \mathbf{x}(s',\,t'))]}\,.$$

III. Система (4)–(5) совместно с интегральным уравнением (6) полностью определяет волновую функцию рассеяния в рассматриваемой модели, которая в случае кривой (2) общего положения может быть вычислена лишь пертурбативными методами. Обратим внимание, что ряд теории возмущений для решения уравнения (4) можно строить как по константе взаимодействия ϵ_a (стандартная процедура квантовой теории рассеяния), так и по параметру λ (см. формулу (2)), что является специфическим свойством нашей модели. Таким образом

$$\psi(\mathbf{p},t) \equiv \psi(\epsilon_a, \lambda;\, \mathbf{p}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \psi_m(\epsilon_a; \mathbf{p}, t)\,.$$

В соответствии с определением функции $\varphi_k(\mathbf{p})$ волновая функция $e^{-ik^2t}\varphi_k(\mathbf{p})$ удовлетворяет системе (4)–(5) при $\lambda = 0$ тождественно. Поэтому $\psi_0(\epsilon_a;\mathbf{p},t) \equiv$ $\equiv \psi_0(\mathbf{p},t) = e^{-ik^2t}\varphi_k(\mathbf{p})$. Заметим, что при $\epsilon_a \to 0$ справедливы асимптотики:

$$\psi_0(\mathbf{p},t) = \mathcal{O}(1)\,, \qquad \psi_1(\mathbf{p},t) = \mathcal{O}(\epsilon_a)\,.$$

Вычислим "динамическую" поправку $\psi_1(\mathbf{p},t)$ с точностью до слагаемых порядка ϵ_a. Из системы (4)–(5) с учетом (2) имеем:

$$\begin{aligned}\psi_1(\mathbf{p},t) \quad &= \quad -\epsilon_a\chi_a(\mathbf{p})e^{-ip^2t}\times\\ \times\int\limits_0^t t'dt' \quad e^{ip^2t'} &\int\limits_{-\infty}^{\infty} ds'g(s')\int d^3\mathbf{p}'\chi_a(\mathbf{p}')e^{-i(p_3-p_3')s'}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\boldsymbol{\rho}(s',t')\psi_0(\mathbf{p}',t')\,.\end{aligned}$$

Далее, отбрасывая в формуле для ψ_0 слагаемые порядка ϵ_a, окончательно находим для области $|\,\mathbf{p}| < 1/a$, $|\,\mathbf{k}| < 1/a$:

$$\psi_1(\mathbf{p},t) = \epsilon_a e^{-ip^2t}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\boldsymbol{\Omega}(p_3-k_3;t)\,,$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}(p_3-k_3;t) = -\int\limits_0^t dt'\,t'e^{i(p^2-k^2)t'}\int\limits_{-\infty}^{\infty} ds'g(s')e^{-i(p_3-k_3)s'}\boldsymbol{\rho}(s',t')\,.$$

Среди вероятных приложений модели в первую очередь необходимо отметить описание рассеяния нейтронов на одномерных движущихся объектах, например, на макромолекулах. Это является возможным, на взгляд авторов, при дальнейшем развитии модели, что предполагает учет многочисленных (но не рассмотренных в данной статье) факторов.

Литература

[1] Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир. 1969. 608 с.

[2] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир. 1978. Т. 2. 396 с.

[3] Talalov S.V. About the mechanism of matter transfer along the cosmic string // Modern Physics Letters A. 2012. V. 27. № 8. P. 1250048-1–1250048-5.

[4] Березин Ф., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Доклады АН СССР. 1961. Т. 137. № 5. С. 1011–1014.

[5] Ведутенко Е.А., Талалов С.В. О рассеянии массивных нейтральных частиц на наноструктурах // Вестник Самарского государственного университета. 2007. № 9/1. С. 247–255.

[6] Шондин Ю.Г. О полуограниченности δ-возмущений опратора Лапласа с угловыми точками // Теор. и матем. физика. 1995. Т. 105. № 1. С. 3–17.

Поступила в редакцию $22/III/2013$;
в окончательном варианте — $22/III/2013$.

THE MODEL OF SCATTERING OF NEUTRAL QUANTUM PARTICLE ON A NON-STATIONARY CURVE

© 2013 E.A. Vedutenko, S.V. Talalov[3]

The model describing the scattering of neutral quantum massive particle on the evolving curve has been constructed by methods of non-relativistic scattering theory. The first "dynamical" correction for scattering wave function has been calculated for the case of small non-stationary perturbation of straight line.

Key words: separable potential, non-stationary Schrödinger equation.

Paper received 22/*III*/2013.
Paper accepted 22/*III*/2013.

[3]Vedutenko Elena Anatolievna (`Physics@tltsu.ru`), Talalov Sergey Vladimirovich (`svtalalov@tltsu.ru`), the Dept. of Physics, Togliatti State University, Togliatti, 445667, Russian Federation.