УДК 517.2

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ J-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2013 В.Г. Николаев[1]

Изучены свойства 2-вектор-функций, аналитических по Дуглису. Доказаны три вспомогательные теоремы, на основании которых приведен общий алгоритм построения примеров неединственности однородной задачи Шварца в виде квадратичных форм.

Ключевые слова: матрица, собственное число, собственный вектор, голоморфная функция, квадратичная форма, векторный полином.

1. Предварительные сведения

Настоящая статья посвящена исследованию свойств 2-вектор-функций, аналитических по Дуглису (Douglis) [1].

Ниже для краткости будем обозначать ϕ_x и ϕ_y частные производные функции $\phi(x,y)$ по x и по y соответственно.

Определение 1.1. Обозначим J произвольную $n\times n$-матрицу, среди собственных чисел которой нет вещественных. Комплексную n-вектор-функцию $\phi(x,y)$ назовем J-аналитической, или аналитической по Дуглису с матрицей J в области $G\subset \mathbf{R}^2$, если

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}-J\frac{\partial\phi}{\partial x}=0,\quad (x,y)\in G. \tag{1.1}$$

В скалярном случае при $J=\lambda,\ \ \operatorname{Im}\lambda\neq 0$ функцию $\phi(z)$, удовлетворяющую в области $G\subset\mathbf{R}^2$ соотношению $\phi_y-\lambda\cdot\phi_x=0$, назовем λ-голоморфной. При $\lambda=i$ она совпадает с обычной голоморфной функцией.

Определение 1.2. Будем говорить, что функция $\phi(z)$ соответствует матрице J, если для них выполнено (1.1).

Замечание 1.1. Если α,β — константы, C — вектор-константа, а функции $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ соответствуют матрице J, то функция $\phi(z)=\alpha\phi_1+\beta\phi_2+C$ будет соответствовать той же матрице J. Это вытекает из (1.1).

Хорошо известно, что условия (1.1) достаточно для аналитичности функции $\phi(z)$. При этом даже не нужно требовать непрерывности ее первых частных производных.

[1]Николаев Владимир Геннадьевич (vg14@inbox.ru), кафедра алгебры и геометрии Новгородского государственного университета, 173003, Российская Федерация, г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 41.

2. Вспомогательное утверждение

Имеет место

Теорема 2.1. Для произвольного комплексного числа $\mu \notin \mathbf{R}$ существует такая непостоянная вещественная функция $u(x,y)$, что комплексная функция $u_y - \mu \cdot u_x$ является голоморфной. При $\mu \neq -i$ функция $u(x,y)$ есть полином не выше 2-й степени, квадратичная часть которого единственна с точностью до вещественного множителя.

Разумеется, линейная часть $u(x,y)$ не единственна.

Доказательство разобьем на три пункта. Пусть $\mu = ki+r$, $k \neq 0$. Обозначим

$$u_y - (ki+r) \cdot u_x = p + iq, \tag{2.1}$$

где $u(x,y)$ — вещественная функция; $p+iq$ — комплексная функция.

1°. Пусть $\mu = -i$. Тогда $p+iq$ в (2.1) будет голоморфной для произвольной гармонической функции $u(x,y)$, что следует из формул (2.4) или (2.5) ниже. Поэтому при $\mu = -i$ единственности нет.

2°. Пусть $\mu \neq -i$, то есть $(k,r) \neq (-1,0)$, $k \neq 0$. Предположим, что вещественная функция $u(x,y)$ и голоморфная $p+iq = f(z)$, удовлетворяющие (2.1), существуют и определены в некоторой односвязной области G. Это в силу (2.1) означает, в частности, что $u(x,y)$ — аналитическая в G функция.

Докажем, что $u(x,y)$ — полином второй степени. Выпишем реальную и комплексную части уравнения (2.1):

$$u_y - ru_x = p\,; \qquad -ku_x = q. \tag{2.2}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} p_x = u_{xy} - ru_{xx}; & q_y = -ku_{xy}, \\ p_y = u_{yy} - ru_{xy}; & -q_x = ku_{xx}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Поэтому с учетом условий Коши — Римана

$$p_x = q_y, \quad p_y = -q_x, \tag{2.4}$$

которым удовлетворяет голоморфная функция $f(z) = p+iq$, из (2.3) вытекает, что

$$\begin{cases} (1+k)u_{xy} - ru_{xx} = 0, \\ -ru_{xy} - ku_{xx} + u_{yy} = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Из (2.2) имеем:

$$\begin{cases} u_x = -\dfrac{1}{k}\, q(x,y), \\ u_y = r \cdot u_x + p(x,y) = -\dfrac{r}{k}\, q(x,y) + p(x,y). \end{cases} \tag{2.6}$$

Применяя к (2.6) условие замкнутости $(u_y)'_x = (u_x)'_y$, получаем:

$$-\frac{r}{k}\, q_x + p_x = -\frac{1}{k}\, q_y, \quad \text{т.е.} \quad -rq_x + kp_x = -q_y.$$

Отсюда в силу соотношения $p_x = q_y$ — см. (2.4) — имеем равенство $-rq_x + kq_y + q_y = 0$, или

$$(k+1)q_y - r \cdot q_x = 0. \tag{2.7}$$

Выражение (2.7) — это линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно вещественной функции $q(x,y)$. Как известно, его общее решение имеет вид

$$q(x,y) = \varphi(r\,y + (k+1)\,x), \tag{2.8}$$

где $\varphi(\xi)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Причем функция $q(x,y)$, являясь мнимой частью голоморфной $f(z)$, будет гармонической, то есть по определению $q_{xx}+q_{yy}=0$. Это равенство с учетом (2.8) означает, что

$$\left[(k+1)^2+r^2\right]\cdot\varphi''_{\xi\xi}\equiv 0,\quad (x,y)\in G \tag{2.9}$$

(производная $\varphi''_{\xi\xi}$ существует в силу (2.8) и равенства $q=\operatorname{Im} f(z)$).

Так как по условию п. 2° $(k,r)\neq(-1,0)$, то в силу (2.9) $\varphi''_{\xi\xi}\equiv 0$ в области G, откуда функция $\varphi(\xi)$ линейная. Поэтому на основании (2.8) функция $q(x,y)$, а следовательно и $f(z)=p+iq$, тоже линейные. При этом линейная часть $f(z)$ единственна с точностью до вещественного множителя. Отсюда с учетом (2.2) следует, что вещественная функция $u(x,y)$ в (2.1) — полином не выше второй степени, квадратичная часть которого определена с точностью до множителя.

Чтобы получить формулы для коэффициентов квадратичной формы $u(x,y)$, надо подставить выражение $u=ax^2+2cxy+by^2$ в систему (2.5). Приведем конечный результат:

при $k\neq -1$, r — произвольном:

$$u(x,y)=x^2+\frac{2r}{1+k}\,xy+\frac{(r^2+k^2+k)}{1+k}\,y^2\,; \tag{2.10}$$

при $k=-1$, $r\neq 0$:

$$u(x,y)=2xy+ry^2. \tag{2.11}$$

Можно показать, что квадратичная форма (2.10) при $k>0$ положительно определена.

3°. Существование вещественной функции $u(x,y)$ и голоморфной $p+iq$, для которых верно (2.1), вытекает из (2.4), (2.10), (2.11). Тем самым теорема 2.1 доказана.

3. Функции с линейно зависимыми компонентами вещественной части

В этом пункте рассмотрим аналитические по Дуглису 2-вектор-функции $\phi(z)$, обладающие свойством $\operatorname{Re}\phi(z)=(\alpha\cdot f,\,\beta\cdot f)$, где α,β — некоторые вещественные числа. При этом хотя бы одно из них будем считать ненулевым. В теореме 4.1 будет доказано, что такие функции существуют.

Замечание 3.1. В [2] показано, что если $\alpha=\beta=0$, то есть при $\operatorname{Re}\phi(z)\equiv 0$, функция $\phi(z)$ будет векторным полиномом. Также этот случай изучался в [3].

Теорема 3.1. Пусть функция $\phi(z)$ является аналитической по Дуглису в односвязной области G с нетреугольной 2×2-матрицей J, имеющей комплексные собственные числа $\lambda,\mu\notin\mathbf{R}$, $\lambda\neq\overline{\mu}$.

Для вещественных α,β обозначим:

$$C=\begin{pmatrix}1/\alpha & 0\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix},\ \alpha,\beta\neq 0;\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1/\beta\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \alpha=0,\,\beta\neq 0. \tag{3.1}$$

При $\alpha\neq 0$, $\beta=0$ положим $C=E$. Тогда:

1) если $\operatorname{Re}\phi(z)=(\alpha\cdot f,\,\beta\cdot f)$ и матрица $J'=CJC^{-1}$ нетреугольная, то $\phi(z)$ есть векторный полином не выше второй степени;

2) если $\operatorname{Re}\phi(z)=(f,\,0)$, или $\operatorname{Re}\phi(z)=(0,\,g)$, то матрица J' нетреугольна, а квадратичная часть $\phi(z)$ единственна с точностью до вещественного множителя.

Замечание 3.2. Матрица C подобрана из условия $\operatorname{Re}(C\phi)=(f,\,0)$.

Доказательство. 1) Пусть матрица $J' = CJC^{-1}$ нетреугольная.

С учетом (1.1) равенство

$$(C\phi)_y - CJC^{-1}(C\phi)_x = 0 \tag{3.2}$$

означает, что функция $C\phi(z)$ будет аналитической по Дуглису с матрицей $J' = CJC^{-1}$. Обозначим ее снова $\phi(z)$, то есть пусть $\phi_y - J' \cdot \phi_x = 0$. При этом в силу замечания 3.2

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} f(x,y) + ig_1(x,y) \\ 0 + ig_2(x,y) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Очевидно, что п. 1) достаточно доказать для функций $\phi(z)$ вида (3.3) и матрицы J'.

1а) *Пусть одно из собственных чисел J' равно $\lambda = i$, а второе $\mu \neq -i$, $\operatorname{Im}\mu \neq 0$ произвольное.*

Обозначим $\mathbf{y} = (b, 1)$ — собственный вектор матрицы J', соответствующий μ. Здесь $b \neq 0$, так J' нетреугольная. Пусть также вектор $\mathbf{x} = (1, 0)$. В силу нетреугольности J' он не может быть собственным, поэтому $J'\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \zeta\mathbf{y}$, $\zeta \neq 0$; $J'\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$.

Таким образом, в базисе

$$B = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

матрица $J_1 = B^{-1}J'B$ оператора J' имеет вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \zeta & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ \zeta & \mu \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

то есть $\lambda = i$, так как матрицы J' и J_1 подобны и поэтому имеют одинаковые собственные числа.

Далее, поскольку $J' = BJ_1B^{-1}$ и $\phi_y - J' \cdot \phi_x = 0$, то

$$(B^{-1}\phi)_y - J_1(B^{-1}\phi)_x = 0. \tag{3.6}$$

С учетом (3.3) и (3.4)

$$B^{-1}\phi(z) = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f + ig_1 \\ ig_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(z) \\ ig_2 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Тогда (3.6) с учетом (3.5) и (3.7) можно подробно расписать в виде

$$\begin{pmatrix} R(z) \\ ig_2 \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} i & 0 \\ \zeta & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(z) \\ ig_2 \end{pmatrix}_x = 0, \quad \zeta \neq 0. \tag{3.8}$$

Согласно первой строке (3.8) функция $R(z)$ будет голоморфной (по определению 1.1). Вторая строка после деления на i примет вид

$$(g_2)_y - \mu(g_2)_x = \frac{\zeta}{i}\frac{d}{dx}R(z) = \frac{\zeta}{i}R'(z), \tag{3.9}$$

где функция $g_2(x,y)$ вещественная, а функция $R'(z)$ голоморфная.

Таким образом, с учетом (3.9) и теоремы 2.1 функции $g_2(x,y)$ и $R(z)$ в (3.7) будут полиномами не выше второй степени (кроме случая $\mu = -i$). Отсюда в силу (3.7) $\phi(z)$ также есть векторный полином степени два.

В п. 1а) ограничение на собственные числа было сделано для того, чтобы применить теорему 2.1. Но теперь избавимся от него.

1b) Собственные числа $\lambda=\lambda_1+\lambda_2 i,\ \ \lambda_2\neq 0$ и $\mu\neq\overline{\lambda}$ нетреугольной матрицы J'. Рассмотрим линейную обратимую подстановку

$$x=x_1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}y_1,\quad y=\frac{1}{\lambda_2}y_1. \tag{3.10}$$

Несложно показать, что функция $\phi(x,y)$, аналитическая по Дуглису с матрицей J', в результате преобразования (3.10) становится функцией $\phi_1=\phi(x_1,y_1)$, удовлетворяющей (1.1) уже с матрицей $J^*=\frac{1}{\lambda_2}(J'-\lambda_1 E)$. При этом $\phi(z)$ и $\phi_1(z)$ одновременно имеют вид (3.3). Матрица J^* останется нетреугольной, а ее собственными числами будут i и некоторое $\eta\neq -i$. Отсюда в силу п. 1a) и обратимости (3.10) вытекает, что утверждение п. 1) верно и для произвольных собственных чисел $\lambda\neq\overline{\mu}$.

2) При $\alpha=0,\ \beta\neq 0$ матрица $J'=CJC^{-1}$ будет нетреугольной — проверяется ее вычислением (так как J по условию теоремы нетреугольная). Тем более это верно для $\alpha\neq 0,\ \beta=0$ — тогда $J'=J$. Поэтому утверждение п. 1) справедливо для функций $\phi(z)$ со свойством $\operatorname{Re}\phi(z)=(f,\,0)$ или $\operatorname{Re}\phi(z)=(0,\,g)$.

Рассмотрим случай $\operatorname{Re}\phi(z)=(f,\,0)$. Пусть $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ — две разные векторные квадратичные формы вида (3.3), соответствующие одной и той же нетреугольной матрице J.

Поскольку квадратичная форма $g_2(x,y)$ в силу (3.9) и теоремы 2.1 определена с точностью до вещественного множителя, то при некотором реальном ξ имеем: $\phi_3(z)=\phi_1+\xi\phi_2=(h(x,y),\,0)$. В силу замечания 1.1 $\phi_3(z)$ будет аналитической по Дуглису с той же самой матрицей J. Подставив $\phi_3(z)$ в (1.1), получим $2\times$ $\times\,2$-систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно переменных h_x,h_y. Ее определитель не равен нулю в силу нетреугольности J, поэтому $h_x=h_y\equiv 0$. Следовательно, $\phi_3(z)$ есть вектор-константа. Таким образом, квадратичные формы $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ отличаются на константу, что и требовалось.

Для случая $\operatorname{Re}\phi(z)=(0,g)$ нужно использовать формулу (3.2), где матрица C имеет вид (3.1) при $\alpha=0,\quad\beta\neq 0$. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.3. В п. 1) приведенного выше доказательства было существенно использовано *условие нетреугольности матрицы* J'. Однако при $\alpha\neq 0,\quad\beta\neq 0$ она может быть верхнетреугольной (то есть элемент $a'_{21}=0$). В этом особом случае п. 1) не верен.

Приведем контрпример. Пусть в (3.1) $\alpha=\beta=1$,

$$J=\begin{pmatrix} i+1 & -1\\ 1-i & 2i-1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix};\quad \phi(z)=\begin{pmatrix} z^n\\ z^n\end{pmatrix},$$

где $n=1,2,3,\ldots$ Матрица J имеет собственные числа $\lambda=i$ и $\mu=2i$. При этом матрица $J'=CJC^{-1}$ имеет элемент $a'_{21}=0$. Здесь $\operatorname{Re}\phi(z)=(\operatorname{Re}z^n,\,\operatorname{Re}z^n)$ для произвольного n, что противоречит утверждению п. 1) теоремы 3.1.

Замечание 3.4. Если функции $\phi_1(z)$, где $\operatorname{Re}\phi_1=(f,0)$, и $\phi_2(z)$, где $\operatorname{Re}\phi_2=$ $=(0,g)$, соответствуют одной и той же матрице J, то квадратичные формы f и g могут быть разными. В качестве доказательства приведем

Пример 3.1. Пусть

$$J=\begin{pmatrix}-i & 8\\ 1 & 5i\end{pmatrix},\quad \phi_1=\begin{pmatrix}5x^2+3y^2-1+6xy\,i\\ 0+(x^2+3y^2)\,i\end{pmatrix},\quad \phi_2=\begin{pmatrix}0+(x^2+3y^2)\,i\\ -\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{15}{8}y^2+\dfrac{3}{4}xyi\end{pmatrix}.$$

Здесь матрица J имеет собственные числа $\lambda=i,\quad\mu=3i$.

Таким образом, если две функции $\phi_3(z)$, $\operatorname{Re}\phi_3 = (\alpha \cdot f,\, \beta \cdot f)$, и $\phi_4(z)$, $\operatorname{Re}\phi_4 = (\gamma \cdot g,\, \delta \cdot g)$ соответствуют некоторой матрице J, где все числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — ненулевые, то $\phi_3(z)$ и $\phi_4(z)$ могут не быть линейно зависимыми. Для построения контрпримера нужно к функциям ϕ_1, ϕ_2 и к матрице J из примера 3.1 применить преобразование (3.2), где C — произвольная неособая вещественная матрица без нулевых элементов.

4. Алгоритм построения контрпримеров к задаче Шварца

Как известно, однородная задача Шварца [2; 3] состоит в следующем. Обозначим Γ границу ограниченной односвязной области $G \subset \mathbf{R}^2$. Для данной матрицы J надо найти соответствующую ей вектор-функцию $\phi(z)$, аналитическую в G и обладающую свойством $\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma = 0$.

Очевидно, что функция $\phi(z) = 0 + iC = \text{const}$ будет решением этой задачи. Однако построенный в пункте 3 пример 3.1 показывает, что она не всегда является единственным ее решением. Действительно, $\operatorname{Re}\phi_1(z)\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе $\Gamma : 5x^2 + 3y^2 = 1$, но $\phi_1(z) \neq \text{const}$.

Для получения общего алгоритма построения таких примеров докажем следующее утверждение, которое вытекает из теоремы 3.1.

Теорема 4.1. Пусть нетреугольная 2×2-матрица J имеет комплексные собственные числа $\lambda, \mu \notin \mathbf{R}$, $\lambda \neq \overline{\mu}$, и пусть α, β — вещественные числа. Тогда для каждого из трех случаев: 1) $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$; 2) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$; 3) $\alpha, \beta \neq 0$ существуют соответствующие матрице J векторные квадратичные формы $\phi(z)$ со свойством $\operatorname{Re}\phi = (\alpha \cdot f,\, \beta \cdot f)$.

Доказательство. 1) Рассмотрим случай $\operatorname{Re}\phi = (f, 0)$. Пусть сначала $\lambda = i$ и $\mu = ki + r \neq -i$. Найдем $\mathbf{y} = (b, 1)$ — собственный вектор матрицы J, соответствующий μ. Образуем по формуле (3.4) базис B оператора J. Найдем коэффициент $\zeta \neq 0$ матрицы $J_1 = B^{-1}JB$ вида (3.5).

Вычисления показывают, что если

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad b = \frac{a_{12}}{\mu - a_{11}}, \qquad \zeta = a_{21}.$$

Построим по формулам (2.10) или (2.11) вещественную квадратичную форму $g_2(x, y) = u(x, y)$ для данных k, r. Подставив $g_2(x, y)$ в левую часть (3.9), запишем получившееся выражение в виде

$$a_1(x + iy) = a_1 z = \frac{\zeta}{i} R'(z),$$

где a_1 — комплексное число. Отсюда

$$R(z) = \frac{i a_1 z^2}{2\,\zeta}\,.$$

Тогда согласно (3.4) и (3.7) окончательно имеем:

$$\phi(x, y) = B \cdot \left(B^{-1}\phi\right) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(z) \\ i g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + i g_1 \\ i g_2 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Функция (4.1) будет аналитической по Дуглису с данной матрицей J, при этом $\operatorname{Re}\phi(z) = (f,\, 0)$. Для произвольного $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$ нужно использовать преобразование (3.10).

Случаи 2) и 3) сводятся к предыдущему, если положить

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha = 0, \beta \neq 0 \ ; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \neq 0$$

и затем использовать (3.2). Теорема 4.1 доказана.

Схема приведенного доказательства дает общий алгоритм построения примеров неединственности однородной задачи Шварца в виде квадратичных вектор-форм.

Действительно, пусть для некоторой матрицы J построена соответствующая ей векторная квадратичная форма $\phi(z)$ вида (4.1). При этом оказалось, что функция $f(x,y)$ в (4.1) есть положительно определенная и неособая квадратичная форма. Тогда функция $\phi_1(z) = \phi(z) - (1,0)$ будет согласно замечанию 1.1 соответствовать той же матрице J, но при этом $\operatorname{Re}\phi_1(z)\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе $\Gamma: \ f(x,y) = 1$. Таким образом, будем иметь пример неединственности однородной задачи Шварца, так как $\phi_1(z) \neq \mathrm{const}$. Очевидно, что его можно построить не для всех матриц.

Следует отметить, что тип квадратичной формы $f(x,y)$ в (4.1) после применения (3.10) и обратного к нему не изменится. Из теорем 2.1 и 3.1 вытекает, что этот тип определен однозначно. В связи с этим предлагается ввести следующую классификацию 2×2-матриц по квадратичным формам.

Определение 4.1. Будем говорить, что матрица $J \in \mathrm{Sw}_+$, если функция $f(x,y)$ в (4.1) есть положительно (отрицательно) определенная и неособая квадратичная форма. Если f — знакопеременная форма, то $J \in \mathrm{Sw}_-$. Если $f = (ax+by)^2$, то $J \in \mathrm{Sw}_0$.

Отметим, что в соответствии с такой классификацией в примере 3.1 матрица $J \in \mathrm{Sw}_+$.

Заключение

В статье изучены некоторые свойства J-аналитических вектор-функций, соответствующих нетреугольным 2×2-матрицам. Основным ее результатом является алгоритм построения векторных полиномов второй степени, которые соответствуют произвольным матрицам и реальные части которых линейно зависимы. На основании данного алгоритма выделен класс 2×2-матриц, обозначенный Sw_+, для которых нет единственности однородной задачи Шварца.

Литература

[1] Солдатов А.П. Функции, аналитические по Дуглису. Великий Новгород: Изд-во НовГУ, 1995. 195 с.

[2] Солдатов А.П. Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису // Современная математика и ее приложения. 2010. Т. 67. С. 97–100.

[3] Николаев В.Г. Об одном преобразовании задачи Шварца // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2012. № 6(97). С. 27–34.

Поступила в редакцию 21/*III*/2013;
в окончательном варианте — 21/*III*/2013.

ON SOME PROPERTIES OF J-ANALYTICAL FUNCTIONS

© 2013 V.G. Nikolaev[2]

The properties of 2-vector-valued functions analytic in Douglis are studied. Three auxiliary theorems, on the basis of which the general algorithm of constructing examples of not-uniqueness homogeneous problem of Schwartz in the form of quadratic forms is reduced to are proved.

Key words: matrix, eigen number, eigen vector, holomorphic function, quadratic form, vector polynomial.

Paper received 21/*III*/2013.
Paper accepted 21/*III*/2013.

[2]Nikolaev Vladimir Gennadievich (`vg14@inbox.ru`), the Dept. of Algebra and Geometry, Novgorod State University, Veliky Novgorod, 173003, Russian Federation.