УДК 512.572

ЭКСПОНЕНТЫ НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА — ПУАССОНА[1]

© 2013 С.М. Рацеев,[2] О.И. Череватенко[3]

В работе получены эквивалентные условия для оценок роста многообразий алгебр Лейбница — Пуассона с нильпотентным коммутантом.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, алгебра Лейбница — Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

1. Предварительные сведения

Алгебра $A = A(+,\cdot,\{,\},K)$ над полем K называется алгеброй Лейбница — Пуассона, если $A(+,\cdot,K)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+,\{,\},K)$ — алгебра Лейбница с операцией умножения $\{,\}$ и для любых $a,b,c \in A$ выполняются правила:

$$\{a\cdot b, c\} = a\cdot\{b,c\} + \{a,c\}\cdot b,$$
$$\{c, a\cdot b\} = a\cdot\{c,b\} + \{c,a\}\cdot b.$$

При этом алгебра Лейбница $A(+,\{,\},K)$ над полем K определяется тождеством

$$\{\{x,y\},z\} = \{\{x,z\},y\} + \{x,\{y,z\}\},$$

то есть правое умножение на элемент алгебры является дифференцированием.

Заметим, что если в алгебре Лейбница — Пуассона выполнено тождество $\{x,x\} = 0$, то данная алгебра будет являться алгеброй Пуассона. Таким образом, алгебры Лейбница — Пуассона являются обобщениями алгебр Пуассона, которые возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики и т. д.

Пусть $L(X)$—свободная алгебра Лейбница с умножением [,], где $X = \{x_1, x_2, ...\}$ — счетное множество свободных образующих. В алгебре $L(X)$ зафиксируем упорядоченный базис $v_1, v_2, ...$, где $v_i < v_j$ при $i < j$. Рассмотрим ассоциативную коммутативную алгебру полиномов $K[v_1, v_2, ...]$. В этой алгебре определим скобки $\{,\}$ для порождающих элементов v_i как умножение в алгебре $L(X)$:

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ 10-01-00209-а.

[2]Рацеев Сергей Михайлович (RatseevSM@mail.ru), кафедра информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета, 432017, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

[3]Череватенко Ольга Ивановна (chai@pisem.net), кафедра высшей математики Ульяновского государственного педагогического университета имени И.Н. Ульянова, 432700, Российская Федерация, г. Ульяновск, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина, 4.

$\{v_i, v_j\} = [v_i, v_j]$. Распространим скобки $\{,\}$ на любые элементы из $K[v_1, v_2, ...]$, используя линейность и правила

$$\{f \cdot g, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g, \quad \{h, f \cdot g\} = f\{h, g\} + \{h, f\}g,$$

где $f, g, h \in K[v_1, v_2, ...]$. Тогда полученная алгебра будет свободной алгеброй Лейбница — Пуассона $F(X)$, причем базис алгебры $F(X)$ будут составлять все элементы вида $v_{i_1}^{\alpha_1} \cdot ... \cdot v_{i_k}^{\alpha_k}$, где $\alpha_1, ..., \alpha_k \geqslant 0$, $i_1 < ... < i_k$.

Договоримся опускать скобки $\{,\}$ при их левонормированной расстановке:

$$\{\{\{x_1, x_2\}, x_3\}, ..., x_n\} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, ..., x_n$.

Предложение ([1]). Базис пространства P_n состоит из всех элементов вида

$$x_{k_1} \cdot ... \cdot x_{k_r} \cdot \{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\} \cdot ... \cdot \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\}, \tag{1.1}$$

для каждого из которых выполнены следующие условия:

(i) $r \geqslant 0$, $k_1 < ... < k_r$;

(ii) каждая из переменных x_1,...,x_n встречается в (1.1) ровно один раз;

(iii) каждый множитель $\{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\}$,..., $\{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\}$ в (1.1) левонормирован и имеет длину $\geqslant 2$;

(iv) множители в (1.1) упорядочены по длине: $s \leqslant ... \leqslant t$;

(v) если два соседних множителя в (1.1), являющиеся скобками $\{,\}$, имеют одинаковую длину

$$... \cdot \{x_{p_1}, ..., x_{p_s}\} \cdot \{x_{q_1}, ..., x_{q_s}\} \cdot ...,$$

то $p_1 < q_1$.

Обозначим через Γ_n подпространство в P_n, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\} \cdot ... \cdot \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\}, \qquad s \geqslant 2, ..., \ t \geqslant 2.$$

Пусть V — некоторое многообразие алгебр Лейбница — Пуассона, $Id(V)$ — идеал тождеств многообразия V. Обозначим

$$P_n(V) = P_n/(P_n \cap Id(V)), \quad \Gamma_n(V) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap Id(V)),$$

$$c_n(V) = dim\ P_n(V), \quad \gamma_n(V) = dim\ \Gamma_n(V).$$

Если многообразие V имеет экспоненциальный рост, то введем в рассмотрение нижние и верхние экспоненты соответствующих последовательностей $\{c_n(V)\}_{n\geqslant 1}$ и $\{\gamma_n(V)\}_{n\geqslant 1}$:

$$\underline{EXP}(V) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}, \qquad \overline{EXP}(V) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)},$$

$$\underline{EXP^\Gamma}(V) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n(V)}, \qquad \overline{EXP^\Gamma}(V) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n(V)}.$$

Если $\underline{EXP}(V) = \overline{EXP}(V)$, то будем обозначать $EXP(V)$. Аналогично и с $EXP^\Gamma(V)$. При этом из предложения 4 работы [1] следует, что если для многообразия алгебр Лейбница — Пуассона V существует одна из экспонент $EXP(V)$ или $EXP^\Gamma(V)$, то будет существовать и другая, причем $EXP(V) = EXP^\Gamma(V)+1$.

Хорошо известно [2], что если V — нетривиальное многообразие ассоциативных алгебр, то рост многообразия V сверху ограничен экспоненциальной функцией.

При этом в случае основного поля нулевой характеристики экспонента произвольного многообразия ассоциативных алгебр существует и является целым числом (см. [3; 4]). В случае же алгебр Ли имеются многообразия со сверхэкспоненциальным ростом [5] и многообразия с дробной экспонентой [6]. Алгебры Пуассона наследуют некоторые свойства как ассоциативных алгебр, так и алгебр Ли. Например [7], в случае основного поля нулевой характеристики существует только два многообразия алгебр Пуассона почти полиномиального роста (как и в ассоциативном случае). При этом хорошо известны пять многообразий алгебр Ли почти полиномиального роста (до сих пор неизвестно, исчерпывают ли они весь набор многообразий алгебр Ли с данным свойством). В то же время, как и в случае алгебр Ли, существуют многообразия алгебр Пуассона со сверхэкспоненциальным ростом. Например, пусть U — многообразие алгебр Пуассона, определенное тождеством $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$. Тогда $c_n(U) \geqslant [(n-1)! \cdot e]$, где $e = 2,71...$, $[\ ]$ — целая часть числа (см. [8]).

2. Пространства специального вида

В работе [9] показано, что если идеал тождеств некоторого многообразия алгебр Лейбница — Пуассона V над произвольным полем содержит тождества вида

$$\{\{x_1, y_1\}, ..., \{x_n, y_n\}\} = 0, \quad \{x_1, y_1\} \cdot ... \cdot \{x_n, y_n\} = 0, \tag{2.1}$$

то экспонента многообразия V существует и является целым числом. В данной работе приводятся эквивалентные условия для значений этих самых экспонент.

Напомним, что последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ называют разбиением числа n и обозначают $\lambda \vdash n$, если $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = n$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k > 0$.

Обозначим через V_s многообразие алгебр Лейбница — Пуассона, определенное всеми полилинейными тождествами степени $2s$ вида

$$\{\{x_{11}, y_{11}\}, \{x_{12}, y_{12}\}, ..., \{x_{1\lambda_1}, y_{1\lambda_1}\}\}\{\{x_{21}, y_{21}\}, \{x_{22}, y_{22}\}, ..., \{x_{2\lambda_2}, y_{2\lambda_2}\}\} \times ...$$
$$... \times \{\{x_{k1}, y_{k1}\}, \{x_{k2}, y_{k2}\}, ..., \{x_{k\lambda_k}, y_{k\lambda_k}\}\} = 0, \qquad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k) \vdash s.$$

Ниже в качестве примера выписаны все тождества, которыми задаются многообразия V_2, V_3, V_4.

V_2 :

$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}\} = 0,$
$\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} = 0;$

V_3 :

$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}\} = 0,$
$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}\} \cdot \{x_3, y_3\} = 0,$
$\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} \cdot \{x_3, y_3\} = 0;$

V_4 :

$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \{x_4, y_4\}\} = 0,$
$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}\} \cdot \{x_4, y_4\} = 0,$
$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}\} \cdot \{\{x_3, y_3\}, \{x_4, y_4\}\} = 0,$
$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}\} \cdot \{x_3, y_3\} \cdot \{x_4, y_4\} = 0,$
$\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} \cdot \{x_3, y_3\} \cdot \{x_4, y_4\} = 0.$

Заметим, что $\Gamma_n(V_s) \cong \bigoplus\limits_{c=1}^{s-1} \Gamma_n(Id(V_c)/Id(V_{c+1}))$, где пространство $\Gamma_n(Id(V_c)/Id(V_{c+1}))$ есть прямая сумма линейных оболочек элементов следующего вида:

$$\Gamma_n(Id(V_c)/Id(V_{c+1})) = \bigoplus_{\lambda\vdash c}\langle$$
$$\{\{x_{11}, x_{12}, ..., x_{1a_{11}}\}, \{x_{21}, x_{22}, ..., x_{2a_{12}}\}, ..., \{x_{\lambda_1 1}, x_{\lambda_1 2}, ..., x_{\lambda_1 a_{1\lambda_1}}\}\}\times$$
$$\times\{\{y_{11}, y_{12}, ..., y_{1a_{21}}\}, \{y_{21}, y_{22}, ..., y_{2a_{22}}\}, ..., \{y_{\lambda_2 1}, y_{\lambda_2 2}, ..., y_{\lambda_2 a_{2\lambda_2}}\}\} \times ...$$
$$... \times \{\{z_{11}, z_{12}, ..., z_{1a_{k1}}\}, \{z_{21}, y_{22}, ..., z_{2a_{k2}}\}, ..., \{z_{\lambda_k 1}, z_{\lambda_k 2}, ..., z_{\lambda_k a_{k\lambda_k}}\}\} \quad |$$
$$\{x_{i_1 j_1}, y_{i_2 j_2}, z_{i_3 j_3}\} = \{x_1, x_2, ..., x_n\},\ \ a_{ij} \geqslant 2\rangle_K.$$

Элементы $x_{i3}, ..., x_{ia_{1i}}$, $i = 1, ..., \lambda_1$, $y_{i3}, ..., y_{ia_{2i}}$, $i = 1, ..., \lambda_2$,..., $z_{i3}, ..., z_{ia_{ki}}$, $i = 1, ..., \lambda_k$, можно менять местами, так как, меняя местами два рядом стоящих элемента, мы дополнительно получаем элемент из $Id(V_{c+1})$.

Например, для многообразий V_2, V_3, V_4 соответствующие пространства $\Gamma_n(V_i)$ будут выглядеть следующим образом:

$$\Gamma_n(V_2) = \langle\{x_{i_1}, ..., x_{i_n}\}\rangle_K,$$

где

$$\{i_1, ..., i_s\} = \{1, ..., n\}, \quad i_3 < ... < i_n.$$

$$\Gamma_n(V_3) = \Gamma_n(V_2) \oplus \langle\{\{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\}, \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\}\}\rangle_K \oplus \langle\{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\} \cdot \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\}\rangle_K,$$

где

$$s \geqslant 2, \quad t \geqslant 2, \quad i_3 < ... < i_s, \quad j_3 < ... < j_t.$$

$$\Gamma_n(V_4) = \Gamma_n(V_3) \oplus \langle\{\{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\}, \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\}, \{x_{k_1}, ..., x_{k_u}\}\}\rangle_K\oplus$$
$$\oplus\langle\{\{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\}, \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\}\} \cdot \{x_{k_1}, ..., x_{k_u}\}\rangle_K\oplus$$
$$\oplus\langle\{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\} \cdot \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\} \cdot \{x_{k_1}, ..., x_{k_u}\}\rangle_K,$$

где

$$s \geqslant 2, \quad t \geqslant 2, \quad u \geqslant 2, \quad i_3 < ... < i_s, \quad j_3 < ... < j_t, \quad k_3 < ... < k_u.$$

Пусть V — некоторое фиксированное подмногообразие в V_s. Тогда

$$\Gamma_n(V) \cong \sum_{c=1}^{s-1} \bigoplus_{\lambda\vdash c} W_{c,\lambda,n}(V),$$

где

$$\bigoplus_{\lambda\vdash c} W_{c,\lambda,n}(V) = \Gamma_n\left(\frac{Id(V \cap V_c)}{Id(V \cap V_{c+1})}\right), \ \ c = 1, ..., s-1.$$

Замечание. Пусть элемент f принадлежит пространству $W_{c,\lambda,n}$. Тогда f имеет такой общий вид:

$$...\{x_1, x_2, ...\}...\{x_3, x_4, ...\}...\{x_{2c-1}, x_{2c}, ...\}, \tag{2.2}$$

где вместо многоточий, находящихся вне элементов $\{x_1, x_2, ...\}$,..., $\{x_{2c-1}, x_{2c}, ...\}$, каким-либо образом расставлены скобки $\{,\}$ и умножения $\cdot$. Если нам неважно, каким образом расставлены данные операции, а важно что происходит внутри выписанных в (2.2) c скобок $\{,\}$, то будем использовать запись вида (2.2), чтобы не выписывать множество различных индексов.

Пусть даны два целых числа k и m. В матрице размера $k \times m$ расставим числа $1, 2, ..., km$ следующим образом. В первый столбец расставим числа $1, 2, ..., k$ по порядку сверху вниз. Также расставим числа $k+1, k+2, ..., 2k$ по порядку сверху вниз во второй столбец. Таким же способом заполним оставшиеся столбцы. Получим такую матрицу A:

1	$k+1$	...	$(m-1)k+1$
2	$k+2$	...	$(m-1)k+2$
...	...	...	...
k	$2k$	...	km

Пусть перестановка $\sigma_1 \in S_k$ действует на элементы первого столбца матрицы A. Также пусть $\sigma_2 \in S_k$ действует на элементы второго столбца (так как каждый элемент второго столбца представим в виде $k+i$, где $1 \leqslant i \leqslant k$, то будем считать, что результатом действия перестановки σ_2 на элемент $k+i$ будет $k+\sigma_2(i)$) и т. д.

Назовем значения $1, 2, ..., k$, входящие в первый столбец матрицы A, первым набором длины k, во второй столбец — вторым набором длины k и т. д. Назовем также значения $\sigma_1(1)$, $\sigma_2(k+1)$,..., $\sigma_m((m-1)k+1)$ — первыми номерами, значения $\sigma_1(2)$, $\sigma_2(k+2)$, ...,$\sigma_m((m-1)k+2)$ — вторыми номерами и т. д. Данные обозначения нам понадобятся в следующей лемме.

Лемма 1. Пусть V — подмногообразие в V_s над произвольным полем K. Также пусть имеется некоторый набор чисел $\alpha_\sigma \in K$, $\sigma \in S_d$, где d — некоторое положительное целое число, что для некоторого целого числа $m \geqslant 0$ в пространствах $W_{d,\lambda,n}(V)$, $\lambda \vdash d$ выполнены полилинейные тождества (с учетом замечания выше) вида

$$\sum_{\sigma_m \in S_d} ... \sum_{\sigma_1 \in S_d} \alpha_{\sigma_m} ... \alpha_{\sigma_1} ... \{y_1, y_2, x_{1\sigma_1(1)}, x_{2\sigma_2(1)}, ..., x_{m\sigma_m(1)}\} ... \tag{2.3}$$

$$...\{y_2, y_3, x_{1\sigma_1(2)}, x_{2\sigma_2(2)}, ..., x_{m\sigma_m(2)}\}...\{y_{2d-1}, y_{2d}, x_{1\sigma_1(d)}, x_{2\sigma_2(d)}, ..., x_{m\sigma_m(d)}\} = 0,$$

где у переменных $x_{i\sigma_i(j)}$ индекс i означает порядковый номер набора, а j — порядковый номер элемента в i-м наборе. Тогда

(i) существует такое целое число k, что в пространствах $W_{c,\lambda,n}(V)$, $\lambda \vdash c$, $c = d, d+1, ..., s-1$ будут выполнены все полилинейные тождества вида

$$\sum_{\sigma_k \in S_d} ... \sum_{\sigma_1 \in S_d} \alpha_{\sigma_k} ... \alpha_{\sigma_1} ... t_1 ... \{t_{i_1}, x_{1\sigma_1(1)}, x_{2\sigma_2(1)}, ..., x_{k\sigma_k(1)}\} ...$$

$$...\{t_{i_2}, x_{1\sigma_1(2)}, x_{2\sigma_2(2)}, ..., x_{k\sigma_k(2)}\}...\{t_{i_d}, x_{1\sigma_1(d)}, x_{2\sigma_2(d)}, ..., x_{k\sigma_k(d)}\}...t_c = 0,$$

где $t_1, ..., t_c$ — некоторые скобки $\{,\}$, содержащие не менее двух переменных;

(ii) если $\alpha_\sigma = (-1)^\sigma$, $\sigma \in S_d$, то существует такое целое $p \geqslant 0$, что в многообразии V выполнены все полилинейные тождества (с учетом замечания) вида

$$\sum_{\sigma_p \in S_d} ... \sum_{\sigma_1 \in S_d} (-1)^{\sigma_p} ... (-1)^{\sigma_1} ... \{y_1, y_2, x_{1\sigma_1(1)}, x_{2\sigma_2(1)}, ..., x_{p\sigma_p(1)}\} ... \tag{2.4}$$

$$...\{y_2, y_3, x_{1\sigma_1(2)}, x_{2\sigma_2(2)}, ..., x_{p\sigma_p(2)}\}...\{y_{2d-1}, y_{2d}, x_{1\sigma_1(d)}, x_{2\sigma_2(d)}, ..., x_{p\sigma_p(d)}\} = 0.$$

Доказательство. (i) Покажем, что если элемент v из $W_{c,\lambda,n}(V)$, $\lambda \vdash c$, $c = d, ..., s-1$, содержит $k = k(c,d)$ наборов длины d, то в пространстве $W_{c,\lambda,n}(V)$ выполнено такое тождество

$$\sum_{\sigma_k \in S_d} ... \sum_{\sigma_1 \in S_d} \alpha_{\sigma_k} ... \alpha_{\sigma_1} v = 0. \tag{2.5}$$

Если $c = d$, тогда тождества вида (2.5) следуют из тождества (2.3), причем $k(c,d) = m$. База индукции проверена.

Пусть $c \geqslant d+1$. Предположим, что существует такое целое число $k = k(c-1, d)$, что для элемента $v \in W_{c-1,\lambda,n}(V)$, содержащего не менее $k(c-1,d)$ наборов длины d, выполнено тождество (2.5) в $W_{c-1,\lambda,n}(V)$. Пусть $k(c,d)$ — достаточно большое число, значительно большее, чем $k(c-1,d)$, и элемент $v \in W_{c,\lambda,n}(V)$ содержит не менее $k(c,d)$ наборов длины d. Пусть $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$. Элемент v имеет следующий общий вид:

$$v = \{t_{11}, ..., t_{1\lambda_1}\} \cdot \{t_{21}, ..., t_{2\lambda_2}\} \cdot ... \cdot \{t_{k1}, ..., t_{k\lambda_k}\},$$

где t_{ij} — скобки $\{,\}$, каждая из которых содержит не менее двух переменных.

Пусть в элементе v наборы длины d, каждый из которых содержит не менее $k(c,d)$ элементов, проходят таким образом, что некоторая скобка $t_{i_1 j_1}$ содержит не менее $k(c,d)$ первых номеров, скобка $t_{i_2 j_2}$ содержит не менее $k(c,d)$ вторых номеров и т. д., скобка $t_{i_d j_d}$ содержит не менее $k(c,d)$ d-х номеров. При этом данные скобки являются попарно различными.

Если $\lambda = (n)$, то $v \in L(X)$, и доказательство в данном случае следует из леммы 1 работы [10]. Поэтому пусть для разбиения $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ числа c выполнено неравенство $k > 1$.

Так как $c > d$, то в элементе v найдется такая скобка $t = t_{ij}$, которая не содержит ни первых, ни вторых и т. д., ни d-х номеров:

$$v = ... \cdot \{t_{i1}, ..., t, ..., t_{i\lambda_i}\} ...$$

Для краткости записи передвинем скобку $\{t_{i1}, ..., t, ..., t_{i\lambda_i}\}$ на последнее место в элементе v, используя коммутативность операции $\cdot$, и запишем элемент v в виде

$$v = A \cdot \{q_1, ..., q_{j-1}, t, q_{j+1}, ..., q_h\},$$

где $h = \lambda_i$. Если в скобке $\{q_1, ..., t, ..., q_h\} = u$ ни один из элементов q_j, $j = 1, ..., h$, не содержит ни первых,..., ни d-х номеров, то к элементу A можно применить предположение индукции. Поэтому, не ограничивая общности, пусть хотя бы один из элементов q_j содержит не менее $k(c,d)$ первых номеров. Будем считать, что t является самой крайней слева скобкой в элементе u, которая не содержит ни первых и т. д., ни d-х номеров (иначе просто сделаем переобозначение). Применим индукцию по h к элементу u. Пусть $h = 2$. Тогда либо $u = \{q, t\}$, либо $u = \{t, q\}$, где скобка q содержит не менее $k(c,d)$ первых номеров.

В элементе $\{q, t\}$ будем передвигать t влево. Учитывая правило дифференцирования, будут получаться слагаемые вида $\{q', t', ...\}$, где в скобке q' содержится не менее $k(c-1,d)$ первых номеров, скобка t' содержит скобку t и некоторое количество первых номеров. Если в элементе $\{q', t', ...\}$ вне скобок q' и t' содержится не менее $k(c-1,d)$ первых номеров, то, обозначив $\{q', t'\}$ новой переменной, применим к элементу $A \cdot \{\{q', t'\}, ...\}$ предположение индукции по c. В противном случае в t' попадет не менее $k(c-1,d)$ первых номеров. Представим элемент $\{q', t', ...\}$ в виде линейной комбинации слагаемых вида $\{\widetilde{q}, \widetilde{t}\}$, где q' содержится в $\widetilde{q}$, t' — в $\widetilde{t}$. При этом

$$A \cdot \{\widetilde{q}, \widetilde{t}\} = \{A \cdot \widetilde{q}, \widetilde{t}\} - \{A, \widetilde{t}\} \cdot \widetilde{q}.$$

Применим к элементам $A \cdot \widetilde{q}$ и $\{A, \widetilde{t}\}$ предположение индукции по c. Если же $u = \{t, q\}$, то, применяя правило дифференцирования, представим данный элемент в виде линейной комбинации элементов вида $\{tf, q'g\}$, где скобка q' содержит не менее чем $k(c-1,d)$ первых номеров, f, g — многочлены от внутренних дифференцирований, состоящие из первых номеров. Если многочлен g содержит не менее $k(c-1,d)$ первых номеров, то, обозначив $\{tf,q'\}$ новой переменной, применим предположение индукции по c. Если же в многочлене g содержится менее $k(c-1,d)$ первых номеров, то их в многочлене f будет не менее чем $k(c-1,d)$. Поэтому в каждом из элементов $\widetilde{t}=tf$ и $\widetilde{g}=q'g$ будет не менее $k(c-1,d)$ первых номеров. Тогда

$$A\cdot\{\widetilde{t},\widetilde{q}\}=\{A\cdot\widetilde{t},\widetilde{q}\}-\{A,\widetilde{q}\}\cdot\widetilde{t}.$$

и, как и ранее, применяем предположение индукции по c, только к элементам $A\cdot\widetilde{t}$ и $\{A,\widetilde{q}\}$. Таким образом, база индукции по h при $h=2$ проверена.

Предположим, что для всех $r<h$ утверждение верно. Покажем для $r=h$.

Так как скобка t является самой крайней слева в элементе u, в которой не содержится ни первых,..., ни d-х номеров, то возможны следующие случаи.

1) $u=\{t,q_2,q_3,...\}$, где q_2 содержит (без ограничения общности) не менее $k(c,d)$ первых номеров. Применяя правило дифференцирования, представим u в виде линейной комбинации слагаемых вида

$$\{tf,q_2'g,q_3,...\},$$

где скобка q_2' содержит не менее чем $k(c-1,d)$ первых номеров, f, g — многочлены от внутренних дифференцирований, состоящие из первых номеров. Как и ранее, либо в многочлене f, либо в многочлене в g содержится не менее $k(c-1,d)$ первых номеров. Если их менее $k(c-1,d)$ в многочлене g, то применим предположение индукции по c. В противном же случае в каждом из элементов $\widetilde{t}=tf$ и $\widetilde{g}= =q_2'g$ будет не менее $k(c-1,d)$ первых номеров. В элементе $\{\widetilde{t},\widetilde{q},q_3,...\}$ будем передвигать скобку $\widetilde{q}$ вправо. При этом будут получаться элементы, каждый из которых принадлежит одному из следующих случаев;

1.1) $\{\widetilde{t},q_3,...,\widetilde{q}\}$. Тогда

$$A\cdot\{\widetilde{t},q_3,...,\widetilde{q}\}=\{A\cdot\{\widetilde{t},q_3,...\},\widetilde{q}\}-\{A,\widetilde{q}\}\cdot\{\widetilde{t},q_3,...\}.$$

К элементу $A\cdot\{\widetilde{t},q_3,...\}$ применим предположение индукции по c, а к элементу $\{\widetilde{t},q_3,...\}$ — по h. При этом, так как $\widetilde{q}$ содержит необходимое количество первых номеров, то можно считать, что $\widetilde{t}$ в элементе $\{\widetilde{t},q_3,...\}$ не содержит ни первых,..., ни d-х номеров;

1.2) $\{\widetilde{t},...,\{q_i,\widetilde{q}\},...\}$. Если q_i не содержит ни первых,..., ни d-х номеров, то применим к этому элементу предположение индукции по c. Поэтому пусть в элементе q_i не менее $k(c,d)$ вторых номеров. В этом случае можно считать, что $\widetilde{q}$ не содержит ни первых,..., ни d-х номеров (те первые номера, которые она содержит, уже не понадобятся, необходимое количество первых номеров имеется в $\widetilde{t}$). В скобке $\{q_i,\widetilde{q}\}$ будем передвигать $\widetilde{q}$ влево. При этом будут получаться слагаемые вида $\{\widetilde{t},...,\{q_i',q',...\},...\}$, где скобка q_i' содержит не менее $k(c-1,d)$ вторых номеров, а q' содержит $\widetilde{q}$ и некоторое количество вторых номеров. Если вне скобок q_i' и q' содержится не менее $k(c-1,d)$ вторых номеров, то применим предположение индукции по c. В противном случае скобка q' содержит не менее $k(c-1,d)$ вторых номеров. Элемент $\{\widetilde{t},...,\{q_i',q',...\},...\}$ представим в виде линейной комбинации элементов вида $\{\widetilde{t},...,q_i',q',...\}$ и элементов вида $\{\widetilde{t},...,q',q_i',...\}$. В элементе $\{\widetilde{t},...,q_i',q',...\}$ будем двигать вправо скобку q', а в элементе $\{\widetilde{t},...,q',q_i',...\}$ — q_i'. Через конечное количество таких преобразований мы либо будем попадать в случай 1.1, либо в предположение индукции по c;

2) $u=\{t,q_2,q_3,...\}$, где скобка q_2 не содержит ни первых,..., ни d-х номеров. Пусть q_j — самая крайняя слева скобка, которая содержит не менее $k(c,d)$ неко-

торых номеров. Переобозначив через t скобку $\{t, q_1, ..., q_{j-1}\}$, попадем в ранее рассмотренный случай 1;

3) $u = \{q_2, ..., t, ...\}$. В данном элементе будем передвигать скобку t влево. Когда t окажется на втором месте в элементе u, то в скобке $\{q_2, t\}$ будем перемещать t влево, получая при этом слагаемые вида $\{q_2', t'...\}$, где скобка q_2' содержит не менее $k(c-1, d)$ первых номеров, а t' содержит t и некоторое количество первых номеров. Если в скобке $\{q_2', t'...\}$ вне q_2' и t' не менее $k(c-1, d)$ первых номеров, то применим предположение индукции по c. Иначе в каждой из скобок q_2' и t' не менее $k(c-1, d)$ первых номеров. В элементе $\{q_2', t', ...\}$ будем передвигать вправо скобку t' и при этом будем попадать в ранее разобранные случаи.

С элементами же вида $\{q_2, ..., \{q_i, t\}, ...\}$ поступим следующим образом. Так как t — самая крайняя слева скобка, не содержащая ни первых,..., ни d-х номеров, то в скобке q_i содержится не менее $k(c, d)$ некоторых номеров (без ограничения общности, будем считать, что первых номеров). В скобке $\{q_i, t\}$ будем передвигать скобку t влево. При этом будут получаться слагаемые вида $\{q_2, ..., \{q_i', t', ...\}, ...\}$, где в скобке q_i' содержится не менее $k(c-1, d)$ первых номеров, а скобка t' содержит t и некоторое количество первых номеров. Если в скобке $\{q_i', t', ...\}$ вне скобок q_i' и t' содержится не менее $k(c-1, d)$, то применим предположение индукции по c. В противном случае в t' попадет не менее $k(c-1, d)$ первых номеров. Представим элемент $\{q_2, ..., \{q_i', t', ...\}, ...\}$ в виде линейной комбинации элементов вида $\{q_2, ..., q_i', t', ...\}$ и элементов вида $\{q_2, ..., t', q_i', ...\}$. В элементах вида $\{q_2, ..., q_i', t', ...\}$ будем передвигать вправо скобку t', а в элементе $\{q_2, ..., t', q_i', ...\}$ — q_i'. При этом будем попадать в ранее разобранные случаи.

(ii) Данный случай является частным случаем (i). Лемма доказана.

3. Экспоненты некоторых многообразий алгебр Лейбница — Пуассона

Лемма 2. Пусть V — подмногообразие в V_s над произвольным полем K и d — некоторое положительное целое число. Также пусть имеется некоторый набор чисел $\alpha_\sigma \in K$, $\sigma \in S_d$, в котором найдется хотя бы один ненулевой элемент, что для некоторого целого числа $m \geqslant 0$ в пространствах $W_{d,\lambda,n}(V)$, $\lambda \vdash d$, выполнены все полилинейные тождества вида (2.3). Тогда $Exp(V) \leqslant d$

Доказательство следует из леммы 1 и теоремы 1 работы [9].

Лемма 3. Если выполнены все условия леммы 2, но тождества (2.3) выполнены в многообразии V, то $Exp(V) \leqslant d$.

Доказательство следует из леммы 2, так как если некоторое тождество выполнено в многообразии V, то данное тождество будет выполнено во всех пространствах вида $W_{c,\lambda,n}(V)$.

Лемма 4. Пусть $V \subseteq V_s$ над полем нулевой характеристики. Тогда если для некоторого целого d выполнено неравенство $Exp(V) \leqslant d$, то в многообразии V для некоторого целого p будут выполнены все полилинейные тождества вида (2.4).

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 7 работы [12].

Пусть $char\ K = 0$ и $\sigma \in S_n$, где S_n — симметрическая группа порядка n. Действие $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ естественным образом продолжается до автоморфизма свободной алгебры Лейбница — Пуассона $F(X)$. Пространство $P_n(V)$ становится при этом S_n-модулем. Исследование структуры $P_n(V)$ как S_n-модуля играет важную роль при изучении многообразия V. Модуль $P_n(V)$ является вполне приводимым, разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров имеет следующий вид:

$$\chi_n(V) = \chi(P_n(V)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(V)\chi_\lambda. \tag{3.1}$$

Теорема. Пусть V — многообразие алгебр Лейбница — Пуассона над полем нулевой характеристики, идеал тождеств которого для некоторого целого n содержит полилинейные тождества вида (2.1). Также пусть d — некоторое положительное целое число. Тогда следующие условия эквивалентны.

(i) $Exp(V) \leqslant d$;

(ii) $Exp^\Gamma(V) \leqslant d-1$;

(iii) найдется некоторый набор чисел $\alpha_\sigma \in K$, $\sigma \in S_d$, в котором содержится хотя бы один ненулевой элемент, что для некоторого целого числа $m \geqslant 0$ в многообразии V выполнены все тождества (с учетом замечания выше) вида

$$\sum_{\sigma_m \in S_d} ... \sum_{\sigma_1 \in S_d} \alpha_{\sigma_m} ... \alpha_{\sigma_1} ... \{y_1, y_2, x_{\sigma_1(1)}, x_{\sigma_2(1)}, ..., x_{\sigma_m(1)}\} ... \tag{3.2}$$

$$...\{y_2, y_3, x_{\sigma_1(2)}, x_{\sigma_2(2)}, ..., x_{\sigma_m(2)}\} ... \{y_{2d-1}, y_{2d}, x_{\sigma_1(d)}, x_{\sigma_2(d)}, ..., x_{\sigma_m(d)}\} = 0;$$

(iv) найдется такое целое $p \geqslant 0$, что в многообразии V выполнены все полилинейные тождества вида (2.4).

(v) существует такая константа C, что в сумме (3.1) $m_\lambda(V) = 0$ в случае, если выполнено условие $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_d) > C$.

Доказательство. Для начала заметим, что если в многообразии V выполнены тождества (2.1), то найдется такое s, что $V \subseteq V_s$ (лемма 2 работы [11]).

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ следует из предложения 4 работы [1].

$(iii) \Rightarrow (i)$ Если в многообразии V выполнены тождества вида (3.2), то в пространствах $W_{d,\lambda,n}(V)$, $\lambda \vdash d$, выполнены тождества вида (2.3). Поэтому из леммы 3 следует, что условие (iii) влечет (i).

$(iv) \Rightarrow (iii)$ очевидно.

$(i) \Rightarrow (iv)$ следует из леммы 4.

$(i) \Leftrightarrow$ (v) следует из теоремы 2 работы [9]. Теорема доказана.

Заметим, что тождества (3.2) не являются полилинейными при $m > 1$. Из данной теоремы следует, что если, например, идеал тождеств многообразия алгебр Лейбница — Пуассона V содержит тождества (2.1) и для некоторого m в многообразии V выполнены тождества

$$\{\{y_1, y_2, x_1^m\}, \{y_3, y_4, x_2^m\}, \{y_5, y_6, x_3^m\}\} = 0,$$
$$\{\{y_1, y_2, x_1^m\}, \{y_3, y_4, x_2^m\}\} \cdot \{y_5, y_6, x_3^m\} = 0,$$
$$\{y_1, y_2, x_1^m\} \cdot \{y_3, y_4, x_2^m\} \cdot \{y_5, y_6, x_3^m\} = 0,$$

то $Exp(V) \leqslant 3$.

Литература

[1] Рацеев С.М. Коммутативные алгебры Лейбница — Пуассона полиномиального роста // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2012. № 3/1(94). С. 54–65.

[2] Regev A. Existence of polynomial identities in $A \otimes B$// Bull. Amer. Math. Soc. 1971. № 6(77). P. 1067–1069.

[3] Giambruno A., Zaicev M.V. On codimention growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. 1998. V. 140. P. 145–155.

[4] Giambruno A., Zaicev M.V. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate // Adv. Math. 1999. V. 142. P. 221–243.

[5] Воличенко И.Б. Многообразие алгебр Ли с тождеством $[[x_1, x_2, x_3], [x_4, x_5, x_6]] = 0$ над полем характеристики нуль // Сиб. матем. журнал. 1984. № 3 (25). С. 40–54.

[6] Mishchenko S.P., Zaicev M.V. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent// Journal of Mathematical Sciences. 1999. № 6(93). P. 977–982.

[7] Рацеев С.М. О многообразиях алгебр Пуассона полиномиального роста// Алгебра и математическая логика: материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора В.В. Морозова. Казань: КФУ, 2011. С. 156–157.

[8] Рацеев С.М. О многообразии алгебр Пуассона с тождеством $\{x_1, x_2\} \times \times \{x_3, x_4\} = 0$ // Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов: тез. докл. 3 междунар. школы-конф. Тольятти, 2012. С. 43–45.

[9] Ratseev S.M. Growth of some varieties of Leibniz — Poisson algebras// Serdica Math. J. 2011. № 4(37). P. 331–340.

[10] Рацеев С.М. Оценки роста многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом// Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2010. № 4(78). С. 65–72.

[11] Рацеев С.М. Рост в алгебрах Пуассона // Алгебра и логика. 2011. № 1(50). С. 68–88.

[12] Рацеев С.М. Тождества в многообразиях, порожденных алгебрами верхнетреугольных матриц // Сибирский математический журнал. 2011. № 2(52). С. 416–429.

Поступила в редакцию 22/*III*/2013;
в окончательном варианте — 22/*III*/2013.

EXPONENTS OF SOME VARIETIES OF LEIBNIZ — POISSON ALGEBRAS

© 2013 S.M. Ratseev,[4] O.I. Cherevatenko[5]

In the paper equivalent conditions for the estimation of growth of varieties of Leibniz — Poisson algebras with nilpotent commutant are received.

Key words: Poisson algebra, Leibniz-Poisson algebra, variety of algebras, growth of a variety.

Paper received 22/*III*/2013.
Paper accepted 22/*III*/2013.

[4]Ratseev Sergey Mihailovich (`RatseevSM@mail.ru`), the Dept. of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.

[5]Cherevatenko Olga Ivanovna (`chai@pisem.net`), the Dept. of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, 432700, Russian Federation.