УДК 517.928.1

ТЕОРЕМА УСРЕДНЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ СКОРОСТЕЙ ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

© 2013 О.П. Филатов[2]

Доказано, что предел максимального среднего не зависит от начальных условий, если существует луч из выпуклой оболочки множества допустимых скоростей конечномерного пространства, координаты направляющего вектора которого независимы относительно спектра почти периодической функции. Множество допустимых скоростей — правая часть дифференциального включения. Предел вычисляется по всем решениям задачи Коши для дифференциального включения.

Ключевые слова: предел максимального среднего, теорема усреднения, дифференциальное включение, неограниченная правая часть, почти периодическая функция, независимые координаты направляющего вектора луча.

1. Основные сведения

Согласно классической теореме усреднения [1], пространственное среднее непрерывной 2π-периодической (по каждой координате) функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определяемое соотношением (годящимся и для почти периодической функции)

$$m(f) = \lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} f(y)\, dy, \quad y = (y_1, \ldots, y_n),$$

где $K(\Delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant y_j \leqslant \Delta, j = 1, \ldots, n\}$, совпадает с ее временным средним

$$m^*(f) = \lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(y_0 + t\omega)\, dt, \quad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n),$$

если координаты вектора ω независимы ($k_1\omega_1 + \cdots k_n\omega_n = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_n = 0$ для целочисленных $k_1, \ldots, k_n$). В частности, временное среднее не зависит от начального вектора $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Последнее утверждение полезно рассмотреть в более общей постановке.

Пусть дано дифференциальное включение

$$\dot{y} \in G, \quad y(0) = y_0, \tag{1.1}$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-97002-р_поволжье_а.

[2]Филатов Олег Павлович (filatov_oleg@samaradom.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

где непустое множество $G \subset \mathbb{R}^n$. Под решением задачи Коши понимается функция $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n, y(0) = y_0$, абсолютно непрерывная на любом отрезке $[0, \Delta], \Delta > 0$, производная которой $\dot{y}(t) = dy(t)/dt \in G$ почти всюду по $t \in [0, \infty)$.

Временное среднее заменим на предел максимального среднего

$$M(f) = \lim_{\Delta \to \infty} \sup_{y \in Y(y_0)} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(y(t))\, dt, \tag{1.2}$$

где $Y(y_0)$ — множество всех решений задачи (1.1).

Вопрос: при каких условиях $M(f)$ существует и не зависит от начального вектора $y_0 \in \mathbb{R}^n$?

Если множество допустимых скоростей $G \subset \mathbb{R}^n$ компактное и невырожденное (т. е. не содержится в подпространстве из $\mathbb{R}^n$ размерности $(n-1)$), то в [2] получен утвердительный ответ на этот вопрос для непрерывных почти периодических функций.

В [3] для вырожденного случая $G = \{\alpha\omega, \omega\}$, где постоянная $\alpha \in (0, 1]$, а вектор $\omega \in \mathbb{R}^n$ имеет независимые координаты, доказано, что $M(f)$ существует и не зависит от начального вектора в классе непрерывных (или хотя бы интегрируемых по Риману) периодических функций f. Заметим, что интегрируемый случай требует выполнения естественных дополнительных условий [3].

В работе [4] доказано, что если выпуклая оболочка компактного множества $G \subset \mathbb{R}^n$ содержит вектор $\omega \in \mathbb{R}^n$ с независимыми координатами относительно спектра $\Lambda(f)$ непрерывной почти периодической функции f (если $\Lambda_Q(f)$— линейная оболочка спектра над полем рациональных чисел Q, вектор $\lambda \in \Lambda_Q(f)$ и $\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n = 0 \Rightarrow \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$), то предел максимального среднего существует и не зависит от начального вектора $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

В [5] для *невырожденного* и неограниченного множества допустимых скоростей $G \subset \mathbb{R}^n$ и периодической функции f установлено, что если полупрямая $v_0 + l_0$, где $l_0 = \{x \in \mathbb{R}^n = t\omega, t \geqslant 0\}, v_0 \neq 0$, содержится в выпуклой оболочке множества G, а координаты вектора ω независимы, то $M(f)$ существует и совпадает с точной верхней гранью $f_{\sup}$ значений функции f.

В данной работе последний результат обобщается на случай, вообще говоря, вырожденного и неограниченного множества G, которое определяет набор допустимых скоростей в задаче (1.1), и непрерывной почти периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

2. Основной результат

Далее нам потребуется лемма из работы [4, лемма 4. 6], которая ниже формулируется в несколько измененном виде.

Лемма 2.1. Пусть для задачи (1.1) $G \subset \mathbb{R}^n$ и $co(G) = co\{\omega_1, \omega_2\}$, где $\omega_1 = \alpha\omega, \omega_2 = \omega, \alpha \in (0, 1]$, и координаты вектора ω независимы относительно спектра $\Lambda(f)$ тригонометрического многочлена f. Тогда предел максимального среднего

$$M^*(f, k) = m(f) + M^*(f_0, k), \quad f_0 = f - m(f),$$

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) \exp(i\langle \lambda, x \rangle), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{2.1}$$

где $\Lambda = \Lambda(f)$— конечное множество из $\mathbb{R}^n, i^2 = -1$, комплексная постоянная $c(\lambda) \neq 0$ для любого $\lambda \in \Lambda(f)$, $\langle \lambda, x \rangle = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, предел максимального среднего для функции f_0 вычисляется по формуле

$$M^*(f_0,k)=\sup_{c\geqslant 0}\varphi(c,k),\quad \varphi(c,k)=\frac{(k-1)m(f_0\chi_c^0)}{1+(k-1)m(\chi_c^0)},\quad k=1/\alpha, \tag{2.2}$$

здесь χ_c^0 — характеристическая функция множества $\{x\in\mathbb{R}^n : f_0(x)\geqslant c\}$.

Зафиксируем число $\delta>0$ и направляющий вектор $\omega\in\mathbb{R}^n$ луча $l_\delta(\omega)=\{x\in \in\mathbb{R}^n : x=t\omega,\ t\geqslant\delta\}$.

Теорема 2.1. Пусть вектор $\omega\in\mathbb{R}^n$ имеет независимые координаты относительно спектра непрерывной почти периодической функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, и для некоторого $\delta>0$ выполняется включение

$$l_\delta(\omega)\subset co(G) \tag{2.3}$$

для множества допустимых скоростей G дифференциального включения (1.1). Тогда предел максимального среднего $M(f)$ существует и $M(f)=f_{\sup}$.

Доказательство состоит из двух этапов. Сначала рассмотрим случай тригонометрического многочлена f (2.1).

В силу условия (2.3) воспользуемся леммой 2.1. Для этого введем обозначения

$$\omega_1=\delta\omega,\quad \omega_2=\omega_2(t)=t\omega,$$

где $t\geqslant\delta$. Тогда $\alpha=\delta/t, k=t/\delta$. Кроме того, пусть $c_0=(f_0)_{sup}=f_{sup}-m(f)$. Можно считать, что $c_0>0$, поэтому возьмем произвольное $\gamma\in(0,\min\{1,c_0/2\})$ и зафиксируем постоянную $c\in[c_*,c_0)$, где $c_*=c_0-\gamma$.

Так как $m(f_0\chi_c^0)\geqslant cm(\chi_c^0)$, то

$$\varphi(c,k)\geqslant\frac{(k-1)cm(\chi_c^0)}{1+(k-1)m(\chi_c^0)}=\frac{c}{1+(m(\chi_c^0)(k-1))^{-1}}.$$

Положим $k_0=k_0(\gamma)=1+c_*/(\gamma m(\chi_{c_*}^0))$. Так как $\gamma\in(0,c_*)$, то при $k\geqslant k_0$ получим оценку

$$\varphi(c_*,k)\geqslant c_*/(1+\gamma/c_*)\geqslant c_*(1-\gamma/c_*)=c_*-\gamma=c_0-2\gamma.$$

Тем более

$$M^*(f_0,k)=\sup_{c\geqslant 0}\varphi(c,k)\geqslant c_0-2\gamma,\quad k\geqslant k_0(\gamma).$$

Поскольку $M^*(f_0,k)\leqslant c_0$, то при $k\geqslant k_0(\gamma)$ выполняются неравенства

$$c_0-2\gamma\leqslant M^*(f_0,k)\leqslant c_0.$$

Следовательно, $f_{\sup}-2\gamma\leqslant M^*(f,k)\leqslant f_{\sup}$. Так как $f_{\sup}\geqslant M(f)\geqslant M^*(f,k)$ для любого $k=k(t)$, то

$$f_{\sup}-2\gamma\leqslant M(f)\leqslant f_{\sup}.$$

Переходя к пределу при $\gamma\to 0$, получим $M(f)=f_{\sup}$, поэтому для тригонометрических многочленов теорема верна.

В общем случае для произвольного $\varepsilon>0$ по известной теореме об аппроксимации для почти периодической функции f подберем тригонометрический многочлен P, чтобы выполнялись соотношения

$$P\leqslant f,\quad f-P\leqslant\varepsilon. \tag{2.4}$$

В частности,

$$P_{\sup}=f_{\sup}-\varepsilon_P,\quad \varepsilon_P\in[0,\varepsilon]. \tag{2.5}$$

Используя обозначения, введенные на первом этапе доказательства, для фиксированного $k = t/\delta$ вычислим пределы максимальных средних $M^*(P,k), M^*(f,k)$ для дифференциального включения

$$\dot{y} \in \{\omega_1, \omega_2\}, \quad y(0) = y_0.$$

С учетом (2.4) получим

$$M^*(P,k) \leqslant M^*(f,k), \quad 0 \leqslant M^*(f,k) - M^*(P,k) \leqslant \varepsilon. \tag{2.6}$$

Если $k \geqslant k_0(\varepsilon)$, то при $k \geqslant k_0$, как было установлено на первом этапе доказательства, с учетом (2.5) выполняются соотношения

$$M^*(P,k) \geqslant P_{\sup} - \varepsilon = f_{\sup} - \varepsilon_P - \varepsilon.$$

Отсюда и из (2.6) получим оценки

$$f_{\sup} - 2\varepsilon \leqslant M^*(f,k) \leqslant f_{\sup},$$

если $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. Поскольку $f_{\sup} \geqslant M(f) \geqslant M^*(f,k)$,то $f_{\sup} - 2\varepsilon \leqslant M(f) \leqslant f_{\sup}$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим $M(f) = f_{\sup}$. Теорема доказана.

Заметим, что для данной почти периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ почти любой (в смысле меры Лебега) вектор $\omega \in \mathbb{R}^n$ имеет независимые координаты относительно спектра функции.

Литература

[1] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1989. 472 с.

[2] Филатов О.П. Существование пределов максимальных средних // Математические заметки. 2000. Т. 67. Вып. 3. С. 433–440.

[3] Филатов О.П. Теорема об усреднении для неопределенных условно-периодических движений // Математические заметки. 2011. Т. 90. Вып. 2. С. 318–320.

[4] Филатов О.П. Теорема усреднения для почти периодических функций// Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2012. № 6(97). С. 100–112.

[5] Филатов О.П. Принцип максимума для почти периодических функций в задачах вычисления пределов максимальных средних // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2009: материалы научной конференции, Санкт-Петербург, 13–18 апреля 2009 г. СПб.: БАН, 2009. С. 111–117.

Поступила в редакцию 24/I/2013;
в окончательном варианте — 24/I/2013.

THE THEOREM OF AVERAGING IN THE CONDITION OF UNLIMETED SPEED FOR ALMOST-PERIODIC FUNCTIONS

© 2013 O.P. Filatov[3]

It is proved that the limit of maximal mean is an independent variable of initial conditions if an axis exists from the convex hull of a set of permitted speeds out of a finite-dimensional space and the components of direction vector of the axis are the independent variables with respect to a spectrum of almost-periodic function. The set of permitted speeds is the right hand of differential inclusion. The limit of maximal mean is taken over all solutions of the Couchy problem for the differential inclusion.

Key words: limit of maximal mean, theorem of average, differential inclusion, unlimited right side, almost-periodic function, independent components of direction vector of the axis.

Paper received 24/*I*/2013.
Paper accepted 24/*I*/2013.

[3]Filatov Oleg Pavlovich (`filatov_oleg@samaradom.ru`), the Dept. of Mathematics and Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.