

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ, ИМЕЮЩЕЙ ОСЕВОЕ И ОКРУЖНОЕ ТЕЧЕНИЕ¹

© 2012 С.А. Бочкарев, В.П. Матвеевко²

Работа посвящена анализу устойчивости вращающихся цилиндрических оболочек, взаимодействующих с текущей и вращающейся внутри них жидкостью. Результаты решения задачи, выполненной с применением метода конечных элементов, представлены для оболочек с различными граничными условиями. Установлено, что при воздействии жидкости, имеющей как осевую, так и окружную компоненту скорости, вид потери устойчивости вращающейся оболочки зависит от типа граничных условий, задаваемых на ее торцах. Показано, что для разных вариантов граничных условий совместное вращение оболочки и жидкости приводит к возрастанию или убыванию критической скорости осевого течения жидкости.

Ключевые слова: классическая теория оболочек, вращающаяся оболочка, сжимаемая потенциальная жидкость с осевым и окружным течением, метод конечных элементов, устойчивость.

Введение

Анализ динамического поведения упругих как вращающихся, так и неподвижных оболочек, взаимодействующих с текущей и вращающейся средой, представлен в [1–6]. В [1; 2] рассматриваются собственные колебания и устойчивость вращающихся цилиндрических оболочек, внутри которых находится текущая жидкость (газ), которая также вращается с той же угловой скоростью, что и оболочка. В [1] используется линейная теория оболочек Доннела, а уравнения движения для невязкой и несжимаемой жидкости записываются в форме Эйлера. Здесь установлено, что вращение оболочки и жидкости приводит к снижению критической скорости потока по сравнению с вариантом, когда их вращение не принимается во внимание. В [2] аэродинамическое давление определяется с помощью линеаризованной потенциальной теории и отмечается, что течение газа оказывает незначительное влияние на собственные колебания оболочки, вращающейся вместе с газом.

Анализ неподвижной оболочки, взаимодействующей с вращающейся жидкостью, которая имеет или не имеет осевую составляющую скорости, рассмот-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09–01–00520).

²Бочкарев Сергей Аркадьевич (bochkarev@icmm.ru), Матвеевко Валерий Павлович (mvp@icmm.ru), Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, 614013, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Акад. Королева, 1.

рен в [3; 4]. В [3] в рамках линейной теории оболочек Сандерса анализируется распространение гармонических волн в тонкостенных круговых цилиндрических оболочках, выполненных из ортотропных или изотропных материалов. Уравнения движения для жидкости принимаются в том же виде, что и в [1]. Показано, что для рассмотренных конфигураций течение жидкости оказывает более сильное влияние на собственные частоты колебаний оболочки с жидкостью, чем только вращение жидкости. Аналогичный подход был использован в [4], где показано, что вращение жидкости приводит к чрезмерному снижению критической скорости течения жидкости по сравнению с вариантом, когда вращение жидкости не принимается во внимание.

Анализ динамического поведения упругих цилиндрических оболочек вращения, взаимодействующих с кольцевым потоком сжимаемого газа, имеющим как осевую, так и тангенциальную составляющие скорости, рассматривался в [5; 6]. Здесь на основе аналитических методов рассмотрены бесконечно длинные цилиндрические оболочки, помещенные в кольцевой канал с жесткой наружной стенкой. В [5] численные результаты приведены для частного случая, при котором оболочка обтекается потоком газа, имеющим только тангенциальную составляющую скорости. Показано, что при слиянии волн, распространяющихся в прямом и обратном направлении, может возникнуть потеря устойчивости в виде флаттера типа бегущей волны. В [6] представлены результаты расчетов с обеими компонентами скорости, но без исследования взаимовлияния осевой и тангенциальной составляющей на устойчивость. Отметим, что в [5] приведена общая постановка задачи, которая допускает, что внутренняя оболочка также может вращаться, однако результаты исследований влияния вращения оболочки на характер динамического поведения системы не представлены.

В [7] полученные в [1; 4] выводы были поставлены под сомнение. Было обнаружено, что в рамках используемого в [1] аналитического решения задачи математически невозможно получить неустойчивое состояние системы, когда наряду с осевым течением жидкости в качестве дестабилизирующего механизма учитывается совместное вращение оболочки и жидкости. На основании этого авторы [7] задаются вопросом о физическом смысле возникших математических трудностей, предполагая невозможность потери устойчивости в таких случаях, даже когда она представляется физически разумной. В недавно опубликованной работе [8] этот анализ был продолжен. Показано, что при определенных скоростях углового вращения оболочки вместе с жидкостью и осевого течения жидкости возможно образование зон, где жидкость является неподвижной. Каким образом это явление может оказывать влияние на устойчивость оболочки с жидкостью, не установлено. Отметим также, что в работах [1; 2; 7; 8] при описании вращающейся оболочки не учитываются начальные окружные усилия, вызванные центробежными силами.

В перечисленных выше работах рассмотрены бесконечно длинные оболочки, и, следовательно, влияние граничных условий для вращающихся оболочек, содержащих осевую и окружную компоненту скорости жидкости, является не изученным. Таким образом, целью настоящей работы является, во-первых, установить непосредственную возможность потери устойчивости вращающейся оболочки конечной длины, взаимодействующей с текущей и вращающейся жидкостью, и, во-вторых, оценить влияние вида граничных условий, задаваемых на торцах оболочки, на характер ее динамического поведения.

1. Основные соотношения

Рассматривается упругая цилиндрическая оболочка длиной L , радиусом R и толщиной h . Оболочка является неподвижной или вращается относительно своей продольной оси с угловой скоростью Ω_s . Внутри оболочки находится идеальная сжимаемая жидкость, которая течет с осевой скоростью U и одновременно с этим вращается с угловой скоростью Ω_f , равной угловой скорости вращения оболочки. Требуется найти такую комбинацию осевой скорости жидкости и угловой скорости вращения оболочки и/или жидкости, при которой оболочка теряет устойчивость.

Для описания движения текущей и вращающейся жидкости в области V_f вводится в рассмотрение потенциал возмущения скорости ϕ , который в цилиндрической системе координат (r, θ, x) в случае малых возмущений описывается волновым уравнением [9]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 \phi &= \frac{2\Omega_f}{c} \left(M \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial t} \right) + \\ &+ \frac{\Omega_f^2}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где c — скорость звука в жидкости, $M = U/c$ — число Маха. На смоченной поверхности $S_\sigma = S_f \cap S_s$ давление потока жидкости p на оболочку вычисляется по линеаризованной формуле Бернулли

$$p = -\rho_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial s} + \Omega_f \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right). \quad (1.2)$$

Здесь: ρ_f — удельная плотность жидкости; s — меридиональная координата оболочки; S_f, S_s — поверхности, ограничивающие объемы жидкости и оболочки соответственно. На поверхности раздела "оболочка-жидкость" S_σ задается условием непроницаемости

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial s} + \Omega_f \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad (1.3)$$

где n — нормаль к поверхности, w — нормальная составляющая вектора перемещений оболочки. Потенциал возмущения скорости на входе в оболочку и выходе из нее подчиняется граничным условиям

$$x = 0 : \phi = 0, \quad x = L : \partial \phi / \partial x = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение в частных производных для потенциала возмущения скорости (1.1) с граничными условиями (1.3), (1.4) сводится с помощью метода Бубнова — Галеркина [10] к системе уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{m_f} \left[\int_{V_f} \left(\frac{\partial F_l}{\partial r} \frac{\partial F_k}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_l}{\partial \theta} \frac{\partial F_k}{\partial \theta} + [1 - M^2] \frac{\partial F_l}{\partial x} \frac{\partial F_k}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2\Omega_f M}{c} \frac{\partial^2 F_l}{\partial x \partial \theta} F_k + \frac{\Omega_f^2}{c^2} \left[\frac{\partial^2 F_l}{\partial \theta^2} F_k - r \frac{\partial F_l}{\partial r} F_k \right] \right) dV \right] \phi_{al} + \\ \left. + \sum_{l=1}^{m_f} \left[\int_{V_f} \left(\frac{2U}{c^2} \frac{\partial F_l}{\partial x} F_k + \frac{2\Omega_f}{c^2} \frac{\partial F_l}{\partial \theta} F_k \right) dV \dot{\phi}_{al} + \int_{V_f} \frac{F_l F_k}{c^2} dV \ddot{\phi}_{al} \right] - \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{p=1}^{m_s} \left[\int_{S_\sigma} \bar{N}_p F_k dS \dot{w}_{ap} + \int_{S_\sigma} \left(U \frac{\partial \bar{N}_p}{\partial s} F_k + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \Omega_f \frac{\partial \bar{N}_p}{\partial \theta} F_k \right) dS w_{ap} \right] = 0, \quad k = 1, m_f.
 \end{aligned}$$

Здесь m_f и m_s — число конечных элементов, на которые разбиваются области жидкости V_f и оболочки V_f , ϕ_{al} и w_{ap} — узловые значения потенциала возмущения скорости жидкости и нормальных перемещений оболочки; F и \bar{N} — функции формы для потенциала возмущения скорости и нормальной составляющей вектора перемещения оболочки.

Для классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява, компоненты вектора деформации в криволинейной системе координат (s, θ, z) могут быть записаны следующим образом [11]:

$$\varepsilon_{11} = E_{11} + zk_{11}, \quad \varepsilon_{22} = E_{22} + zk_{22}, \quad \varepsilon_{12} = E_{12} + zk_{12},$$

где

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= \varepsilon_1 + 1/2\theta_1^2, & k_{11} &= k_1, & (1 \Leftrightarrow 2), \\
 E_{12} &= \varepsilon_{12} + \theta_1\theta_2, & k_{12} &= 2\tau
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

и

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, & \theta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial s}, \\
 \theta_2 &= \frac{1}{R} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), & k_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, & k_2 &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\
 \tau &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right).
 \end{aligned}$$

Здесь: u, v — меридиональная и окружная составляющие вектора перемещений; θ_i — углы поворота недеформируемой нормали.

Компоненты оболочечных деформаций (1.6) в матричной форме можно представить в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_* + 1/2\mathbf{E}\mathbf{e},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \{E_{11}, E_{22}, E_{12}, k_{11}, k_{22}, k_{12}\}^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}_* = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, k_1, k_2, 2\tau\}^T$ — линейная часть деформации, $\mathbf{e} = \{0, 0, 0, 0, \theta_1, \theta_2, 0, 0, 0\}^T$, \mathbf{E} — матрица линейных множителей, которая имеет ненулевые компоненты $\mathbf{E}_{15} = \theta_1$, $\mathbf{E}_{16} = \theta_2$, $\mathbf{E}_{35} = \theta_2$, $\mathbf{E}_{36} = \theta_1$.

Соотношения упругости в матричном виде

$$\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_*.$$

Ненулевые элементы матрицы жесткостей \mathbf{D} для изотропного материала имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \nu D_{11} &= D_{12} = D_{21} = \nu D_{22} = \nu E h / (1 - \nu^2), & D_{33} h^2 / 12 &= D_{66} = G h^3 / 12, \\
 \nu D_{44} &= D_{45} = D_{54} = \nu D_{55} = \nu E h^2 / 12 / (1 - \nu^2).
 \end{aligned}$$

Здесь E, ν и G — модуль упругости, коэффициент Пуассона и модуль сдвига оболочки.

Энергия деформации оболочки с дополнительными слагаемыми, учитывающими предварительное нагружение,

$$2U = \int_{S_s} \boldsymbol{\varepsilon}_*^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_* dS + \int_{S_s} \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{e} dS. \quad (1.7)$$

Матрица начальных напряжений $\boldsymbol{\sigma}^0$, элементы которой находятся из условия $\mathbf{E}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_*^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{e}$, имеет ненулевые значения $\sigma_{55}^0 = T_{11}$, $\sigma_{66}^0 = T_{22}$.

Кинетическая энергия оболочки, вращающейся с угловой скоростью Ω_s [12],

$$2T = \int_{V_s} \rho_s \left(\dot{u}^2 + (\dot{v} - R\Omega_s - \Omega_s w)^2 + (\dot{w} + v\Omega_s)^2 \right) dV, \quad (1.8)$$

где ρ_s — удельная плотность материала оболочки.

Выражение для работы W , совершаемой гидродинамическими силами, записывается в виде

$$W = \int_{S_s} P_f w dS. \quad (1.9)$$

2. Численная реализация

Для численной реализации используется полуаналитический вариант метода конечных элементов, основанный на представлении решения в виде ряда Фурье по окружной координате θ :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{u}_j \cos j\theta + \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{u}_j \sin j\theta, \\ v &= \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{v}_j \sin j\theta - \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{v}_j \cos j\theta, \\ w &= \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{w}_j \cos j\theta + \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{w}_j \sin j\theta, \\ \phi_a &= \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\phi}_j \cos j\theta + \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{\phi}_j \sin j\theta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь j — номер гармоники.

Выражая в (2.1) симметричные и антисимметричные неизвестные через узловые перемещения, получим для конечных элементов оболочки и жидкости

$$\mathbf{U} = \{u, v, w\}^T = \mathbf{N} \mathbf{d}_e = [\widehat{\mathbf{N}} \widetilde{\mathbf{N}}] \left\{ \widehat{\mathbf{d}}_e \widetilde{\mathbf{d}}_e \right\}^T \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\phi}_a = \mathbf{F} \boldsymbol{\phi}_e = [\widehat{\mathbf{F}} \widetilde{\mathbf{F}}] \left\{ \widehat{\boldsymbol{\phi}}_e \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_e \right\}^T \quad (2.3)$$

Здесь \mathbf{N} и \mathbf{F} — матрицы функций формы, \mathbf{d}_e и $\boldsymbol{\phi}_e$ — векторы узловых перемещений. Для оболочки используется конечный элемент в виде усеченного конуса с аппроксимацией меридиональной и окружной компонент вектора перемещений линейным полиномом, а нормальной компоненты — кубическим полиномом. Для жидкости используется треугольный конечный элемент с линейной аппроксимацией потенциала возмущения скорости.

С учетом (2.2)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_* = \mathbf{B} \mathbf{d}_e, \quad \mathbf{e} = \mathbf{G} \boldsymbol{\phi}_e, \quad (2.4)$$

где \mathbf{B} и \mathbf{G} — матрицы связи деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_*$, \mathbf{e} с узловыми перемещениями.

Для вывода уравнений движения используем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\mathbf{d}}^T} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \mathbf{d}^T} = Q. \quad (2.5)$$

Здесь: $\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}$ — обобщенные перемещения и скорости; $\hat{L} = T - U$ — функция Лагранжа, $Q = \partial W / \partial \mathbf{d}^T$ — обобщенные силы. Используя (1.7)–(1.9), с учетом (2.2)–(2.4) получим из (2.5) систему уравнений, которая в матричном виде имеет вид

$$(\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_s^g - \mathbf{K}_s^c) \mathbf{d} + \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}_s^\omega \dot{\mathbf{d}} + \rho_f \left(\mathbf{C}_{sf} \dot{\phi}_a + \mathbf{A}_{sf} \phi_a + \mathbf{A}_{sf}^\omega \phi_a \right) = 0. \quad (2.6)$$

Здесь: $\mathbf{K}_s = \sum_{m_s S_s} \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS$ — матрица жесткости; $\mathbf{M}_s = \sum_{m_s S_s} \int \rho_0 \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS$ — матрица масс; $\mathbf{K}_s^g = \sum_{m_s S_s} \int \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{G} dS$ — матрица геометрической жесткости; $\mathbf{K}_s^c = \sum_{m_s S_s} \int \rho_0 \Omega_s^2 \mathbf{N}^T \Omega_1 \mathbf{N} dS$ — матрица влияния центробежных сил; $\mathbf{C}_s^\omega = \sum_{m_s S_s} \int 2\rho_0 \Omega_s \mathbf{N}^T \Omega_2 \mathbf{N} dS$ — матрица влияния сил Кориолиса; $\mathbf{C}_{sf} = \sum_{m_s S_\sigma} \int \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{F} dS$; $\mathbf{A}_{sf} = \sum_{m_s S_\sigma} \int U \bar{\mathbf{N}}^T \partial \mathbf{F} / \partial s dS$; $\mathbf{A}_{sf}^\omega = \sum_{m_s S_\sigma} \int \Omega_f \bar{\mathbf{N}}^T \partial \mathbf{F} / \partial \theta dS$; $\rho_0 = \int_h \rho_s dz$; $\Omega_{1\ 23} = -1, \Omega_{1\ 32} = 1; \Omega_{2\ 22} = \Omega_{2\ 33} = 1$; матрицы и векторы с верхним индексом "0" определяются из решения осесимметричной статической задачи $\mathbf{K}_s \mathbf{d} = \mathbf{F}$, где $\mathbf{f} = \{ 0 \ 0 \ \rho_0 R \Omega_s^2 \}^T$.

Уравнение (1.5) в матричном виде с учетом представлений (2.2)–(2.3) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_f^\omega + \mathbf{A}_f^c + \mathbf{A}_f^{c\omega}) \phi_a + \mathbf{M}_f \ddot{\phi}_a - (\mathbf{C}_f^c + \mathbf{C}_f^\omega) \dot{\phi}_a - \\ & - \mathbf{C}_{fs} \dot{\mathbf{w}}_a - (\mathbf{A}_{fs} + \mathbf{A}_{fs}^\omega) \mathbf{w}_a = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_f &= \sum_{m_f V_f} \int \left(\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dV, \quad \mathbf{M}_f = \sum_{m_f V_f} \int \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}{c^2} dV, \\ \mathbf{K}_f^\omega &= \sum_{m_f V_f} \int \frac{\Omega_f^2}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{F}^T}{\partial \theta^2} \mathbf{F} - r \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial r} \mathbf{F} \right] dV, \quad \mathbf{C}_f^\omega = - \sum_{m_f V_f} \int \frac{2\Omega_f}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \theta} \mathbf{F} dV, \\ \mathbf{A}_f^c &= - \sum_{m_f V_f} \int M^2 \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} dV, \quad \mathbf{A}_f^\omega = \sum_{m_f V_f} \int 2\Omega_f \frac{M}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{F}^T}{\partial x \partial \theta} \mathbf{F} dS, \\ \mathbf{C}_f^c &= \sum_{m_f V_f} \int \frac{2U}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \mathbf{F} dV, \quad \mathbf{C}_{fs} = - \sum_{m_s S_\sigma} \int \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{N}} dS, \\ \mathbf{A}_{fs}^\omega &= \sum_{m_s S_\sigma} \int \Omega_f \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^T}{\partial \theta} \mathbf{F} dS, \quad \mathbf{A}_{fs} = - \sum_{m_s S_\sigma} \int U \mathbf{F}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial s} dS. \end{aligned}$$

Таким образом, анализ вращающейся оболочки, внутри которой течет и вращается сжимаемая жидкость, сводится к совместному решению двух систем уравнений (2.6) и (2.7). Объединенная система уравнений может быть записана следующим образом:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{A}) \{ \mathbf{d} \ \phi_a \}^T + \mathbf{M} \{ \ddot{\mathbf{d}} \ \ddot{\phi}_a \}^T + \mathbf{C} \{ \dot{\mathbf{d}} \ \dot{\phi}_a \}^T = 0, \quad (2.8)$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_s^g - \mathbf{K}_s^c & 0 \\ 0 & -\rho_f (\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_f^\omega) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & -\rho_f \mathbf{M}_f \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \rho_f \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s^\omega & \mathbf{C}_{sf} \\ \mathbf{C}_{fs} & \mathbf{C}_f^c + \mathbf{C}_f^\omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \rho_f \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{sf} + \mathbf{A}_{sf}^\omega \\ \mathbf{A}_{fs} + \mathbf{A}_{fs}^\omega & \mathbf{A}_f^c + \mathbf{A}_f^\omega \end{bmatrix}.$$

Представляя возмущенное движение оболочки и жидкости в виде

$$\mathbf{d} = \mathbf{q} \exp(i^* \lambda t), \quad \phi_a = \phi \exp(i^* \lambda t),$$

где \mathbf{q} , ϕ — некоторые функции координат, $i^* = \sqrt{-1}$, а $\lambda = \lambda_1 + i^* \lambda_2$ — характеристический показатель, окончательно получим

$$(\mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M} + i^* \lambda \mathbf{C} + \mathbf{A}) \{ \mathbf{q} \ \phi \}^T = 0. \quad (2.9)$$

Решение задачи сводится к вычислению и анализу собственных значений λ системы (2.9). Для вычисления комплексных собственных значений применяется алгоритм на основе метода Мюллера [13]. Для повышения вычислительной эффективности алгоритма использовалась перенумерация степеней свободы системы (2.9), основанная на обратном алгоритме Катхилла-Макки [14].

3. Примеры численной реализации

В численных примерах рассматривается цилиндрическая оболочка ($E = 2 \times 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0,29$, $\rho_s = 7812$ кг/м³, $R = 1$ м, $h = 0,01$ м, $L/R = 4$, $j = 4$), внутри которой течет и вращается несжимаемая жидкость ($\rho_f = 10^3$ кг/м³). Все расчеты были выполнены при 40 элементах для оболочки и 1000 — для жидкости.

Перед тем как рассматривать влияние комбинированного воздействия окружающей и осевой компонент скорости жидкости на характер динамического поведения стационарной или вращающейся оболочки, имеет смысл представить воздействие каждой из компонент по отдельности. Как осевое течение жидкости, так и ее окружное вращение оказывают дестабилизирующее влияние на упругое тело. При этом механизмы потери устойчивости различны и могут иметь как статический характер (дивергенция), так и динамический характер (флаттер). Флаттер может быть также двух видов.

В случае только осевого течения жидкости характер потери устойчивости зависит от вида граничных условий. Оболочки, жестко защемленные или свободно опертые с двух торцов, теряют устойчивость в виде дивергенции, как это показано на рис. 1, а. Здесь приведены зависимости действительных λ_1 и мнимых λ_2 (здесь и далее отмечено точками) частей трех первых собственных значений от осевой скорости жидкости U (m — число полуволн в меридиональном направлении). При увеличении скорости течения жидкости собственные значения уменьшаются до тех пор, пока действительная часть первой моды при скорости $U_D = 221,17$ м/с не станет равной нулю. При этом у этого собственного значения появляется пара одинаковых, но противоположных по знаку мнимых частей, что и означает наступление потери устойчивости в виде дивергенции.

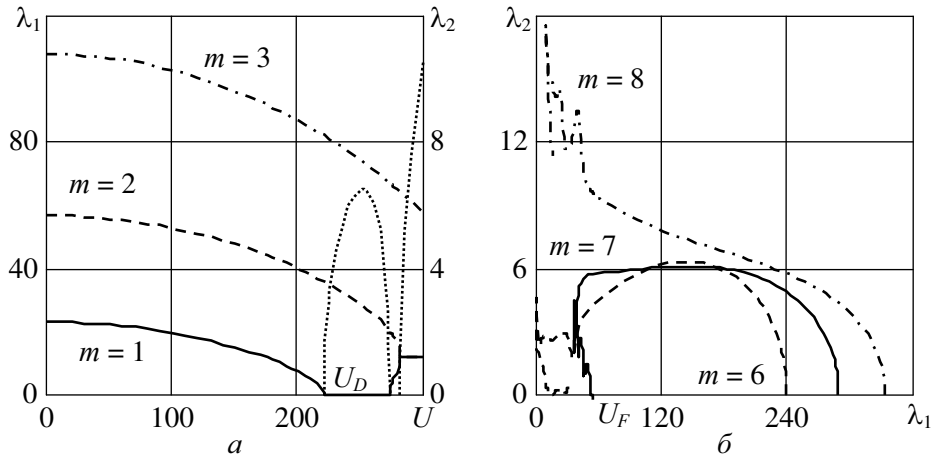


Рис. 1. Зависимости действительных и мнимых частей (а) и годографы (б) собственных значений λ (Гц) от осевой скорости течения жидкости U (м/с): а — оболочка, свободно опертая на обоих торцах; б — консольно закрепленная оболочка

Оболочки, защемленные на торце, где входит поток, и свободные на другом, теряют устойчивость в виде флаттера по одной форме колебаний. Это демонстрируется на рис. 1, б. Здесь на комплексной плоскости показаны годографы трех собственных значений, полученные при различных значениях осевой скорости жидкости U . Начиная со скорости $U > 380$ м/с изменения мнимых частей собственных значений носят существенно не монотонный характер. При скорости $U_F = 478,38$ м/с мнимая часть седьмой моды становится отрицательной. Это соответствует потере устойчивости в виде флаттера по одной форме колебаний.

В случае углового вращения оболочки или жидкости происходит расщепление собственной частоты на два значения, что соответствует появлению прямой и обратной волны. На рис. 2 показано изменение действительных и мнимых частей двух первых собственных значений λ (Гц) от скорости вращения жидкости Ω_f (об/с) для оболочек с разными граничными условиями. Возрастание скорости вращения жидкости приводит к увеличению собственных значений, соответствующих прямым волнам (показаны сплошной линией) и уменьшению собственных значений, соответствующих обратным волнам (штриховая линия). При определенной скорости вращения действительная часть обратной волны первой моды становится равной нулю и при дальнейшем увеличении скорости вращения она начинает возрастать. Действительные части обеих волн первой моды сливаются при скорости вращения Ω_F . При этом происходит появление одинаковых и противоположных по знаку мнимых частей, что характеризует наступление потери устойчивости в виде флаттера по двум формам колебаний. Одинаковая картина потери устойчивости имеет место при анализе оболочек с разными граничными условиями.

На рис. 3 представлена зависимость действительных частей двух первых собственных значений λ (Гц) от скорости вращения Ω (об/с) для варианта расчета, когда оболочка и жидкость внутри нее вращаются с одной скоростью $\Omega = \Omega_f = \Omega_s$. Учет вращения оболочки не оказывает существенного влияния на собственные значения при малых скоростях вращения, но с увеличением скорости вра-

щения собственные значения оболочек с разными граничными условиями изменяются таким образом, что потеря устойчивости не осуществляется. Как показано в [15], стабилизирующую роль при совместном вращении оболочки с жидкостью играют начальные окружные усилия, вызванные центробежными силами.

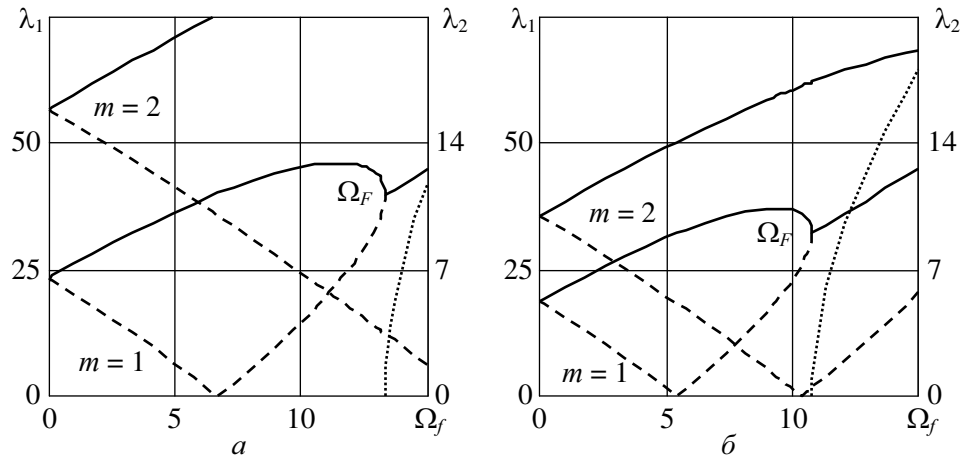


Рис. 2. Зависимость действительных λ_1 и мнимых λ_2 частей собственных значений (Гц) от скорости вращения жидкости Ω_f (об/с):
 a — оболочка, свободно опертая на обоих торцах; b — консольно закрепленная оболочка

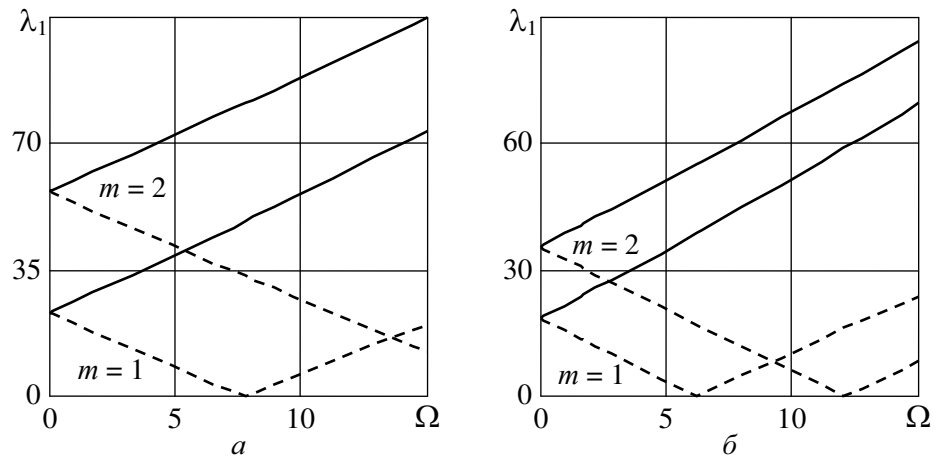


Рис. 3. Зависимость действительных частей собственных значений λ (Гц) от скорости вращения оболочки с жидкостью $\Omega (= \Omega_s = \Omega_f, \text{ об/с})$:
 a — оболочка, свободно опертая на обоих торцах; b — консольно закрепленная оболочка

Так как предельная скорость совместного углового вращения оболочки и жидкости будет определяться только пределом прочности материала оболочки, то далее в расчетах рассматриваются такие угловые скорости вращения, при которых

величина нормального отклонения от действия центробежной нагрузки находится в пределах толщины оболочки или несколько превышает ее.

При совместном воздействии осевого течения жидкости и углового вращения оболочки и жидкости, осуществляемого с одной и той же скоростью, потеря устойчивости также имеет место, и вид ее определяется граничными условиями. Это демонстрируется результатами, представленными на рис. 4. Здесь показаны зависимости собственных значений оболочек вращающихся совместно с расположенной в них жидкостью со скоростью $\Omega_s = \Omega_f = 100$ рад/с от осевой скорости жидкости U . Здесь, как и ранее, пунктирной линией обозначены собственные значения, соответствующие обратным волнам, и сплошной линией — прямым волнам.

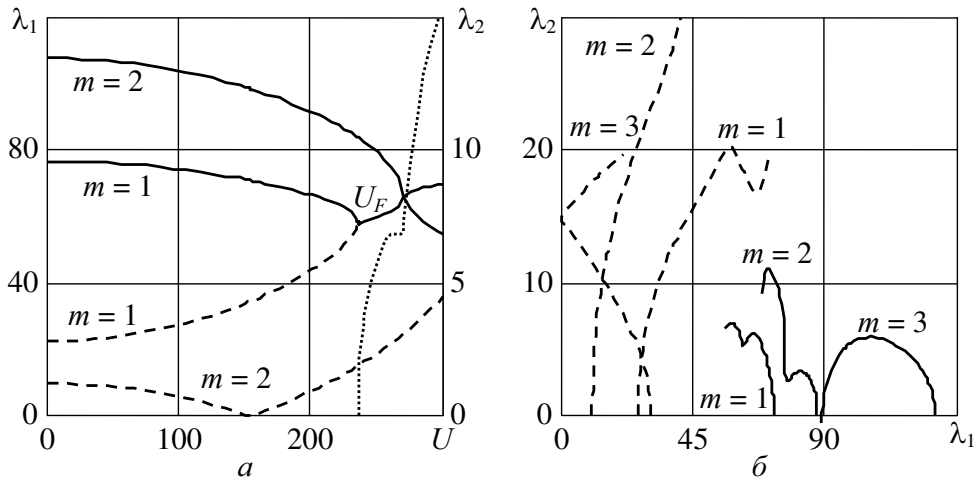


Рис. 4. Зависимости действительных и мнимых частей (а) и годографы (б) собственных значений λ (Гц) от осевой скорости течения жидкости U (м/с) ($\Omega_s = \Omega_f = 100$ рад/с):

a — оболочка, свободно опертая на обоих торцах; b — консольно закрепленная оболочка

Как видно из рис. 4, a для оболочек, свободно опертых с двух торцов (как и жестко закрепленных), наличие совместного углового вращения оболочки и жидкости приводит к смене вида потери устойчивости, которая теперь имеет вид флаттера по двум формам колебаний. При этом критическая скорость течения жидкости, при которой осуществляется потеря устойчивости, теперь составляет $U = 235,84$ м/с, а наиболее сильное различие в картине потери устойчивости по сравнению с той, которая получена в случае вращения только одной жидкости (рис. 2, a), имеет место в поведении мнимых частей. Для консольно закрепленных оболочек учет углового вращения оболочки и жидкости не влияет на вид потери устойчивости, которая по-прежнему происходит в виде флаттера по одной форме колебаний (рис. 4, b). Но в отличие от стационарной оболочки потеря устойчивости происходит при более низких значениях осевой скорости течения жидкости $U = 319,14$ м/с и моде колебаний $m = 3$, а поведение мнимых частей является более монотонным.

Из представленных результатов следует, что для разных вариантов граничных условий совместное вращение оболочки и жидкости приводит к возрастанию

или убыванию критической скорости осевого течения жидкости. Более детально это представлено на рис. 5. Здесь показаны границы устойчивости, полученные при совместном воздействии осевого течения U и углового вращения оболочки и жидкости Ω . Если для оболочек, свободно опертых с двух торцов, увеличение угловой скорости вращения оболочки и жидкости приводит к возрастанию критического значения осевой скорости течения жидкости (кривая SSI на рис. 5, а), то для консольно закрепленных оболочек, наоборот, к убыванию (кривая CFI на рис. 5, б).

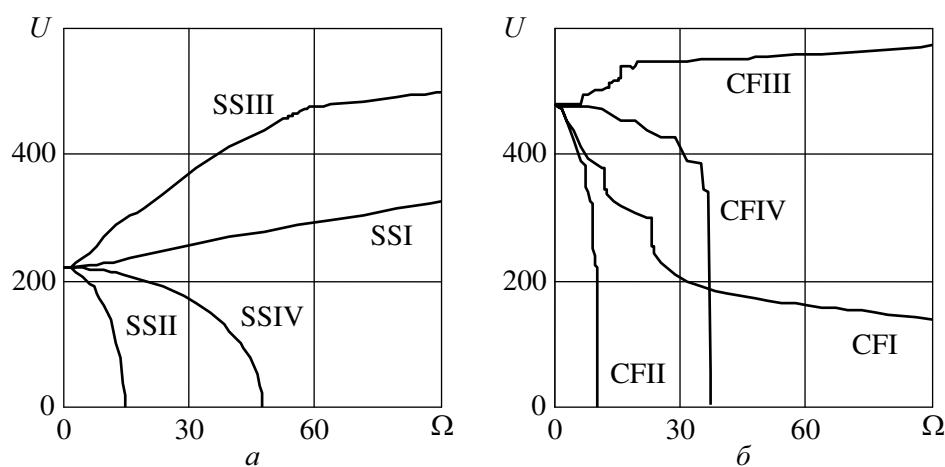


Рис. 5. Диаграммы устойчивости при совместном воздействии осевого течения U (м/с) и различных вариантов учета углового вращения оболочки Ω_s и жидкости Ω_f (об/с):

a — оболочка, свободно опертая на обоих торцах; b — консольно закрепленная оболочка

Таким образом, результаты, полученные для свободно опертых с двух торцов оболочек, противоречат данным, представленным в [1] для бесконечно длинных оболочек. Выше уже отмечалось, что в [1], как и в ряде других работ, начальные окружные усилия, вызванные центробежными силами, не принимались во внимание. Расчеты, выполненные при аналогичных условиях (кривые SSII и CFII на рис. 5, различие в вариантах расчетов представлено в таблице), демонстрируют, что в этом случае при любых граничных условиях увеличение скорости вращения оболочки с жидкостью приводит к резкому снижению критической осевой скорости течения.

Таблица

Вариант расчета	I	II	III	IV
Учет вращения жидкости	да	да	нет	нет
Учет начальных окружных усилий	да	нет	да	нет

На рис. 5 также приведены модельные расчеты, предполагающие отсутствие вращения жидкости. В этом случае для обоих типов граничных условий вращение только одной оболочки оказывает стабилизирующее влияние, и, следовательно, для вращающейся оболочки, точно так же, как и для стационарной оболочки (рис. 2), вращение жидкости оказывает дестабилизирующее влияние.

Оценить степень влияния угловой скорости вращения оболочки и жидкости на скорость осевого течения жидкости позволяют данные, представленные на рис. 6. Здесь показана зависимость полной критической скорости потока $\xi = (U^2 + R^2\Omega^2)^{0.5} / (U|_{\Omega=0})$ от отношения окружной скорости оболочки и жидкости к осевой скорости жидкости $\zeta = R\Omega/U$, полученная для разных вариантов расчета. Использование безразмерных величин и было предложено в [4]. Из представленных данных следует, что для консольно закрепленной оболочки возрастание угловой скорости вращения оболочки и жидкости наиболее сильно влияет на снижение полной критической скорости жидкости для всех вариантов расчета.

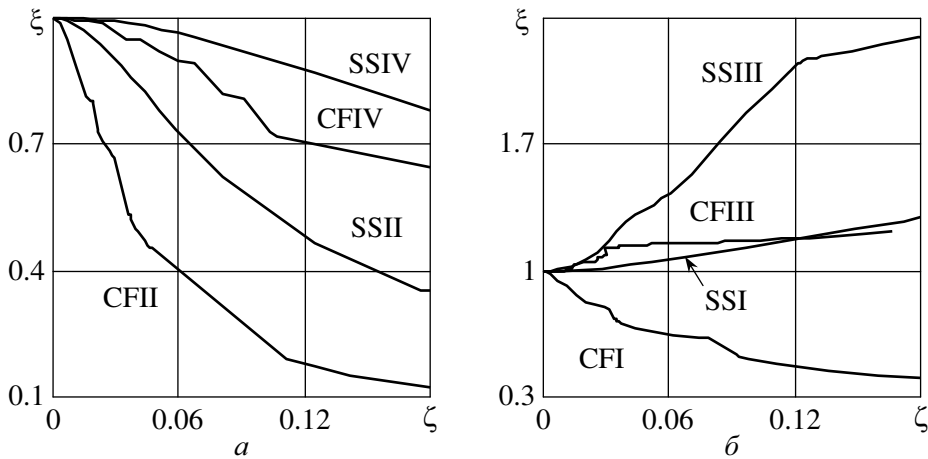


Рис. 6. Зависимости полной критической скорости потока ξ от отношения окружной скорости к осевой скорости ζ при совместном воздействии осевого течения U (м/с) и различных вариантов учета углового вращения оболочки Ω_s и жидкости Ω_f (об/с) для оболочек с различными граничными условиями

Заключение

Для анализа устойчивости вращающихся упругих круговых цилиндрических оболочек, содержащих поток жидкости с осевой и окружной компонентами скорости, рассмотрена математическая постановка задачи и конечно-элементный алгоритм ее численной реализации. В рамках разработанного численного алгоритма выполнен анализ устойчивости оболочек с различными граничными условиями. Показано, что для совместно вращающихся оболочки и жидкости осевое течение жидкости приводит к потере устойчивости, вид которой зависит от типа граничных условий. Характер динамического поведения также определяется типом граничных условий, в зависимости от которых при возрастании угловой скорости вращения осуществляется снижение или повышение критических осевых скоростей наступления потери устойчивости. Установлено, что в случае упрощенной постановки задачи, когда начальные окружные усилия, вызванные центробежными силами, не принимаются во внимание, для оболочек с любыми граничными условиями возрастание угловой скорости вращения приводит к резкому снижению критической скорости осевого течения жидкости. Эти результаты качественно

совпадают с данными, представленными в [1] для бесконечно длинных оболочек, опровергая тем самым все сомнения в их достоверности, высказанные в [7; 8].

Литература

- [1] Lai Y.-C., Chow C.-Y. Stability of a rotating thin elastic tube containing a fluid flow // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. 1973. V. 53. P. 511–517.
- [2] Воробьев Ю.С., Детистов С.И. Влияние потока газа на колебания вращающихся цилиндрических оболочек // *Прикладная механика*. 1985. Т. 21. № 7. С. 39–43.
- [3] Chen T.L.C., Bert C.W. Wave propagation in isotropic- or composite-material piping conveying swirling liquid // *Nuclear Engineering and Design*. 1977. V. 42. № 2. P. 247–255.
- [4] Chen T.L.C., Bert C.W. Dynamic stability of isotropic or composite material cylindrical shells containing swirling fluid flow // *J. Appl. Mech.* 1977. V. 44. P. 112–116.
- [5] Srinivasan A.V. Flutter analysis of rotating cylindrical shells immersed in a circular helical flowfield of air // *AIAA J.* 1971. V. 9. P. 394–400.
- [6] David T.S., Srinivasan A.V. Flutter of coaxial cylindrical shells in a incompressible axisymmetric flow // *AIAA J.* 1974. V. 12. P. 1631–1635.
- [7] Cortelezzi L., Pong A., Païdoussis M.P. Flutter of rotating shells with a co-rotating axial flow // *J. Appl. Mech.* 2004. V. 71. № 1. P. 143–145.
- [8] Gosselin F., Païdoussis M.P. Blocking in the rotating axial flow in a corotating flexible shell // *J. Appl. Mech.* 2009. V. 76. № 1. P. 011001(6 pages).
- [9] Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 184 с.
- [10] Бочкарев С.А., Матвеевко В.П. Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // *Изв. РАН. МТТ*. 2008. № 3. С. 189–199.
- [11] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., В.Г. Попов. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
- [12] Sivadas K.R., Ganesan N. Effect of rotation on vibration of moderately thick circular cylindrical shells // *J. Vib. Acoust.* 1994. V. 116. № 1. P. 198–202.
- [13] Матвеевко В.П. Об одном алгоритме решения задачи о собственных колебаниях упругих тел методом конечных элементов // *Краевые задачи теории упругости и вязкоупругости*. Свердловск, 1980. С. 20–24.
- [14] Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. 333 с.
- [15] Бочкарев С.А. Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2010. Т. 3. № 2. С. 24–33.

Поступила в редакцию 18/I/2012;
в окончательном варианте — 19/I/2012.

STABILITY OF ROTATING CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL SUBJECT TO AN AXIAL AND ROTATIONAL FLUID FLOW

© 2012 S.A. Bochkarev, V.P. Matveenko³

This paper is concerned with the stability analysis of rotating cylindrical shells conveying a co-rotating fluid. The problem is solved by the finite element method for shells subjected to different boundary conditions. It has been found that the loss of stability for a rotating shell under the action of the fluid having both axial and circumferential velocity components depends on the type of boundary conditions imposed on the shell ends. The results of numerical calculations have shown that for different variants of boundary conditions a simultaneous rotation of shell and the fluid causes an increase or decrease in the critical velocity of axial fluid flow.

Key words: classical theory of shells, rotating shell, compressible potential fluid with axial and circumferential flow, finite element method, stability.

Paper received 18/I/2012.

Paper accepted 19/I/2012.

³Bochkarev Sergey Arkadeivich (bochkarev@icmm.ru), Matveenko Valeriy Pavlovich (mvp@icmm.ru), Institute of Mechanics of Continua of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, 614013, Russian Federation.