УДК 539.3+517.44

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

© 2012 Ю.А. Парфенова[1]

В статье предлагается метод граничных операторов преобразования, который дополняет классические методы и позволяет найти решение краевых задач в замкнутом виде, что открывает новые возможности в моделировании потенциальных полей. Применение разработанного нами метода позволило решить ряд задач теории потенциала и применить для исследования пакет прикладных программ MatLab.

Ключевые слова: моделирование, потенциальное поле, граничные операторы преобразования.

Введение

При исследовании различных проблем, связанных с излучением стационарных полей, например гравитационного или магнитного, с целью поиска полезных ископаемых, возникают задачи определения краевого условия. В работе предлагается метод векторных операторов преобразования, который дополняет классические методы и позволяет найти решение краевых задач в замкнутом виде, что открывает новые возможности в исследовании моделей потенциальных полей. Применение разработанного нами метода позволило найти в замкнутой форме решения прямых и обратных задач математической физики со сферической симметрией. Актуальность метода граничных операторов преобразования состоит в том, что он позволяет упростить вычислительные схемы при применении методов итерации и регуляризации.

1. Обобщение формулы Пуассона в круге как основа для конструкции граничных операторов преобразования

Ряд важных задач теории потенциала состоит в определении неизвестных граничных данных по другим известным данным. Например, по условиям Неймана

[1]Парфенова Юлия Алексеевна (julia5507@mail.ru), кафедра математического анализа Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского, 440026, Российская Федерация, г. Пенза, ул. Лермонтова, 37.

восстановить условие Дирихле. Будем обозначать соответствующую задачу символами $i \to j$, где $i, j = 1, 2, 3$. Так, $2 \to 3$ — это обозначение задачи определения граничного условия третьего рода по условиям второго рода.

В самой общей постановке определение граничного оператора преобразования можно ввести следующим образом:

пусть мы имеем две краевые задачи с различными граничными условиями для уравнения Лапласа в единичном круге B:

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta \tilde{u} = 0,$$

$$\Gamma_i u|_S = f(\phi), \qquad \Gamma_j \tilde{u}|_S = f(\phi),$$

где $i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j$, тогда определен оператор $L_{ji} : \tilde{u} \to u$, который по решению j-й краевой задачи находит решение i-й краевой задачи. Если функции u и $\tilde{u}$ допускают непрерывные продолжения в замкнутый круг, то возникают граничные операторы преобразования $\Gamma_{ji} : \Gamma_i [u]|_S \to \Gamma_j [u]|_S$, позволяющие по известным значениям на границе одного интегродифференциального выражения $\Gamma_i [u]|_S$ вычислять значения другого интегродифференциального выражения $\Gamma_j [u]|_S$.

В 70-х годах XX века И.И. Баврин [1] получил обобщение классической формулы Пуассона для круга:

$$u(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon} \left(\int\limits_0^{2\pi} 2e^{\varepsilon \frac{r}{r_0} \cos(\phi - \psi)} \cos \varepsilon \frac{r}{r_0} \sin(\phi - \psi) - 1 \right) u(r_0, \psi)\, d\psi d\varepsilon. \tag{1.1}$$

Формула (1.1) позволяет восстановить гармоническую функцию u в круге по ее значениям на внутренней окружности радиуса r_0. На основе формулы (1.1) образованы явные конструкции для граничных операторов преобразования Γ_{ji} : $\Gamma_i [u]|_S \to \Gamma_j [u]|_S$:

$$\Gamma_j [u]|_S = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon} L_{ij} \left(\int\limits_0^{2\pi} 2e^{\varepsilon \cos(\phi - \psi)} \cos(\varepsilon \sin(\phi - \psi)) - 1 \right) \Gamma_i [u(1, \psi)]\, d\psi d\varepsilon. \tag{1.2}$$

В ядре формулы (1.2) действуют операторы преобразования L_{ij}, определенные автором в статье [2].

2. Граничные операторы преобразования Γ_{12} и Γ_{21}

Граничные операторы преобразования позволяют получить в замкнутом виде решения ряда граничных задач теории потенциала. Представим результаты.

Теорема 1. *Для задачи* $1 \to 2$ *граничный оператор преобразования* Γ_{12} *имеет вид:*

$$\Gamma_{12} : \tilde{f} \to f,$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon} \int\limits_0^{2\pi} L_{12} \left[e^{\varepsilon \cos(\phi - \psi)} \left(2 \cos \varepsilon \sin(\phi - \psi) - 1 \right) \right] \tilde{f}(\psi) d\psi d\varepsilon. \tag{2.1}$$

$\hat{f}$ *предполагается такой, что сходится числовой ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty k\left(|a_k| + |b_k|\right) < \infty, \tag{2.2}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos k\psi \cdot \tilde{f}\,(\psi)\,d\psi,$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin k\psi \cdot \tilde{f}\,(\psi)\,d\psi$$

— *коэффициенты ее ряда Фурье.*

Доказательство. Пусть $\tilde{u}\,(r,\phi)$ — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\Delta\tilde{u} = 0,$$
$$\tilde{u}|_s = \tilde{f}\,(\phi)\,.$$

Из формулы (1.1) следует интегральное представление:

$$L_0\,[\tilde{u}]\,(r,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\varepsilon}\int\limits_0^{2\pi} L_{12}\left[e^{\varepsilon r\cos(\phi-\psi)}\left(2\cos\left(r\varepsilon\sin\left(\phi-\psi\right)\right)-1\right)\right]\tilde{f}\,(\psi)d\psi d\varepsilon.$$

Выполним формальный предельный переход $r \to 1$ в приведенной формуле. Учитывая, что $L_0\,[\tilde{u}]|_{r=1} = f\,(\phi)$, находим:

$$f\,(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\varepsilon}\int\limits_0^{2\pi} L_{12}\left[e^{\varepsilon\cos(\phi-\psi)}\left(2\cos\left(\varepsilon\sin\left(\phi-\psi\right)\right)-1\right)\right]\tilde{f}\,(\psi)d\psi d\varepsilon.$$

Законность предельного перехода обосновывается требованием (2.2) и элементарно проверенным тождеством:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\varepsilon r\cos(\phi-\psi)}\left(2\cos\left(\varepsilon\sin\left(\phi-\psi\right)\right)-1\right)\tilde{f}\,(\psi)d\psi =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\varepsilon^k r^k}{k!}\cos k\phi + \frac{b_k\varepsilon^k r^k}{k!}\sin k\phi. \qquad (2.3)$$

Замечание. Рассматриваемая задача некорректна, поэтому нами предложены регуляризирующие алгоритмы, основанные на формуле (1.2). Представлена их реализация в вычислительной среде MatLab.

Пример 1. По значениям потенциала $u = \frac{3}{4}\sin\phi - \frac{1}{4}\sin 3\phi$ на границе единичного круга нужно восстановить поток u'_n на границе. Точное решение этой задачи имеет вид:

$$u'_n\,(r,\phi)|_{r=1} = \frac{3}{4}\sin\phi - \frac{3}{4}\sin 3\phi.$$

Опишем алгоритм решения. По значениям наблюдаемой функции

$$f\,(\phi) = \left(\frac{3}{4}\sin\phi - \frac{1}{4}\sin 3\phi\right)(1+\delta\theta)\,,$$

где $\delta = 10^{-4}$, θ — случайное число, полученное с помощью генератора случайных чисел, находим коэффициенты ряда Фурье для функции $f\,(\phi)$: f_{cn}, f_{sn}. В результате расчетная формула примет вид:

$$u'_r\,(1,\phi) \approx \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{N_0} e^{-\varepsilon}L_{12}\left(\int\limits_0^{2\pi} 2e^{\varepsilon\cos(\phi-\psi)}\cos\left(\varepsilon\sin\left(\phi-\psi\right)\right)-1\right)u\,(1,\phi)\,d\psi d\varepsilon,$$

$$u_n'\left(r,\phi\right)\big|_{r=1}=\sum_{n=1}^{2N_0} f_{cn}\alpha_n n\cos n\phi+f_{sn}\alpha_n n\sin n\phi,$$

где

$\alpha_n=\dfrac{\int_0^{N_0} e^{-x}x^n dx}{n!}$ – регуляризирующий множитель.

На рис. 1 представлены графики наблюдаемой и расчетной зависимости от угла ϕ нормальной производной от потенциала u_n' .

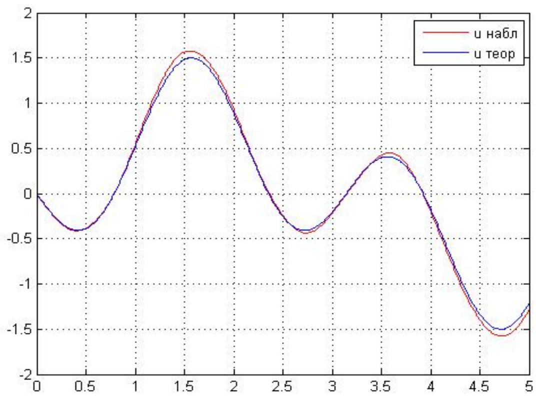

Рис. 1. u_n' наблюдаемая и u_n' расчетная зависимость от ϕ

Теорема 2. *Для задачи* $2\to1$ *граничный оператор преобразования* Γ_{21} *имеет вид:*

$$\Gamma_{21}:\ \tilde f\to f,$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\varepsilon}\int_0^{2\pi} L_{21}\left[e^{\varepsilon\cos(\phi-\psi)}\left(2\cos\varepsilon\sin\left(\phi-\psi\right)-1\right)\right]\tilde f\left(\psi\right)d\psi d\varepsilon. \qquad (2.4)$$

Функция $\hat f$ *предполагается такой, что сходится числовой ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty\left(|a_k|+|b_k|\right)<\infty, \qquad (2.5)$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos k\psi\cdot\tilde f\left(\psi\right)d\psi,$$

$$b_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin k\psi\cdot\tilde f\left(\psi\right)d\psi$$

— *коэффициенты ее ряда Фурье.*

Пример 2. По значениям потока $u_n'=\frac{3}{4}\sin\phi-\frac{3}{4}\sin3\phi$ на границе требуется восстановить потенциал u.

С точностью до произвольной постоянной C решение будет иметь вид:

$$u\left(r,\phi\right)\big|_{r=1}=\frac{3}{4}\sin\phi-\frac{1}{4}\sin3\phi.$$

Опишем алгоритм решения. По значениям наблюдаемой функции

$$f(\phi) = \left(\frac{3}{4}\sin\phi - \frac{3}{4}\sin 3\phi\right)(1+\delta\theta),$$

где $\delta = 10^{-4}$, θ — случайное число, полученное с помощью генератора случайных чисел, находим коэффициенты ряда Фурье для функции $f(\phi)$: f_{cn}, f_{sn}. Расчетная формула примет вид:

$$u(1,\phi) \approx \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{N_0} e^{-\varepsilon} L_{21}\left(\int\limits_0^{2\pi} 2e^{\varepsilon\cos(\phi-\psi)}\cos(\varepsilon\sin(\phi-\psi)) - 1\right) u'_r(1,\phi)\, d\psi d\varepsilon.$$

Применив интегральную формулу (2.3), придем к разложению неизвестного потенциала в ряд Фурье:

$$u(r,\phi)|_{r=1} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{cn}\alpha_n\frac{1}{n}\cos n\phi + f_{sn}\alpha_n\frac{1}{n}\sin n\phi.$$

В итоге расчетная формула может быть записана в виде:

$$u(r,\phi)|_{r=1} \approx \sum_{n=1}^{2N_0} f_{cn}\alpha_n\frac{1}{n}\cos n\phi + f_{sn}\alpha_n\frac{1}{n}\sin n\phi.$$

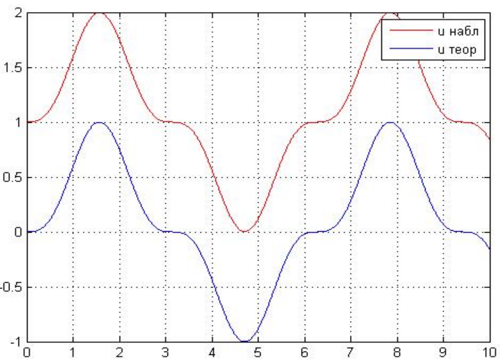

Рис. 2. Графики наблюдаемой и расчетной зависимости от угла ϕ потока u

Указанная картина (рис. 2) подтверждает, что решение приведенной задачи определяется с точностью до произвольной постоянной C.

Заключение

Применение метода операторов преобразования позволило найти решение задач, в которых требовалось определить краевое условие, в замкнутом виде. Получено аналитическое решение, что позволило моделировать стационарные потенциальные поля, например, гравитационные или магнитные поля.

Литература

[1] Баврин И.И. Операторный метод в комплексном анализе. М.: Прометей, 1991. 200 с.

[2] Парфенова Ю.А. Векторные операторы преобразования функций, гармонических в шаре // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. № 76. С. 48–56.

Поступила в редакцию 18/*IX*/2012;
в окончательном варианте — 18/*IX*/2012.

MODELING OF POTENTIAL FIELDS BY METHOD OF BOUNDARY TRANSFORMATION OPERATORS

© 2012 J.A. Parfenova[2]

In the article the method of boundary transformation operators is offered. It supplements classical methods and allows to find the solution of regional tasks in the closed look that opens new opportunities in the simulation of potential fields. Application of the developed method allowed to solve a number of problems of potential theory and apply to the research a package of applied MatLab programs.

Key words: modeling, potential field, boundary transformation operators.

Paper received 18/*IX*/2012.
Paper accepted 18/*IX*/2012.

[2]Parfenova Julia Alexeevna (julia5507@mail.ru), the Dept. of Mathematical Analysis, Penza State Pedagogical University, Penza, 440026, Russian Federation.