МАТЕМАТИКА

УДК 511.334

СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ: ФЕНОМЕН РАССЕЧЕНИЯ[1]

© 2013 Г.В. Воскресенская[2]

В статье изучается структура пространств модулярных форм $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$ и $M_k(\Gamma_0(N),\chi)$ для таких уровней N, что при некотором значении k_0 $S_{k_0}(\Gamma_0(N),\chi)$ – одномерное пространство, порожденное мультипликативным η-произведением.

Ключевые слова: пространства модулярных форм, эта-функция Дедекинда, параболические вершины.

Введение

В статье [1] Дж. МакКей с соавторами получил полный список эта-произведений с мультипликативными коэффициентами (функции МакКея). Чуть позже в работе [5] было доказано, что все они обладают замечательным свойством: они есть в точности параболические формы целого веса с дивизором в параболических вершинах, причем порядок каждого нуля равен 1.

Для своего минимального уровня N мультипликативное эта-произведение веса k_0 с характером χ является образующей одномерного пространства $S_{k_0}(\Gamma_0(N),\chi)$. В этой статье мы исследуем роль, которую играют эти функции в структуре других пространств того же уровня. Вес и иногда характер будут меняться. Оказывается, что все рассматриваемые пространства порождены эта-частными.

В настоящей статье продолжаются исследования, начатые в работе [6]. Определение всех используемых основных понятий теории модулярных форм можно найти в монографиях [3; 4].

1. Определение эта-частных и необходимые формулы

Определение. Функция вида $f(z) = \prod_{\delta|N}\eta^{r_\delta}(\delta z), \delta \in \mathbf{N}, r_\delta \in \mathbf{Z}$, называется η-частным; если $r_\delta \in \mathbf{N}$, то $f(z)$ называется η-произведением.

Порядок в параболической вершине для η-частного определяется по следующему правилу: пусть $m,\ n,\ N-$натуральные числа, $n|N,\ (m,n)=1$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 12-01-00137.

[2]Воскресенская Галина Валентиновна (vosk@ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

порядок нуля в параболической вершине $\frac{m}{n}$ равен

$$\frac{N}{24}\sum_{\delta|N}\frac{(n,\delta)^2 r_\delta}{(n,\frac{N}{n})n\delta}.$$

При выполнении двух условий

$$1)\sum_{\delta|N}\delta r_\delta \equiv 0(mod\ 24); \qquad 2)\sum_{\delta|N}\frac{N}{\delta}r_\delta \equiv 0(mod\ 24)$$

и отсутствии полюсов в параболических вершинах η-частное принадлежит пространству $M_k(\Gamma_0(N),\chi)$, где $\chi(d) = \left(\frac{(-1)^k\ s}{d}\right)$, $s = \prod_{\delta|N}\delta^{r_\delta}$. При этом, если число $s-$дробное, то его заменяют на целое число вида $m^2 s$; если $d-$ четное, то d заменяют на $d+N$. Рассматриваемые нами эта-произведения будут появляться далее в таблице.

Для вычисления размерностей используется формула Коэна-Остерле, приведенная в теореме 1. Напомним ее.

Пусть χ — характер Дирихле, $\chi(-1) = (-1)^k$, f — его кондуктор. Если $p|N$, то обозначим через r_p максимальную степень, в которой p делит N, через s_p — максимальную степень, в которой p делит f.

$$\lambda(r_p,s_p,p) = \begin{cases} p^{r'}+p^{r'-1}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r', \\ 2p^{r'}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r'+1, \\ 2p^{r_p-s_p}, & 2s_p \geqslant r_p, \end{cases}$$

$$\nu_k = \begin{cases} 0, & k\equiv 1\ (mod\ 2), \\ -\frac{1}{4}, & k\equiv 2\ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}, & k\equiv 0\ (mod\ 4), \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & k\equiv 1\ (mod\ 3), \\ -\frac{1}{3}, & k\equiv 2\ (mod\ 3), \\ \frac{1}{3}, & k\equiv 0\ (mod\ 3). \end{cases}$$

Теорема 1 [4]. *Если k — целое, χ — характер Дирихле по модулю N, $\chi(-1) = (-1)^k$, то*

$$dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N),\chi)) - dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N),\chi)) =$$

$$\frac{(k-1)N}{12}\prod_{p|N}(1+p^{-1}) - \frac{1}{2}\prod_{p|N}\lambda(r_p,s_p,p) + \nu_k\cdot\sum_{x:x^2+1\equiv 0(N)}\chi(x) + \mu_k\cdot\sum_{x:x^2+x+1\equiv 0(N)}\chi(x)$$

Если $k>2$, то $dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N),\chi)) = 0$. Левая часть становится равна $dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N),\chi))$. Если $k\leqslant 0$, то $dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N),\chi)) = 0$. Левая часть становится равна $-dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N),\chi))$.

2. Сечение пространств $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$ мультипликативными эта-произведениями

3.1. Уровень 1. Базовый пример

Функция $\Delta(z) = \eta^{24}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$, $q = e^{2\pi iz}$ является самой известной из мультипликативных эта-произведений. Ее коэффициенты $\tau(n)$ – значения арифметической функции Рамануджана. Функция $\Delta(z)$ выражается через ряды Эйзенштейна $E_4(z)$ и $E_6(z)$:

$$\eta^{24}(z) = \frac{E_4^3(z)-E_6^2(z)}{1728}.$$

Известна [4] классическая теорема о том, что:
1) любой элемент из $M_k(\Gamma)$ может быть записан в виде

$$\sum_{4i+6j=k} c_{ij} E_4^i(z) E_6^j(z);$$

2) любой элемент из $S_k(\Gamma), \quad k \geqslant 12$, может быть записан в виде

$$f(z) = \eta^{24}(z) g(z), \quad g(z) \in M_{k-12}(\Gamma).$$

3.2. Теорема о сечениях

Оказывается, что для других уровней, соответствующих мультипликативным эта-произведениям, имеет место аналогичная ситуация.

Теорема 2.

1) Пусть $f(z)$ — мультипликативное η-произведение нечетного веса, порождающее одномерное пространство $S_l(\Gamma_0(N), \chi)$. Тогда любой элемент $g(z) \in V_1 \cong \cong S_k(\Gamma_0(N), \chi^k)$, $l|k$, имеет вид $g(z) = f(z)h(z)$, $h(z) \in V_2 \cong M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi^{k-1})$.

2) Пусть $f(z)$ — мультипликативное η-произведение четного веса, порождающее одномерное пространство $S_l(\Gamma_0(N))$. Тогда любой элемент $g(z) \in V_1 \cong \cong S_k(\Gamma_0(N))$, $l|k$, имеет вид $g(z) = f(z)h(z)$, $h(z) \in V_2 \cong M_{k-l}(\Gamma_0(N))$.

Доказательство.

1 способ.

В каждом из этих случаев множество $\{g(z) = f(z)h(z), \quad h(z) \in V_2\}$ является подпространством в V_1. Непосредственно проверяется, что $dimV_1 = dimV_2$. Следовательно, $V_1 \cong V_2$.

2 способ.

Пусть $g(z) \in V_1$. Так как дивизор $f(z)$ сосредоточен в параболических вершинах, порядок $ord_s(f) = 1$ для любой параболической вершины s, то $\frac{g(z)}{f(z)}$ является модулярной формой из V_2.

Мы использовали тот факт, что если $f_1(z) \in M_{k_1}(\Gamma_0(N), \chi_1)$ и $f_2(z) \in \in M_{k_2}(\Gamma_0(N), \chi_2)$, то $f_1(z) f_2(z) \in M_{k_1+k_2}(\Gamma_0(N), \chi_1\chi_2)$.

Теорема 3.

Пусть V_1- пространство параболических форм, указанных в первом столбце таблицы, тогда любая функция из V_1 является однородным многочленом от функций $G_1, G_2, ..., G_s$ из пространства V_2 степени $\frac{k}{l}$, делящимся на мультипликативное η-произведение $F(z)$, которое также является однородным многочленом от $G_1, G_2, ..., G_s$.

Здесь и далее мы будем использовать общепринятый в теории эта-функций способ краткого обозначения эта-частных, когда вместо функции записывается соответствующий ей символ $\prod_{\delta|N} \delta^{r_\delta}$. Например, вместо $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$ запишем $6^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2$.

Доказательство.

Все случаи рассматриваются аналогично с небольшим учетом специфики пространств. Мы подробно разберем несколько случаев, в которых отражены все основные идеи доказательства.

Таблица

V_1	V_2	k	l	χ	$F(z)$	G_i
$S_k(\Gamma_0(36))$	$M_2(\Gamma_0(36))$	$2\|k$	2	1	6^4	$4^8\cdot 2^{-4};\ 1^8\cdot 2^{-4};$ $12^8\cdot 6^{-4};\ 3^8\cdot 6^{-4};$ $36^8\cdot 18^{-4};\ 9^8\cdot 18^{-4};$ $9^6\cdot 3^{-2};\ 1^6\cdot 3^{-2};$ $18^6\cdot 6^{-2};\ 2^6\cdot 6^{-2};$ $36^6\cdot 12^{-2};\ 4^6\cdot 12^{-2}$
$S_k(\Gamma_0(32))$	$M_2(\Gamma_0(32))$	$2\|k$	2	1	$8^2\cdot 4^2$	$4^8\cdot 2^{-4};\ 1^8\cdot 2^{-4};$ $8^8\cdot 4^{-4};\ 2^8\cdot 4^{-4};$ $16^8\cdot 8^{-4};\ 4^8\cdot 8^{-4};$ $32^8\cdot 16^{-4};\ 8^8\cdot 16^{-4}$
$S_k(\Gamma_0(27))$	$M_2(\Gamma_0(27))$	$2\|k$	2	1	$9^2\cdot 3^2$	$9^6\cdot 3^{-2};\ 1^6\cdot 3^{-2};$ $27^6\cdot 9^{-2};\ 3^6\cdot 9^{-2};$ $1^3\cdot 3^{-2}\cdot 9^3;\ 3^3\cdot 9^{-2}\cdot 27^3$
$S_k(\Gamma_0(24))$	$M_2(\Gamma_0(24))$	$2\|k$	2	1	$12{\cdot}6{\cdot}4{\cdot}2$	$4^8\cdot 2^{-4};\ 1^8\cdot 2^{-4};$ $8^8\cdot 4^{-4};\ 2^8\cdot 4^{-4};$ $12^8\cdot 6^{-4};\ 3^8\cdot 6^{-4};$ $24^8\cdot 12^{-4};\ 6^8\cdot 12^{-4}$
$S_k(\Gamma_0(20))$	$M_2(\Gamma_0(20))$	$2\|k$	2	1	$10^2\cdot 2^2$	$4^8\cdot 2^{-4};\ 1^8\cdot 2^{-4};$ $20^8\cdot 10^{-4};\ 5^8\cdot 10^{-4};$ $1^4\cdot 2^{-2}\cdot 5^4\cdot 10^{-2};$ $20^4\cdot 10^{-2}\cdot 4^4\cdot 2^{-2};$
$S_k(\Gamma_0(15))$	$M_2(\Gamma_0(15))$	$2\|k$	2	1	$15{\cdot}5{\cdot}3{\cdot}1$	$1^2\cdot 3^6\cdot 5^{-4};\ 15^2\cdot 5^6\cdot 3^{-4};$ $1^4\cdot 3^{-2}\cdot 5^{-2}\cdot 15^4;$ $1^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4\cdot 15^{-2}$
$S_k(\Gamma_0(14))$	$M_2(\Gamma_0(14))$	$2\|k$	2	1	$14{\cdot}7{\cdot}2{\cdot}1$	$1^4\cdot 2^{-2}\cdot 7^4\cdot 14^{-2};$ $1^{-2}\cdot 2^4\cdot 7^{-2}\cdot 14^4;$ $1^{14}\cdot 7^6\cdot 2^{-16};$ $14^{14}\cdot 2^6\cdot 7^{-16}$
$S_k(\Gamma_0(11))$	$M_2(\Gamma_0(11))$	$2\|k$	2	1	$11^2\cdot 1^2$	$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{d\|n}d)q^n;$ $\frac{11^4\cdot 1^4}{f(z)}$
$S_k(\Gamma_0(12),\chi^k)$	$M_3(\Gamma_0(12),\chi)$	$3\|k$	3	$(\frac{-3}{d})$	$6^3\cdot 2^3$	$3^9\cdot 1^{-3};\ 1^9\cdot 3^{-3};$ $6^9\cdot 2^{-3};\ 2^9\cdot 6^{-3};$ $12^9\cdot 4^{-3};\ 4^9\cdot 12^{-3};$ $6^3\cdot 2^3$
$S_k(\Gamma_0(16),\chi^k)$	$M_3(\Gamma_0(16),\chi)$	$3\|k$	3	$(\frac{-1}{d})$	4^6	$1^4\cdot 2^6\cdot 4^{-4};$ $2^4\cdot 4^6\cdot 8^{-4};$ $16^4\cdot 8^6\cdot 4^{-4};$ $8^4\cdot 4^6\cdot 2^{-4};$ $4^4\cdot 8^6\cdot 16^{-4};$ $4^4\cdot 2^6\cdot 1^{-4};$ 4^6
$S_k(\Gamma_0(7),\chi^k)$	$M_3(\Gamma_0(7),\chi)$	$3\|k$	3	$(\frac{-7}{d})$	$7^3\cdot 1^3$	$7^7\cdot 1^{-1};$ $1^7\cdot 7^{-1};\ 7^3\cdot 1^3$

Окончание таблицы

$S_k(\Gamma_0(8),\chi^k)$	$M_3(\Gamma_0(7),\chi)$	$3\mid k$	3	$(\frac{-2}{d})$	$8^2\cdot 4\cdot 2\cdot 1^2$	$1^{-2}\cdot 2^{-1}\cdot 4^{11}\cdot 8^{-2}$; $8^{-2}\cdot 4^{-1}\cdot 2^{11}\cdot 1^{-2}$; $8^2\cdot 4\cdot 2\cdot 1^2$
$S_k(\Gamma_0(5),\chi^{\frac{k}{2}})$	$M_2(\Gamma_0(5),\chi)$	$2\mid k$; $k\geqslant 4$	2	$(\frac{5}{d})$	$5^4\cdot 1^4$	$5^5\cdot 1^{-1}$; $1^5\cdot 5^{-1}$
$S_k(\Gamma_0(6))$	$M_4(\Gamma_0(6))$	$4\mid k$	4	1	$6^2{\cdot}3^2{\cdot}2^2{\cdot}1^2$	$1^{-4}\cdot 2^8\cdot 3^{-4}\cdot 6^8$; $6^{-4}\cdot 3^8\cdot 2^{-4}\cdot 1^8$; $1^4\cdot 2^{16}\cdot 3^{-12}$; $6^4\cdot 3^{16}\cdot 2^{-12}$; $6^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 1^2$
$S_k(\Gamma_0(9))$	$M_4(\Gamma_0(9))$	$4\mid k$	4	1	3^8	$3^{-4}\cdot 9^{12}$; $3^{-4}\cdot 1^{12}$; $1^{-3}\cdot 3^8\cdot 9^3$; $1^3\cdot 3^{-4}\cdot 9^9$; 3^8
$S_k(\Gamma_0(8),\chi^k)$	$M_2(\Gamma_0(8),\chi)$	$2\mid k$; $k\geqslant 4$	2	$(\frac{2}{d})$	$4^4\cdot 2^4$	$1^{-2}\cdot 2^3\cdot 4\cdot 8^2$; $1^2\cdot 2\cdot 4^3\cdot 8^2$
$S_k(\Gamma_0(4),\chi^k)$	$M_5(\Gamma_0(4),\chi)$	$5\mid k$	5	$(\frac{-1}{d})$	$4^4\cdot 2^2\cdot 1^4$	$2^{26}\cdot 4^{-4}\cdot 1^{-12}$; $1^{-4}\cdot 2^{26}\cdot 4^{-12}$; $4^4\cdot 2^2\cdot 1^4$
$S_k(\Gamma_0(3),\chi^k)$	$M_3(\Gamma_0(3),\chi)$	$3\mid k$; $k\geqslant 6$	3	$(\frac{-3}{d})$	$3^6\cdot 1^6$	$1^{-3}\cdot 3^9$; $1^9\cdot 3^{-3}$
$S_k(\Gamma_0(4))$	$M_2(\Gamma_0(4))$	$2\mid k$; $k\geqslant 12$	2	1	2^{12}	$2^{-4}\cdot 4^8$; $1^{-8}\cdot 2^{20}\cdot 4^{-8}$
$S_k(\Gamma_0(2))$	$M_2(\Gamma_0(2))$	$2\mid k$; $k\geqslant 8$	2	1	$1^8\cdot 2^8$	$1^{16}\cdot 2^{-8}$; $1^{-8}\cdot 2^{16}$

Доказательство.

Пространства $S_k(\Gamma_0(4))$ **и** $M_k(\Gamma_0(4))$.

Относительно группы $\Gamma_0(4)$ существуют три неэквивалентные параболические вершины $\{0\}$, $\{\infty\}$, $\{\frac{1}{2}\}$. Любой элемент из $M_k(\Gamma_0(4))$ является одним многочленом степени $\frac{k}{2}$ от $G_1(z)=\eta^{-4}(2z)\eta^8(4z)$ и $G_2(z)=\eta^{-8}(z)\eta^{-8}(4z)\eta^{20}(2z)$.

Докажем это по индукции.

Для $M_2(\Gamma_0(4))$ функции $G_1(z)$ и $G_2(z)$ образуют базис. В параболических вершинах: $ord_\infty(G_1)=1$, $ord_{\frac{1}{2}}(G_1)=0$; $ord_\infty(G_2)=0$, $ord_{\frac{1}{2}}(G_2)=1$.

Пусть $f(z)\in M_k(\Gamma_0(4))$. Если $f(z)$ имеет ноль в ∞, то $\frac{f(z)}{G_1(z)}=h(z)\in M_{k-2}(\Gamma_0(4))$, если $f(z)$ имеет ноль в $\frac{1}{2}$, то $\frac{f(z)}{G_2(z)}=h(z)\in M_{k-2}(\Gamma_0(4))$. По предположению индукции $h(z)$ является однородным многочленом степени $\frac{k-2}{2}$ от $G_1(z)$ и $G_2(z)$.

Мультипликативное η-произведение $F(z)=\eta^{12}(2z)=G_1(z)G_2^2(z)-16G_1(z)^2G_2(z)$[2]. Пусть $f(z)\in S_k(\Gamma_0(N))$, $k\geqslant 6$. В этом случае $\frac{f(z)}{\eta^{12}(2z)}\in M_{k-6}(\Gamma_0(N))$, так как $ord_sF(z)=1$ для любой параболической вершины s.

Таким образом, функция $f(z)$ является однородным многочленом степени $\frac{k}{2}$ от G_1 и G_2, делящимся на $F(z)$.

Пространства $S_k(\Gamma_0(4),\chi^{\frac{k}{2}})$ **и** $M_k(\Gamma_0(4),\chi^{\frac{k}{2}}), \chi(d) = (\frac{5}{d}), 2|k, k \geqslant 4.$

Мы будем использовать в доказательстве тот классический факт, что если $f_1(z) \in M_{k_1}(\Gamma_0(N),\chi_1)$ и $f_2(z) \in M_{k_2}(\Gamma_0(N),\chi_2)$, то $f_1(z)f_2(z) \in$ $\in M_{k_1+k_2}(\Gamma_0(N),\chi_1\chi_2)$.

Относительно группы $\Gamma_0(5)$ существуют две неэквивалентные параболические вершины: $\{0\}$, $\{\infty\}$. Любой элемент из $M_k(\Gamma_0(5),\chi^{\frac{k}{2}})$ является одним многочленом степени $\frac{k}{2}$ от $G_1(z) = \eta^{-1}(z)\eta^5(5z)$ и $G_2(z) = \eta^{-1}(5z)\eta^5(z)$.

Докажем это по индукции.

Для $M_2(\Gamma_0(5),\chi)$ функции $G_1(z)$ и $G_2(z)$ образуют базис. В параболических вершинах: $ord_\infty(G_1) = 1$, $ord_0(G_1) = 0$; $ord_\infty(G_2) = 0$, $ord_0(G_2) = 1$.

Пусть $f(z) \in M_k(\Gamma_0(5),\chi^{\frac{k}{2}})$. Если $f(z)$ имеет ноль в ∞, то $\frac{f(z)}{G_1(z)} =$ $= h(z) \in M_{k-2}(\Gamma_0(5),\chi^{\frac{k}{2}-1})$, если $f(z)$ имеет ноль в 0, то $\frac{f(z)}{G_2(z)} = h(z) \in$ $\in M_{k-2}(\Gamma_0(5),\chi^{\frac{k}{2}-1})$. По предположению индукции $h(z)$ является однородным многочленом степени $\frac{k-2}{2}$ от $G_1(z)$ и $G_2(z)$.

Мультипликативное η-произведение $F(z) = \eta^4(5z)\eta^4(z) = G_1(z)G_2(z)$. Пусть $f(z) \in S_k(\Gamma_0(5),\chi^{\frac{k}{2}})$, $k \geqslant 4$. В этом случае $\frac{f(z)}{F(z)} \in M_{k-4}(\Gamma_0(N))$, так как $ord_s(F(z)) = 1$ для любой параболической вершины s.

Таким образом, функция $f(z)$ является однородным многочленом степени $\frac{k}{2}$ от G_1 и G_2, делящимся на $F(z)$.

Пространства $S_k(\Gamma_0(12),\chi^k)$ **и** $M_k(\Gamma_0(12),\chi^k), \chi(d) = (\frac{-3}{d}), 3|k.$

Рассмотрим функции
$G_1(z) = \eta^{-3}(z)\eta^9(3z)$;
$G_2(z) = \eta^{-3}(3z)\eta^9(z)$;
$G_3(z) = \eta^{-3}(2z)\eta^9(6z)$;
$G_4(z) = \eta^{-3}(6z)\eta^9(2z)$;
$G_5(z) = \eta^{-3}(4z)\eta^9(12z)$;
$G_6(z) = \eta^{-3}(12z)\eta^9(4z)$;
$G_7(z) = \eta^3(2z)\eta^3(6z)$.

Любой элемент из пространств, указанных в заголовке, является однородным многочленом степени $\frac{k}{3}$ от этих функций. Докажем это по индукции.

Для пространства $M_3(\Gamma_0(12),\chi^k)$ эти семь функций образуют базис.

Далее для k, делящегося на 3, имеем

$$M_k(\Gamma_0(12),\chi^k) \cong S_k(\Gamma_0(12),\chi^k) \oplus < G_1^{\frac{k}{3}} > \oplus < G_2^{\frac{k}{3}} > \oplus < G_3^{\frac{k}{3}} > \oplus$$

$$\oplus < G_4^{\frac{k}{3}} > \oplus < G_5^{\frac{k}{3}} > \oplus < G_6^{\frac{k}{3}} >$$

Если $f(z) \in S_k(\Gamma_0(12),\chi^k)$, то $\frac{f(z)}{G_7(z)} \in M_k(\Gamma_0(12),\chi^{k-3})$. Далее применяем предположение индукции.

Для остальных пространств доказательство проводится аналогично.

3. Открытые проблемы

В конце статьи сформулируем несколько открытых проблем:

1) интересно было бы продолжить работу по проблеме Кена Оно: описанию всех пространств модулярных форм, порожденных эта-произведениями;

2) изучить следующую проблему: в каких случаях пространства $S_{k+l}(\Gamma_0, \chi \cdot \chi_1)$ являются произведением пространств $S_l(\Gamma_0, \chi)$ и $M_k(\Gamma_0, \chi_1)$. В рассмотренном в данной статье случае пространство $S_l(\Gamma_0, \chi)$ одномерно. Интересно узнать, как обстоят дела в случае большей размерности;

3) известно [2], что

$$\sum_{a_2 \in (Z/NZ)^*} G_k^{(0,a_2) mod N}(z) \in M_k(\Gamma_0(N)),$$

$$\prod_{a_2 \in (Z/NZ)^*} G_k^{(0,a_2) mod N}(z) \in M_{\phi(N)k}(\Gamma_0(N)).$$

Найти для них выражения через эта-частные. Такое выражение точно существует, если N – один из уровней из таблицы.

Литература

[1] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η-functions // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.

[2] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. М.: Мир, 1988. 320 с.

[3] Martin Y. Multiplicative eta-quotients // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. P. 4825–4856.

[4] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S., Providence, 2004. 216 p.

[5] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1999. V. 11. P. 247–262.

[6] Воскресенская Г.В. Пространства модулярных форм, содержащие мультипликативные η-произведения // Вестник СамГУ. 2012. V. 97. P. 5–11.

Поступила в редакцию $22/V/2013$;
в окончательном варианте — $22/V/2013$.

THE STRUCTURE OF MODULAR FORM: THE PHENOMEN OF THE SECTION

 G.V. Voskresenskaya[3]

In the article we study the structure of spaces of modular forms $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ and $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ for the levels N such that for a value k_0 $S_{k_0}(\Gamma_0(N), \chi)$ is a one-dimensional space generated by a multiplicative η-product.

Key words: spaces of modular forms, Dedekind eta-function, parabolic vertex.

Paper received 22/V/2013.
Paper accepted 22/V/2013.

[3]Voskresenskaya Galina Valentinovna (galvosk@mail.ru), the Dept.of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.