УДК 539.3

ИНВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО С УСЛОВИЯМИ ТИПА СИНЬОРИНИ НА ТРЕЩИНЕ[1]

© 2013 Н.П. Лазарев[2]

Рассматривается задача о равновесии упругой трансверсально-изотропной пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину. На берегах трещины заданы условия непроникания, которые имеют вид неравенства (условия типа Синьорини). Показано, что в этой задаче существуют инвариантные интегралы, равные производной функционала энергии пластины по параметру возмущения.

Ключевые слова: трещина, пластина Тимошенко, вариационная задача, условие непроникания.

Введение

В работе рассматривается модель, описывающая равновесие упругой однородной трансверсально-изотропной пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину. На кривой, соответствующей трещине, налагается условие в виде неравенства, описывающее взаимное непроникание противоположных берегов трещины. Для семейства вариационных задач о равновесии пластин, зависящих от параметра ε, проводится анализ зависимости функционала энергии от вариации геометрии пластины в срединной плоскости. Изменение геометрии пластины задается с помощью семейства гладких отображений, зависящих от ε. При этом значение параметра $\varepsilon = 0$ соответствует исходной невозмущенной области. С помощью выбора подходящих отображений и геометрических характеристик пластины с трещиной установлена возможность представления производной функционала энергии (при $\varepsilon = 0$) в виде инвариантного интеграла.

Инвариантные интегралы широко используются при исследовании сингулярностей различных физических полей [1–4]. Общий подход к получению инвариантных интегралов в задачах теории упругости разрабатывался в [5]. В изучении моделей пластин, учитывающих поперечный сдвиг, инвариантные интегралы использовались, например, в [6; 7]. Отметим, что в этих работах на трещине задава-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение № 8222) и в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект № 4402), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31076-мол-а).

[2]Лазарев Нюргун Петрович (nyurgun@ngs.ru), Научно-исследовательский институт математики, Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, 677891, Российская Федерация, г. Якутск, ул. Белинского, 58; Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Акад. Лаврентьева, 15.

лись линейные условия вида равенств. В [6] получены соотношения, связывающие коэффициенты интенсивности напряжений и значения инвариантных интегралов.

Традиционный подход в теории трещин предполагает задание на берегах разреза (трещины) линейных краевых условий в виде равенств, что приводит к линейным краевым задачам. Хорошо известно, что получаемые при этом решения соответствующих краевых задач могут приводить к физическим противоречиям [8]. Именно вектор перемещений при этом таков, что точки, лежащие на противоположных берегах трещины, проникают друг в друга. В связи с этим представляет интерес качественно другой подход в моделировании физических процессов вблизи трещины, при котором на берегах трещины используются так называемые условия непроникания. Эти условия допускают возможность расхождения берегов, их перемещения вдоль поверхности разреза, касания и не позволяют берегам трещины проникать друг в друга. Исследования математических моделей теории трещин с нелинейными условиями непроникания вида системы равенств и неравенств, а также соответствующую библиографию можно найти в [9–13]. Дифференцируемость функционалов энергии для краевых задач с односторонними ограничениями изучена во многих работах [9–12]. В [12] для задачи о равновесии N-мерного ($N = 2, 3$) упругого тела с условиями типа неравенств на трещине выведены достаточные условия существования инвариантных интегралов. В [13; 14] найдены инвариантные интегралы для двумерного тела с трещиной, лежащей на линии раздела двух сред. Для пластин модели Кирхгофа–Лява инвариантные интегралы, выражающие производную функционала энергии, найдены в рамках линейных краевых условий [15]. Важно отметить, что полученные в настоящей работе инвариантные интегралы типа Черепанова–Райса представляют интерес с точки зрения механики разрушения [1–4].

1. Задача равновесия

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{0,1}$, кривая Γ_0 содержится в области Ω. Полагаем, что Γ_0 не содержит своих концевых точек $\partial\Gamma_0$. Будем считать, что относительно Ω, $\partial\Omega$ и Γ_0 выполнено следующее.

Предположение 1. Пусть набор $\{\Omega, \partial\Omega, \Gamma_0\}$ удовлетворяет следующим условиям:

(а) кривая Γ_0 может быть продолжена до липшицевой кривой Γ, разбивающей область Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, так, чтобы $\bar\Gamma = \partial\bar\Omega_1 \cap \partial\bar\Omega_2$, $\bar\Omega_1 \cup \bar\Omega_2 = \bar\Omega$ и $\operatorname{meas}(\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) > 0$, $i = 1, 2$;

(б) границы $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ липшицевы;

(в) кривая Γ не имеет самопересечений;

(г) множество $\Omega_0 = \Omega \backslash \bar\Gamma_0$ является связным ($\bar\Gamma_0 = \Gamma_0 \cup \partial\Gamma_0$).

Условие (г), в частности, означает, что кривая Γ_0 не может выходить на внешнюю границу $\partial\Omega$ обеими концевыми точками. В силу условия (а), п. в. на Γ_0 можно определить вектор единичной нормали $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$. В соответствии с направлением $\boldsymbol{\nu}$ можно говорить о положительном Γ_0^+ и отрицательном берегах Γ_0^- кривой Γ_0.

Предположим, что трансверсально-изотропная однородная пластина имеет постоянную толщину $2h$. Трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ соотнесем так, чтобы область $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$. представляла собой проекцию пластины со сквозной трещиной на срединную плоскость $z = 0$. При этом кривая γ_0 соответствует трещине в пластине. Это означает, что сквозная трещина моделируется цилиндрической поверхностью: $\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\gamma_0, -h\leqslant z\leqslant h$, где $|z|$ — расстояние до срединной плоскости.

Обозначим через $\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x})=(\boldsymbol{U},u)$ вектор перемещений точек срединной поверхности, $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, где $\boldsymbol{U}=(u_1,u_2)$ — горизонтальные (вдоль плоскости (x_1,x_2)), а u — вертикальные перемещения. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})=(\phi_1,\phi_2)$. Обобщенный вектор перемещений $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{U},u,\boldsymbol{\phi})$. Будем считать, в соответствии положениями классической теории упругости, что величины $\boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\phi}$ являются бесконечно малыми. Для удобства будем также использовать обозначения ξ_i, $i=1,2...,5$ для компонент вектора $\boldsymbol{\xi}$, при этом $(\xi_1,\xi_2)=\boldsymbol{U}$, $\xi_3=u$, $(\xi_4,\xi_5)=\boldsymbol{\phi}$.

Определим функциональное пространство, в котором будет исследоваться задача равновесия. Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_0)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_0)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Введем пространство $H(\Omega_0)=H^{1,0}(\Omega_0)^5$, снабженное стандартной нормой $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{H(\Omega_0)}$.

Тензоры, описывающие деформацию пластины $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})=\{\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\phi})\}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{U})=\{\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U})\}$, $i,j=1,2$, выражаются следующими формулами:

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\phi})=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}\Big),\quad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U})=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big),\ i,j=1,2.$$

Тензоры моментов $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{\phi})=\{m_{ij}(\boldsymbol{\phi})\}$ и усилий $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U})=\{\sigma_{ij}(\boldsymbol{U})\}$, $i,j=1,2$, выражаются по формулам:

$$m_{ij}(\boldsymbol{\phi})=c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{\phi}),\quad \sigma_{ij}(\boldsymbol{U})=3h^{-2}c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{U}), \tag{1.1}$$

где ненулевые постоянные коэффициенты тензора c_{ijkl} определяются соотношениями:
$$c_{iiii}=D,\ c_{iijj}=D\text{æ},\ c_{ijij}=c_{ijji}=D(1-\text{æ})/2,\ i,j=1,2,\ i\neq j,$$
D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона [18]. Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Для вектора поперечных сил $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2)$ выполняются следующие равенства [18]:

$$q_i(u,\boldsymbol{\phi})=\Lambda(u_{,i}+\phi_i),\quad i=1,2,\quad (u_{,i}=\frac{\partial u}{\partial x_i})$$

где $\Lambda=2h\kappa' G$, κ' — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины, Λ, κ', G — постоянные.

С учетом записанных выше выражений определим следующую билинейную форму:

$$B_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\int\limits_{\Omega_0}b(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})d\mathbf{x},$$

$$b(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\big\{\sigma_{ij}(\boldsymbol{W})\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U})+m_{ij}(\boldsymbol{\phi})\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\psi})+q_i(u,\boldsymbol{\phi})(w_{,i}+\psi_i)\big\},$$

для произвольных функций $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{U},u,\boldsymbol{\phi})\in H(\Omega_0)$, $\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{W},w,\boldsymbol{\psi})\in H(\Omega_0)$. Заметим, что предположение 1 обеспечивает выполнение неравенства Корна и обобщенного неравенства Пуанкаре во всей области Ω_0. С помощью указанных неравенств можно вывести оценку

$$B_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})\geqslant c\|\boldsymbol{\xi}\|^2\quad \forall\,\boldsymbol{\xi}\in H(\Omega_0), \tag{1.2}$$

где постоянная $c>0$ не зависит от $\boldsymbol{\xi}$ [16].

Функционал потенциальной энергии пластины, занимающей область Ω_0, имеет вид:

$$\Pi(\Omega_0,\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{2}B_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})-\int\limits_{\Omega_0}\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{\xi}d\mathbf{x},\qquad \xi=(\boldsymbol{U},u,\boldsymbol{\phi})\in H(\Omega_0),$$

вектор $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in C^1(\bar{\Omega})^5$ описывает воздействие на пластину заданных внешних нагрузок [18].

Считаем, что на внешней границе выполнены следующие краевые условия:

$$u = 0, \quad \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{U} = (0, 0) \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

которые описывают защемление пластины по внешним краям. Условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины пластины имеет вид

$$[\boldsymbol{U}]\boldsymbol{\nu} \geqslant h|[\boldsymbol{\phi}]\boldsymbol{\nu}| \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \tag{1.3}$$

где квадратные скобки $[\cdot]$ означают скачок функции: $[v] = v|_{\Gamma_0^+} - v|_{\Gamma_0^-}$. Вывод и обоснование условия (1.3) можно найти в [16]. Отметим, что это неравенство корректно в рамках предположений классической теории упругости. Условие (1.3) инвариантно относительно выбора направления нормали $\boldsymbol{\nu}$, так как при изменении направления на $-\boldsymbol{\nu}$ значение скачка на берегах трещины также меняет знак. Введем множество допустимых функций

$$K_0(\Omega_0) = \{\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\phi}) \in H(\Omega_0) \ | \ [\boldsymbol{U}]\boldsymbol{\nu} \geqslant h|[\boldsymbol{\phi}]\boldsymbol{\nu}| \ \text{п. в. на } \Gamma_0\}.$$

Задача о равновесии пластины Тимошенко с условием непроникания берегов трещины сводится к задаче о минимизации функционала энергии

$$\inf_{\boldsymbol{\xi} \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\xi}). \tag{1.4}$$

Известно, что задача (1.4) имеет единственное решение $\boldsymbol{\xi}_0 = (\boldsymbol{U}_0, u_0, \boldsymbol{\phi}_0) \in K_0(\Omega_0)$, которое удовлетворяет вариационному неравенству [16]:

$$B_0(\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}_0) \geqslant \int_{\Omega_0} \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}_0) d\mathbf{x} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in K_0(\Omega_0). \tag{1.5}$$

Сравнивая два неравенства, полученные после подстановки в (1.5) тестовых функций вида $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}_0 + \tilde{\boldsymbol{\eta}}$ и $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}_0 - \tilde{\boldsymbol{\eta}}$, где $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = (\tilde{\boldsymbol{W}}, \tilde{w}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}) \in C_0^\infty(\Omega_0)^5$, получим соотношение

$$\int_{\Omega_0} \Big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}_0)\varepsilon_{ij}(\tilde{\boldsymbol{W}}) + m_{ij}(\boldsymbol{\phi}_0)\varepsilon_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\psi}}) + q_i(u_0, \boldsymbol{\phi}_0)(\tilde{w}_{,i} + \tilde{\psi}_i)\Big) =$$

$$= \int_{\Omega_0} (f_i \tilde{w}_i + f_3 \tilde{w} + f_{3+i}\tilde{\psi}_i) \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\eta}} \in C_0^\infty(\Omega_0)^5.$$

Отсюда, учитывая независимость $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, выводим уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}(\boldsymbol{U}_0) = -f_i, \quad m_{ij,j}(\boldsymbol{\phi}_0) - q_i(u_0, \boldsymbol{\phi}_0) = -f_{3+i}, \quad i = 1, 2 \quad \text{в} \quad \Omega_0, \tag{1.6}$$

$$q_{i,i}(u_0, \boldsymbol{\phi}_0) = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_0. \tag{1.7}$$

Определим возмущенную область. Для малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ рассмотрим возмущение

$$\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = (\Phi_{\varepsilon 1}(\mathbf{x}), \Phi_{\varepsilon 2}(\mathbf{x})) \quad \text{такое, что}$$

$$\Phi_{\varepsilon i}(\mathbf{x}) \in C^1([0, \varepsilon_0); W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)), \quad i = 1, 2 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\Phi}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

При фиксированном $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ применим преобразование координат

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{1.8}$$

по отношению к Ω, $\partial\Omega$, Γ_0. В результате (при $\varepsilon \neq 0$) получим возмущенную область $\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\Omega)$ с границей $\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\partial\Omega)$ и возмущенный разрез $\Gamma_\varepsilon = \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\Gamma_0)$. Определим возмущенную область с разрезом как $\Omega_\varepsilon = \mathbf{\Phi}_\varepsilon(\Omega)\backslash\bar{\Gamma}_\varepsilon$. Отметим, что ввиду предположений относительно $\mathbf{\Phi}_\varepsilon$, для малых ε существует обратное преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}_\varepsilon^{-1}(\mathbf{y})$, где $\mathbf{\Phi}_\varepsilon^{-1}(\mathbf{y}) = (\Phi_{\varepsilon 1}^{-1}(\mathbf{y}), \Phi_{\varepsilon 2}^{-1}(\mathbf{y}))$, $\Phi_{\varepsilon i}^{-1}(\mathbf{y}) \in C^1([0,\varepsilon_0); W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$, $i = 1,2$ [11]. Кроме того, при малых ε преобразование (1.8) и обратное к нему устанавливают взаимно однозначное соответствие между Ω и $\Phi_\varepsilon(\Omega)$ [11]. Далее, не нарушая общности, будем считать, что указанные свойства взаимной однозначности и гладкости отображения $\mathbf{\Phi}_\varepsilon^{-1}$ выполняются для всех $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$.

Предположение 2. Для каждого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ набор $\{\mathbf{\Phi}_\varepsilon(\Omega), \mathbf{\Phi}_\varepsilon(\partial\Omega), \Gamma_\varepsilon\}$ удовлетворяет условиям предположения 1.

Аналогично пространству $H(\Omega_0)$ определим пространство $H(\Omega_\varepsilon)$. Согласно взаимной однозначности преобразования (1.8), строгой положительности его якобиана (будет показано ниже) и предполагаемой гладкости $\mathbf{\Phi}_\varepsilon$, отображение (1.8) также задает взаимно однозначное соответствие между пространствами $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$, т. е. если $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \in H(\Omega_0)$, то $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{\Phi}_\varepsilon^{-1}(\mathbf{y})) \in H(\Omega_\varepsilon)$ и, наоборот, если $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}) \in H(\Omega_\varepsilon)$, то $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x})) \in H(\Omega_0)$. Пусть $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon$ — единичный вектор нормали к возмущенному разрезу Γ_ε. Определим множество допустимых функций для возмущенной задачи:

$$K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) = \{\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\phi}) \in H(\Omega_\varepsilon) \,|\, [\boldsymbol{U}]\boldsymbol{\nu}^\varepsilon \geqslant h|[\boldsymbol{\phi}]\boldsymbol{\nu}^\varepsilon| \text{ п. в. на } \Gamma_\varepsilon\}.$$

Несмотря на то что пространства $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$ взаимно однозначно переходят друг в друга при отображении (1.8), множества $K_0(\Omega_0)$ и $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ не обладают в общем случае таким свойством. Это связано с тем, что, вообще говоря, единичная нормаль $\boldsymbol{\nu}$ к Γ_0 не переходит в единичную нормаль $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon$ к Γ_ε. Далее будем считать, что преобразование $\mathbf{\Phi}_\varepsilon$ и геометрия Γ_0 и Γ_ε таковы, что при всех допустимых ε выполнено

$$\boldsymbol{\nu}^\varepsilon(\mathbf{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \tag{1.9}$$

Соотношение (1.9) будет выполнено, например, при $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon = \boldsymbol{\nu} = \text{const}$ с произвольным преобразованием $\mathbf{\Phi}_\varepsilon$ или в том случае, когда нормали $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon$, $\boldsymbol{\nu}$ зависят только от x_1 (x_2) и $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon = \boldsymbol{\nu}$ с отображениями, удовлетворяющими равенству $\Phi_{\varepsilon 1} = x_1$ $(\Phi_{\varepsilon 2} = x_2)$ [12]. Выполнение условия (1.9) приводит к тому, что множество $K_0(\Omega_0)$ при отображении (1.8) переходит взаимно однозначно в множество $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$.

Сформулируем далее семейство задач, зависящих от параметра $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Функционал энергии для возмущенной области определим выражением

$$\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}B_\varepsilon(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{\xi} d\mathbf{y}, \quad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\phi}) \in H(\Omega_\varepsilon),$$

где билинейная форма задается соотношением $B_\varepsilon(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} b(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) d\mathbf{y}$.

Так же, как и для исходной задачи (1.4), следующая задача о минимизации функционала энергии в возмущенной области

$$\inf_{\boldsymbol{\xi} \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi})$$

имеет решение $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon = (\boldsymbol{U}^\varepsilon, u^\varepsilon, \boldsymbol{\phi}^\varepsilon) \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$, которое удовлетворяет вариационному неравенству

$$B_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}^\varepsilon, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}^\varepsilon) \geqslant \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}^\varepsilon) d\mathbf{y} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon). \tag{1.10}$$

Выведем далее производную функционала энергии по параметру ε, описывающему возмущение области Ω_0, т. е. вычислим предел

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)}{\varepsilon}, \tag{1.11}$$

где $\boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon$ — решения задач равновесия в невозмущенной и возмущенной областях соответственно.

2. Вспомогательные утверждения и формулы

С целью найти предел (1.11) в последующих выкладках осуществим замену переменных $\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x})$ в интегралах вариационного неравенства (1.10) и функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)$. Затем полученные выражения преобразуем с учетом гладкости отображения (1.8). При этом понадобятся формулы, уточняющие зависимость функции $\mathbf{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x})$ и ее производных от параметра ε.

Итак, обозначим через

$$\frac{\partial\mathbf{\Phi}_\varepsilon}{\partial\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_{\varepsilon 1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_{\varepsilon 2}}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial\Phi_{\varepsilon 1}}{\partial x_2} & \frac{\partial\Phi_{\varepsilon 2}}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

транспонированную матрицу Якоби преобразования (1.8). В силу заданной гладкости функции $\mathbf{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x})$ справедливы формулы:

$$\mathbf{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \varepsilon\boldsymbol{V}(\mathbf{x}) + r_1(\varepsilon,\mathbf{x}) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2, \quad \|r_1(\varepsilon,\mathbf{x})\|_{[W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)]^2} = o(\varepsilon), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = I + \varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\mathbf{x}} + r_2(\varepsilon,\mathbf{x}) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2, \quad \|r_2(\varepsilon,\mathbf{x})\|_{[L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)]^4} = o(\varepsilon), \tag{2.2}$$

где

$$\boldsymbol{V}(\mathbf{x}) = (V_1(\mathbf{x}),V_2(\mathbf{x})) = \frac{\partial\mathbf{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x})}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Из (2.1) следует, что якобиан $j_\varepsilon(\mathbf{x})$ преобразования (1.8) можно представить в виде

$$j_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1 + \varepsilon\,\mathrm{div}(\boldsymbol{V}) + r_3(\varepsilon,\mathbf{x}), \quad \|r_3(\varepsilon,\mathbf{x})\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)} = o(\varepsilon),$$

откуда следует, что для малых ε якобиан $j_\varepsilon(\mathbf{x})$ строго положительный. Положим $\Upsilon(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right)^{-1}$, тогда

$$\Upsilon(\mathbf{x}) = I - \varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\mathbf{x}} + r_4(\varepsilon,\mathbf{x}) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2, \quad \|r_4(\varepsilon,\mathbf{x})\|_{[L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)]^4} = o(\varepsilon). \tag{2.3}$$

Используя введенные выше обозначения, формулы преобразования производных можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \Big(\frac{\partial\Phi_{\varepsilon i}}{\partial x_k}\Big)\frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial}{\partial y_k} = \Upsilon_{ki}\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.4}$$

где Υ_{ki} — элементы матрицы Υ. Осуществим замену переменных $\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x})$ в интегралах неравенства (1.10). В результате получим

$$3h^{-2}\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon c_{ijkl}E_{kl}(\Upsilon;\boldsymbol{U}_\varepsilon)E_{ij}(\Upsilon;\boldsymbol{W}-\boldsymbol{U}_\varepsilon)d\mathbf{x} +$$

$$+\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon c_{ijkl}E_{kl}(\Upsilon;\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)E_{ij}(\Upsilon;\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)d\mathbf{x}+$$

$$+\Lambda\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\Upsilon_{ij}+\phi_{\varepsilon\, i}\right)\left(\frac{\partial(w-u_\varepsilon)}{\partial x_j}\Upsilon_{ij}+(\psi_i-\phi_{\varepsilon\, i})\right)d\mathbf{x}\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon \boldsymbol{F}_\varepsilon(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)d\mathbf{x}\quad \forall\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{W},w,\boldsymbol{\psi})\in K_0(\Omega_0), \tag{2.5}$$

где $\boldsymbol{\xi}_\varepsilon(\mathbf{x})=\boldsymbol{\xi}^\varepsilon(\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x}))$, $\boldsymbol{F}_\varepsilon(\mathbf{x})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x}\in\Omega_0$, $E_{ij}(\Upsilon;\boldsymbol{U})$ — трансформированный тензор деформаций:

$$E_{ij}(P;\boldsymbol{U})=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}P_{jk}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}P_{ik}\Big),\quad P=(P_{ij})_{i=1,j=1}^{2,2}\ \text{– матрица.}$$

Замечание 1. В силу взаимной однозначности отображения множеств $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ и $K_0(\Omega_0)$ функция $\boldsymbol{\xi}_\varepsilon$ является решением вариационного неравенства (2.5).

Благодаря соотношениям (2.1)–(2.4), можно получить следующие представления для интегралов, входящих в неравенство (2.5):

$$3h^{-2}\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon c_{ijkl}E_{kl}(\Upsilon;\boldsymbol{U})E_{ij}(\Upsilon;\boldsymbol{W})d\mathbf{x}=$$

$$=\int\limits_{\Omega_0}\{\sigma_{ij}(\boldsymbol{U})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W})+\varepsilon A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U},\boldsymbol{W})\}\,d\mathbf{x}+R_1(\boldsymbol{U},\boldsymbol{W}), \tag{2.6}$$

$$\Lambda\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Upsilon_{ij}+\phi_i\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\Upsilon_{ij}+\psi_i\right)d\mathbf{x}=$$

$$=\int\limits_{\Omega_0}\Big\{q_i(u,\boldsymbol{\phi})\big(\frac{\partial w}{\partial x_i}+\psi_i\big)+\varepsilon A_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\Big\}d\mathbf{x}+R_2(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}), \tag{2.7}$$

$$\int\limits_{\Omega_0} j_\varepsilon\boldsymbol{F}_\varepsilon\boldsymbol{\xi}d\mathbf{x}=\int\limits_{\Omega_0}\{\boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi}+\varepsilon\mathrm{div}(\boldsymbol{V}f_i)\xi_i\}\,d\mathbf{x}+R_3(\boldsymbol{\xi}), \tag{2.8}$$

где

$$A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U},\boldsymbol{W})=\mathrm{div}(\boldsymbol{V})\sigma_{ij}(\boldsymbol{U})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W})-$$

$$-\sigma_{ij}(\boldsymbol{U})E_{ij}\left(\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\mathbf{x}};\boldsymbol{W}\right)-\sigma_{ij}(\boldsymbol{W})E_{ij}\left(\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\mathbf{x}};\boldsymbol{U}\right), \tag{2.9}$$

$$A_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\mathrm{div}(\boldsymbol{V})q_i(u,\boldsymbol{\phi})\big(\frac{\partial w}{\partial x_i}+\psi_i\big)-q_i(u,\boldsymbol{\phi})\Big(\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial V_1}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_i}\Big)-q_i(w,\boldsymbol{\psi})\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial V_1}{\partial x_i}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_i}\right). \tag{2.10}$$

Для остаточных членов в (2.6)–(2.8) справедливы оценки

$$\|R_1(\boldsymbol{U},\boldsymbol{W})\|_{L^1(\Omega_0)}\leqslant r(\varepsilon)\|\boldsymbol{\xi}\|\|\boldsymbol{\eta}\|,\quad \|R_2(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\|_{L^1(\Omega_0)}\leqslant r(\varepsilon)\|\boldsymbol{\xi}\|\|\boldsymbol{\eta}\|,$$

$$\|R_3(\boldsymbol{\xi})\|_{L^1(\Omega_0)}\leqslant r(\varepsilon)\|\boldsymbol{\xi}\|,\quad 0\leqslant r(\varepsilon)=o(\varepsilon).$$

Заметим, что при разложении второго интеграла из левой части (2.5) можно использовать выражение вида (2.6). Легко видеть, что если $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{U},u,\boldsymbol{\phi})\in H(\Omega_0)$, $\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{W},w,\boldsymbol{\psi})\in H(\Omega_0)$, то функции $A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U},\boldsymbol{W})$, $A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi})$, $A_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ интегрируемы по области Ω_0, более того, справедливы оценки

$$\|A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U},\boldsymbol{W})\|_{L^1(\Omega_0)} \leqslant C\|\boldsymbol{\xi}\|\|\boldsymbol{\eta}\|, \quad \|A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi})\|_{L^1(\Omega_0)} \leqslant C\|\boldsymbol{\xi}\|\|\boldsymbol{\eta}\|,$$

$$\|A_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\|_{L^1(\Omega_0)} \leqslant C\|\boldsymbol{\xi}\|\|\boldsymbol{\eta}\| \tag{2.11}$$

с некоторой постоянной $C>0$, не зависящей от $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, ε.

Осуществим преобразования в интегралах неравенства (2.5) с помощью формул (2.6)–(2.8). Потом в полученном соотношении применим оценки (2.11), а также оценки для остаточных членов R_i, $i=1,2,3$. В результате получим следующее неравенство:

$$B_0(\boldsymbol{\xi}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}_\varepsilon) \geqslant \int\limits_{\Omega_0} \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)d\mathbf{x} - \\ -|\varepsilon|C(\|\boldsymbol{\eta}\|+\|\boldsymbol{\xi}_\varepsilon\|)(\|\boldsymbol{\xi}_\varepsilon\|+1) \quad \forall \boldsymbol{\eta}\in K_0(\Omega_0), \tag{2.12}$$

с некоторой не зависящей от ε постоянной $C>0$.

Проведем замену переменных $\mathbf{y}=\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x})$ в интегралах функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon,\boldsymbol{\xi})$. А затем применим разложения по ε (2.6)–(2.8). В результате получим новый функционал энергии $\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi})$, определенный в пространстве $H(\Omega_0)$:

$$\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}B_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) - \int\limits_{\Omega_0}\boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi}d\mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_0}\big\{A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) + \\ + A_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) + \frac{h^2}{3}A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\phi})\big\}d\mathbf{x} - \varepsilon\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}(\boldsymbol{V}f_i)\xi_i d\mathbf{x} + R_4(\boldsymbol{\xi}), \tag{2.13}$$

$$\|R_4(\boldsymbol{\xi})\|_{L^1(\Omega_0)} \leqslant r(\varepsilon)(\|\boldsymbol{\xi}\|^2+\|\boldsymbol{\xi}\|), \quad 0\leqslant r(\varepsilon)=o(\varepsilon).$$

Из неравенства, полученного подстановкой в (2.12) тестовой функций $\boldsymbol{\eta}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_\varepsilon$, с помощью (1.2) получим равномерную оценку

$$\|\boldsymbol{\xi}_\varepsilon\| \leqslant c. \tag{2.14}$$

Теорема 1. Пусть $\boldsymbol{\xi}_\varepsilon$ — решение задачи (2.5), $\boldsymbol{\xi}_0$ — решение задачи (1.4). Тогда справедлива оценка

$$\|\boldsymbol{\xi}_0-\boldsymbol{\xi}_\varepsilon\| \leqslant c\sqrt{\varepsilon}, \tag{2.15}$$

где константа c не зависит от ε.

Доказательство. Для того чтобы убедиться в справедливости (2.15), достаточно сложить два неравенства, полученные подстановкой пробных функций в вариационные неравенства, и применить оценки (1.2), (2.14). При этом в вариационное неравенство (1.5) подставляем $\boldsymbol{\xi}_\varepsilon$, а в (2.12) — функцию $\boldsymbol{\xi}_0$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и оценки (2.14) вытекает очевидное следствие.

Следствие. При $\varepsilon\to 0$ функции $\boldsymbol{\xi}_\varepsilon=(\boldsymbol{U}_\varepsilon,u_\varepsilon,\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)$ сходятся к функции $\boldsymbol{\xi}_0 = (\boldsymbol{U}_0,u_0,\boldsymbol{\phi}_0)$ сильно в $H(\Omega_0)$. Справедливы также следующие сходимости:

$$E_{ij}\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \mathbf{x}};\boldsymbol{U}_\varepsilon\right) \to E_{ij}\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \mathbf{x}};\boldsymbol{U}_0\right) \quad \text{сильно в} \quad L_2(\Omega_0), \quad i,j=1,2,$$

$$E_{ij}\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \mathbf{x}};\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\right) \to E_{ij}\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \mathbf{x}};\boldsymbol{\phi}_0\right) \quad \text{сильно в} \quad L_2(\Omega_0), \quad i,j=1,2,$$

$$A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}_\varepsilon,\boldsymbol{U}_\varepsilon) \to A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}_0,\boldsymbol{U}_0) \quad \text{сильно в} \quad L_1(\Omega_0),$$

$$A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\phi}_\varepsilon,\boldsymbol{\phi}_\varepsilon) \to A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\phi}_0,\boldsymbol{\phi}_0) \quad \text{сильно в} \quad L_1(\Omega_0),$$

$$A_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\xi}_\varepsilon,\boldsymbol{\xi}_\varepsilon) \to A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\xi}_0,\boldsymbol{\xi}_0) \quad \text{сильно в} \quad L_1(\Omega_0).$$

3. Вывод формулы для производной функционала энергии

Для того чтобы вычислить производную функционала энергии по параметру возмущения ε, необходимо найти предел (1.11). Итак, в силу замечания 1 имеем

$$\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)=\inf_{\boldsymbol{\xi}\in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)}\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi})=\inf_{\boldsymbol{\xi}\in K_0(\Omega_0)}\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi})=\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_\varepsilon).$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)}{\varepsilon}=\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)}{\varepsilon}\leqslant\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\limsup_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)}{\varepsilon}\leqslant\limsup_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)}{\varepsilon}. \tag{3.1}$$

Найдем предел, стоящий в правой части (3.1). Принимая во внимание ограниченность R_4 в формуле (2.13), получаем

$$\limsup_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)}{\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left\{A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}_0,\boldsymbol{U}_0)+A_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\xi}_0,\boldsymbol{\xi}_0)+\frac{h^2}{3}A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\phi}_0,\boldsymbol{\phi}_0)\right\}d\mathbf{x}-\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}(\boldsymbol{V}f_i)\xi_{0i}d\mathbf{x}.$$

Поскольку $\boldsymbol{\xi}_0$ доставляет минимум функционала $\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi})$, справедливо следующее неравенство $\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)\geqslant\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)$. И, как следствие, выполняется соотношение

$$\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)}{\varepsilon}\geqslant\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Отсюда, переходя к пределу, находим

$$\liminf_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)}{\varepsilon}\geqslant\liminf_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{3.2}$$

Используя при нахождении предела в правой части (3.2) следствие теоремы 1, ограниченность R_4 в формуле (2.13), выведем

$$\liminf_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_\varepsilon)}{\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left\{A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}_0,\boldsymbol{U}_0)+A_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\xi}_0,\boldsymbol{\xi}_0)+\frac{h^2}{3}A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\phi}_0,\boldsymbol{\phi}_0)\right\}d\mathbf{x}-\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}(\boldsymbol{V}f_i)\xi_{0i}d\mathbf{x}.$$

Таким образом, нижний предел последовательности $\left\{\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\boldsymbol{\xi}_0)}{\varepsilon}\right\}$ оценивается снизу той же константой, которой оценивается верхний предел этой последовательности сверху. Следовательно, предел (справа) существует и равен этой константе. Подытожим предыдущие рассуждения в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Производная (справа) функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)$ по параметру ε возмущения области Ω_0 существует и задается формулой

$$\left.\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left\{A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}_0,\boldsymbol{U}_0)+A_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\xi}_0,\boldsymbol{\xi}_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{h^2}{3}A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\phi}_0,\boldsymbol{\phi}_0)\right\}d\mathbf{x}-\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}(\boldsymbol{V}f_i)\xi_{0i}d\mathbf{x}. \tag{3.3}$$

где $\boldsymbol{\xi}_0 = (\boldsymbol{U}_0, u_0, \boldsymbol{\phi}_0)$ — решение задачи (1.4), а A_1, A_2 определяются формулами (2.9), (2.10).

Замечание 2. Для двух разных возмущений $\boldsymbol{\Phi}^1_\varepsilon$, $\boldsymbol{\Phi}^2_\varepsilon$, переводящих область с разрезом Ω_0 в одну и ту же возмущенную область Ω_ε при всех ε, соответствующие производные функционала энергии равны. Это следует из того, что решения $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon$ и функционал энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon, \boldsymbol{\xi}^\varepsilon)$ не зависят от выбора функции возмущения $\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$.

Замечание 3. В частном случае, когда возмущение имеет вид $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \varepsilon(\theta(\mathbf{x}), 0)$, $\theta(\mathbf{x}) \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, а трещина задается прямолинейным отрезком $\Gamma_0 = \{(x_1, x_2) | \, 0 < x_1 < l, x_2 = 0\}$, $l > 0$, выражение (3.3) обращается в формулу для производной по длине трещины, полученную ранее в [9].

4. Инвариантные интегралы

В этом пункте выполняя преобразования для правой части (3.3), получим инвариантные интегралы по замкнутым кривым. При этом, как и в работах относительно двумерных тел с трещинами [11; 12], эти кривые ограничивают области, в которых внешние нагрузки равны нулю. Для удобства условимся далее опускать индекс 0 в обозначениях решения задачи (1.5) для невозмущенной области, т. е. будем считать, что $\boldsymbol{\xi}_0 = (\boldsymbol{U}_0, u_0, \boldsymbol{\phi}_0) = \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\phi})$

Справедлива следующая лемма об интегрировании по частям [12; 14].

Лемма 1. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевой границей ∂D такова, что $D \subset \subset \Omega$; функция $\boldsymbol{W} = (w_1, w_2)$ принадлежит пространству $H^2(D)^2$. Тогда справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_D A_1(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}) d\mathbf{x} = 2 \int\limits_D (\boldsymbol{V}\nabla w_i) \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{W}) d\mathbf{x} +$$

$$+ 2 \int\limits_{\partial D} \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}) \Big(\frac{1}{2} (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) - n_j (\boldsymbol{V}\nabla w_i) \Big) dl, \tag{4.1}$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя единичная нормаль к ∂D.

Заметим, что, умножив обе стороны (4.1) на $h^2/3$, с учетом зависимостей (1.1) можно получить следующую формулу:

$$\frac{h^2}{3} \int\limits_D A_1(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}) d\mathbf{x} = 2 \int\limits_D (\boldsymbol{V}\nabla w_i) m_{ij,j}(\boldsymbol{W}) d\mathbf{x} +$$

$$+ 2 \int\limits_{\partial D} m_{ij}(\boldsymbol{W}) \Big(\frac{1}{2} (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) - n_j (\boldsymbol{V}\nabla w_i) \Big) dl. \tag{4.2}$$

Понадобится еще одна формула интегрирования по частям. Предположим, что выполнены следующие включения $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in H^2(D)^2$, $w \in H^2(D)$, где область D удовлетворяет условиям леммы 1. С помощью классических формул Грина можно показать, что справедливо следующее соотношение:

$$\int\limits_D A_2(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) dx = 2 \int\limits_D \Big\{ q_{i,i}(w, \boldsymbol{\psi})(\boldsymbol{V}\nabla w) - (\boldsymbol{V}\nabla \psi_i) q_i(w, \boldsymbol{\psi}) \Big\} d\mathbf{x} +$$

$$+2 \int\limits_{\partial D} q_i(w, \boldsymbol{\psi}) \Big(\frac{1}{2} (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})(w_{,i} + \psi_i) - n_i (\boldsymbol{V}\nabla w) \Big) dl. \tag{4.3}$$

Пусть область $G \subset \Omega$ такая, что область $\Omega_0 \cap G$ имеет липшицеву границу. Кроме того, предположим, что для этой области G решение $\boldsymbol{\xi}$ задачи (1.4) принадлежит $H^2(\Omega_0 \cap G)^5$. Представим формулу (3.3), выражающую производную функционала энергии, в виде суммы двух интегралов по множествам $\Omega_0 \cap G$ и $\Omega_0 \backslash G$. Затем проинтегрируем по частям интегралы по области $\Omega_0 \cap G$. Не нарушая общности, через $\boldsymbol{n}$ будем обозначать единичную внешнюю нормаль к границе той области, относительно которой применяются формулы интегрирования по частям. С учетом формул (4.1)–(4.3) получим

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\big\{A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) + A_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) +$$

$$+\frac{h^2}{3}A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\phi})\big\}d\mathbf{x} - \int\limits_{\Omega_0}\operatorname{div}(\boldsymbol{V}f_i)\xi_i d\mathbf{x} = I_1 + I_2 + I_3 + I(\boldsymbol{V}), \tag{4.4}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{\Omega_0\cap G}\Big\{(\boldsymbol{V}\nabla u_i)(\sigma_{ij,j}(\boldsymbol{U}) + f_i) + (q_{i,i}(u,\boldsymbol{\phi}) + f_3)(\boldsymbol{V}\nabla u) +$$

$$+ (\boldsymbol{V}\nabla\phi_i)(m_{ij,j}(\boldsymbol{\phi}) - q_i(u,\boldsymbol{\phi}) + f_{3+i})\Big\}d\mathbf{x},$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0\backslash G}\big\{A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) + A_2(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) + \frac{h^2}{3}A_1(\boldsymbol{V},\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\phi})\big\}d\mathbf{x}$$

$$I_3 = -\int\limits_{\partial(\Omega_0\cap G)} f_i\xi_i(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})dl - \int\limits_{\Omega_0\backslash G}\operatorname{div}(\boldsymbol{V}f_i)\xi_i)d\mathbf{x},$$

$$I(\boldsymbol{V}) = \int\limits_{\partial(\Omega_0\cap G)}\Big\{\sigma_{ij}(\boldsymbol{U})\Big(\frac{1}{2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}) - n_j(\boldsymbol{V}\nabla u_i)\Big) + m_{ij}(\boldsymbol{\phi})\Big(\frac{1}{2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\phi}) -$$

$$-n_j(\boldsymbol{V}\nabla\phi_i)\Big) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \phi_i)q_i(u,\boldsymbol{\phi}) - q_i(u,\boldsymbol{\phi})n_i(\boldsymbol{V}\nabla u)\Big\}dl.$$

Заметим, что в силу уравнений равновесия (1.6), (1.7) интеграл I_1 равен нулю.

Рассмотрим теперь конкретные случаи выбора набора $\{\Omega, \partial\Omega, \Gamma_0\}$, функции $\boldsymbol{F}$, области G и векторного поля $\boldsymbol{V}$, которые после преобразования интегралов в правой части (4.4) приведут к инвариантным интегралам. Во всех примерах нам придется выбирать окрестности S_1, S_2 с липшицевыми границами ∂S_1, ∂S_2. С целью получения инвариантных интегралов будем использовать отображения, описывающие возмущение сдвига и возмущение вершины трещины.

Возмущение сдвига.

Пусть кривая $\bar{\Gamma}_0$ является прямолинейным отрезком, лежащим на прямой $(\mathbf{x} - \boldsymbol{a})\boldsymbol{\nu} = 0$. Кроме того, потребуем, чтобы кривая Γ_0 находилась строго внутри Ω. Пусть набор $\{\Omega, \partial\Omega, \Gamma_0\}$ удовлетворяет условиям предположения 1. Рассмотрим вспомогательную функцию $\zeta \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbf{R}^2)$ с носителем в малой окрестности S_1 кривой Γ_0 (полагаем, что $\bar{S}_1 \subset \Omega$). Предположим, что во всех точках окрестности S_2 кривой Γ_0 (S_2 такая, что $\bar{\Gamma}_0 \subset S_2$) значение функции ζ равно единице (см. рис. 1).

Для произвольного фиксированного вектора $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ рассмотрим возмущение

$$\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon = I + \varepsilon\zeta\boldsymbol{p}. \tag{4.5}$$

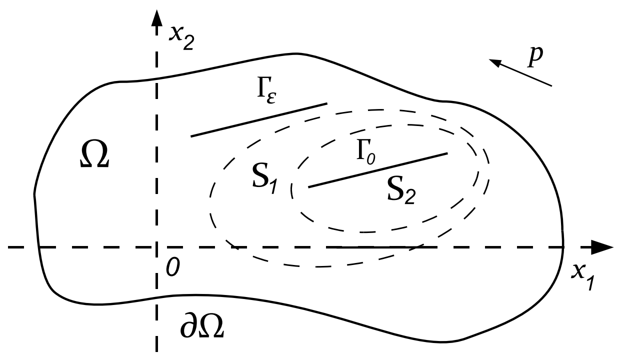

Рис. 1. Окрестности S_1 и S_2 для прямолинейной трещины Γ_0

При этом Γ_0 отображается в кривую Γ_ε — часть прямой $(\mathbf{y}-\varepsilon\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{\nu}=0$, область Ω при отображении не меняется, т. е. $\Omega=\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\Omega)$. Возмущенная область с трещиной примет вид $\Omega_\varepsilon=\Omega\backslash\bar{\Gamma}_\varepsilon$. Для преобразования (4.5) соответствующее векторное поле $\boldsymbol{V}$ выражается равенством $\boldsymbol{V}=(p_1\zeta,p_2\zeta)$. По построению, предположение 2 выполняется для малых ε. Поскольку $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon=\boldsymbol{\nu}=const$, то справедливо и условие (1.9). Рассмотрим область $G_1=S_1\backslash\bar{S}_2$. Эта область имеет липшицевую границу $\partial S_1\cup\partial S_2$. Кроме того, согласно результатам о внутренней регулярности решений вариационных задач, решение $\boldsymbol{\xi}$ принадлежит $H^2(\Omega_0\cap G_1)^5$ [19]. Преобразуем теперь формулу (4.4) для $\boldsymbol{V}=(p_1\zeta,p_2\zeta)$, взяв в качестве G область $G_1=S_1\backslash\bar{S}_2$. С учетом свойств функции ζ в S_2 производные от $V_i=p_i,\ i=1,2$, обращаются в нуль, а в $\Omega_0\backslash S_1$ справедливо равенство $\boldsymbol{V}=(0,0)$. Это означает, что интеграл I_2 равен нулю.

Пусть функция внешних нагрузок удовлетворяет равенству

$$\boldsymbol{F}=(0,0,0,0,0) \quad \text{в} \quad S_2. \tag{4.6}$$

Границу области $\Omega_0\cap G_1$ можно представить в виде $\partial(\Omega_0\cap G_1)=\partial S_1\cup\partial S_2$. Легко видеть, что свойства функции $\boldsymbol{V}$ вместе с равенством (4.6) приводят к тому, что выражение I_3 равно нулю. Таким образом, замечая, что $\boldsymbol{V}=(0,0)$ на ∂S_1, формулу (4.4) запишем в виде

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\int\limits_{\partial S_2}\Big\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n})b(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})-\sigma_{ij}(\boldsymbol{U})n_j(\frac{\partial u_i}{\partial p})-$$
$$-m_{ij}(\boldsymbol{\phi})n_j(\frac{\partial\phi_i}{\partial p})-q_i(u,\boldsymbol{\phi})n_i(\frac{\partial u}{\partial p})\Big\}dl. \tag{4.7}$$

Поскольку производная функционала, в соответствии с замечанием 1, не зависит от выбора срезающей функции ζ, то интеграл (4.7) не зависит от замкнутой кривой ∂S_2. Это означает, что в формуле (4.7) вместо ∂S_2 можно взять произвольную достаточно гладкую замкнутую кривую L без самопересечений, ограничивающую некоторую область $\mathcal{O}_L(\Gamma_0)$, для которой $\bar{\mathcal{O}}_L(\Gamma_0)\subset\Omega$, $\bar{\Gamma}_0\subset\mathcal{O}_L(\Gamma_0)$ и $\boldsymbol{F}=(0,0,0,0,0)$ в $\mathcal{O}_L(\Gamma_0)$.

Инвариантный интеграл вида (4.7) существует и для кривой Γ_0, лежащей строго внутри Ω, которая описывается уравнением $x_2=g(x_1)$ $(x_1=g(x_2))$, с достаточно гладкой функцией g. В этом случае выбираем отображение сдвига $\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon=I+\varepsilon\zeta\boldsymbol{p}$ в направлении вектора $\boldsymbol{p}=(0,1)$ $(\boldsymbol{p}=(1,0))$. Тогда условие (1.9) выполняется. Далее, с целью получения инвариантного интеграла, как и выше, требуем выполнение условий предположения 1 и равенства $\boldsymbol{F} = (0,0,0,0,0)$ в окрестности $\mathcal{O}(\Gamma_0)$ кривой Γ_0.

Возмущение вершины трещины

Предположим, что область Ω делится кривой без самопересечений Ξ на две подобласти Ω_1 и Ω_2 так, чтобы $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \bar{\Xi}$, $\mathrm{meas}(\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) > 0$, $i = 1, 2$. Потребуем также чтобы границы областей Ω_1 и Ω_2 были липшицевыми. Кривая Ξ на плоскости (x_1, x_2) задается функцией $g \in C^{0,1}(-l_0, l_1)$ так, что $\Xi = \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 = g(x_1),\ -l_0 < x_1 < l_1\}$, $\quad l_0 > 0$, $l_1 > 1$, где функция g удовлетворяет равенству $g = 0$ на интервале $I_\delta = (1-\delta, 1+\delta)$ с некоторым фиксированным $\delta > 0$. Пусть $\Gamma_0 = \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 = g(x_1),\ a < x_1 < 1\}$, где $-l_0 \leqslant a \leqslant 0$. Отметим, что, когда $a = -l_0$, кривая Γ_0 выходит на внешнюю границу $\partial\Omega$.

Очевидно, что набор $\{\Omega, \partial\Omega, \Gamma_0\}$ удовлетворяет условиям предположения 1. Выберем срезающую функцию $\zeta(\mathbf{x}) \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbf{R}^2)$, финитную в области Ω и такую, что $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ для всех $\mathbf{x} \in \Omega$. Далее, полагаем, что носитель функции $\mathrm{supp}\,\zeta$ содержится в окрестности $S_1 \subset \bar{S_1} \subset \Omega \cap (I_\delta \times \mathbb{R})$ точки $\mathbf{x}^0 = (1, 0)$, и $\zeta = 1$ в некоторой окрестности S_2 точки $\mathbf{x}^0$. Кроме того, потребуем, чтобы область $\Omega_0 \cap G_2$ имела липшицевую границу, где $G_2 = S_1 \backslash \bar{S}_2$, см. рис. 2.

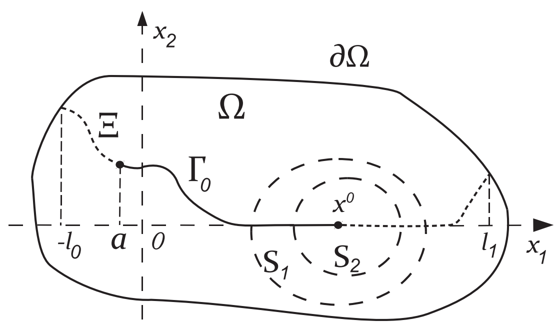

Рис. 2. Окрестности S_1 и S_2 вершины трещины x^0

Рассмотрим отображение

$$\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon = I + \varepsilon(\zeta, 0), \quad \boldsymbol{V} = (\zeta, 0) \tag{4.8}$$

с положительным параметром ε. Заметим, что при отображении (4.8) кривая Γ_0 (для малых ε) отображается в кривую Γ_ε, которая вблизи точки $\mathbf{x}^0$ лежит на прямой $x_2 = 0$. Таким образом, преобразование (4.8) соответствует развитию (подрастанию) трещины по направлению прямой $x_2 = 0$. Как и в предыдущем случае (при возмущении сдвига), область Ω при отображении не меняется, т. е. $\Omega = \Phi_\varepsilon(\Omega)$. Возмущенная область с трещиной примет вид $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \bar{\Gamma}_\varepsilon$. Предположение 2 выполняется в силу свойств кривой Ξ. Как известно, решение $\boldsymbol{\xi}$ задачи (1.4) обладает дополнительной локальной гладкостью в области $\Omega_0 \cap G_2$, а именно справедливо включение $\boldsymbol{\xi} \in H^2(\Omega_0 \cap G_2)$ [17]. Осуществим преобразования в формуле (4.4), рассматриваемой относительно $\boldsymbol{V} = (\zeta, 0)$ и $G = G_2$. Во-первых, заметим, что граница области $\Omega_0 \cap G_2$ состоит из четырех частей:

$$\partial S_1, \quad \partial S_2, \quad (S_1 \backslash \bar{S}_2) \cap \Gamma_0^+, \quad (S_1 \backslash \bar{S}_2) \cap \Gamma_0^-.$$

Как и в первом случае, интеграл I_2 равен нулю. В самом деле, в области S_2 производные от $V_1 = 1$, $V_2 = 0$ обращаются в нуль, а в $\Omega_0 \backslash S_1$ выполняется равенство $\boldsymbol{V} = (0, 0)$.

Пусть функция внешних нагрузок удовлетворяет равенству

$$\boldsymbol{F} = (0,0,0,0,0) \quad \text{в} \quad S_2. \tag{4.9}$$

Заметим, что в этом случае для функции $\boldsymbol{V} = (\zeta, 0)$ выполнено равенство $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n} = \zeta n_1$. Таким образом, для суммы интегралов I_3 имеем

$$I_3 = \int\limits_{\partial S_1} \zeta n_1 f_i \xi_i dl + \int\limits_{(S_1\setminus\bar{S}_2)\cap\Gamma_0^+} \zeta n_1 f_i \xi_i dl +$$

$$+ \int\limits_{(S_1\setminus\bar{S}_2)\cap\Gamma_0^-} \zeta n_1 f_i \xi_i dl + \int\limits_{\partial S_2} \zeta n_1 f_i \xi_i dl - \int\limits_{\Omega_0\setminus G_2} \operatorname{div}(\boldsymbol{V} f_i)\xi_i d\mathbf{x}. \tag{4.10}$$

Первые три интеграла в (4.10) равны нулю вследствие того, что на ∂S_1 функция ζ обращается в нуль, на границах $(S_1\setminus\bar{S}_2)\cap\Gamma_0^\pm$ выполняется равенство $n_1 = 0$. Последние два слагаемых в (4.10) равны нулю в силу (4.9) и равенства $\boldsymbol{V} = (0,0)$ в $\Omega_0\setminus S_1$. В итоге выражение I_3 равно нулю. Таким образом, замечая, что $\zeta = 0$ на ∂S_1, $\zeta = 1$ на ∂S_2, формулу (4.4) для области G_2 запишем в виде

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int\limits_{\partial S_2} \Big(\frac{1}{2} n_1 b(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) n_j u_{i,1} -$$

$$- m_{ij}(\boldsymbol{\phi}) n_j \phi_{i,1} - q_i(u,\boldsymbol{\phi}) n_i u_{,1}\Big) dl + \int\limits_{(S_1\setminus\bar{S}_2)\cap\Gamma_0^\pm} \Big(- \zeta\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) n_j u_{i,1} -$$

$$- \zeta m_{ij}(\boldsymbol{\phi}) n_j \phi_{i,1} - \zeta q_i(u,\boldsymbol{\phi}) n_i u_{,1}\Big) dl. \tag{4.11}$$

Проведем рассуждения, позволяющие установить, что интегралы в (4.11) по $(S_1\setminus\bar{S}_2)\cap\Gamma_0^\pm$ равны нулю. Вследствие ограниченности функции ζ, очевидно, что для подынтегральной функции второго слагаемого в (4.11) выполнено неравенство

$$| - \zeta\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) n_j u_{i,1} - \zeta m_{ij}(\boldsymbol{\phi}) n_j \phi_{i,1} - \zeta q_i(u,\boldsymbol{\phi}) n_i u_{,1} | \leqslant$$

$$\leqslant |\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) n_j u_{i,1} + m_{ij}(\boldsymbol{\phi}) n_j \phi_{i,1} + q_i(u,\boldsymbol{\phi}) n_i u_{,1} | \quad \text{на} \quad (S_1\setminus\bar{S}_2)\cap\Gamma_0^\pm.$$

Произвольность выбора функции ζ, в частности, означает, что граница ∂S_1 может быть взята так, чтобы мера интервала $(S_1\setminus\bar{S}_2)\cap\Gamma_0$ была сколь угодно малой. В то же время левая часть (4.11) не зависит от выбора функции ζ. Это позволяет утверждать, что интегралы по $(S_1\setminus\bar{S}_2)\cap\Gamma_0^\pm$ равны нулю в силу локальной дополнительной гладкости $\boldsymbol{\xi}$ в области $\Omega_0\cap G_2$ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Итак, для второго случая инвариантный интеграл имеет вид

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int\limits_{\partial S_2} \Big(\frac{1}{2} n_1 b(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) n_j u_{i,1} - m_{ij}(\boldsymbol{\phi}) n_j \phi_{i,1} - q_i(u,\boldsymbol{\phi}) n_i u_{,1}\Big) dl. \tag{4.12}$$

В соответствии с замечанием 1, правая часть (4.12) не зависит от выбора срезающей функции ζ. Следовательно, интеграл (4.12) не зависит от выбора замкнутой кривой ∂S_2. Это означает, что в формуле (4.12) вместо ∂S_2 можно взять произвольную достаточно гладкую замкнутую кривую L без самопересечений, ограничивающую некоторую малую окрестность $\mathcal{O}_L(\mathbf{x}^0)$, для которой $\bar{\mathcal{O}}_L(\mathbf{x}^0) \subset \Omega\cap(I_\delta\times\mathbb{R})$, $\boldsymbol{F} = (0,0,0,0,0)$ в $\mathcal{O}_L(\mathbf{x}^0)$.

Заключение

В статической задаче о равновесии пластины Тимошенко со сквозной трещиной проведен анализ зависимости функционала энергии от возмущения области, занимаемой пластиной в срединной плоскости. Нелинейность исследованной задачи обусловлена краевыми условиями вида неравенств (типа Синьорини) (1.3), заданными на трещине и моделирующими непроникание противоположных берегов трещины. Найдена формула производной функционала энергии по параметру возмущения (3.3). Приведен ряд примеров, для которых производная функционала энергии представляется в виде инвариантного интеграла по произвольному замкнутому контуру.

Полученные инвариантные интегралы для задачи о равновесии пластины с нелинейными краевыми условиями могут быть использованы в задачах квазистатического роста трещины, оптимизации ее формы и расположения в пластине. Поскольку найденные инвариантных интегралов равны производной функционала энергии, то они могут быть использованы для приближенного отыскания функционала энергии в возмущенной задаче.

Литература

[1] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

[2] Черепанов Г.П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. М.: Недра, 1987. 308 с.

[3] Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во "Самарский университет". 2001. 562 с.

[4] Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1985. 505 с.

[5] Knowles J.K., Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // Archive for rational mechanics and analysis. 1972. V. 44. № 3. С. 187–211.

[6] Sosa H., Herrmann G. On invariant integrals in analysis of cracked plates // International Journal of Fracture. 1989. V. 40. P. 111–126.

[7] Naganarayana B.P, Atluri S.N. Energy-release-rate evaluation for delamination growth prediction in multi-plate model of a laminate composite // Computational Mechanics. 1995. V. 15. № 5. P. 443–459.

[8] Михайлов Б.К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 196 с.

[9] Лазарев Н.П. Дифференцирование функционала энергии в задаче о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину // ПМиТФ. 2012. Т. 53. № 2. С. 175–185.

[10] Khludnev A.M., Kovtunenko V.A. Analysis of cracks in solids. Southampton-Boston: WIT Press, 2000. 408 p.

[11] Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010. 252 с.

[12] Ковтуненко В.А. Инвариантные интегралы энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67. № 1. С. 109–123.

[13] Хлуднев А.М., Андерссон Л.-Э. Трещина, выходящая на контактную границу. Метод фиктивных областей и инвариантные интегралы // Сиб. журн. индустр. матем. 2008. Т. 11. № 3. С. 15–29.

[14] Рудой Е.М. Инвариантные интегралы в плоской задаче теории упругости для тел с жесткими включениями и трещинами // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15. № 1. С. 99–109.

[15] Рудой Е.М. Инвариантные интегралы для задачи равновесия пластины с трещиной // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45. № 2. С. 466–477.

[16] Лазарев Н.П. Итерационный метод штрафа для нелинейной задачи о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину // Сиб. журн. вычисл. матем. 2011. Т. 14. № 4. С. 381–392.

[17] Лазарев Н.П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14. № 4. С. 32–43.

[18] Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.

[19] Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Наука, 1974. 160 с.

Поступила в редакцию 13/ III/2013;
в окончательном варианте — 13/ III/2013.

INVARIANT INTEGRALS IN EQUILIBRIUM PROBLEM FOR A TIMOSHENKO TYPE PLATE WITH THE SIGNORINI TYPE CONDITION ON THE CRACK

 N.P. Lazarev[3]

The equilibrium problem for the elastic Timoshenko type plate with a crack is considered. On the crack faces, the non-penetration conditions of inequality type (Signorini type conditions) are given. It is proved that there exist invariant integrals that are equal to the derivative of the energy functional with respect to perturbation parameter.

Key words: crack, Timoshenko-type plate, variational problem, non-penetration condition.

Paper received 13/ III/2013.
Paper accepted 13/ III/2013.

[3]Lazarev Nyurgun Petrovich (`nyurgun@ngs.ru`), Scientific Research Institute of Mathematics, North-Eastern Federal University, Yakutsk, 677891, Russian Federation; Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090, Russian Federation.