УДК 523.529.5

К ТЕОРИИ ОБЪЕМНОГО ПЕНООБРАЗОВАНИЯ ГАЗОНАСЫЩЕННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ СБРОСЕ ДАВЛЕНИЯ

© 2013 В.Ш. Шагапов[1], А.В. Ялаев[2]

Рассмотрена задача о сбросе давления в газонасыщенной жидкости. Установлено, что чем меньше исходный радиус газового зародыша, тем больше падение давления в жидкости по сравнению с равновесным давлением. Построено решение, описывающее переход системы из метастабильного состояния в равновесное двухфазное состояние. Установлено, что характерное время выхода из метастабильного состояния достаточно сильно зависит от исходного числа газовых зародышей.

Ключевые слова: газовый зародыш, состояние насыщения, двухфазная жидкость.

Введение

Газонасыщенные жидкости, находящиеся под высоким давлением, представляют широкий интерес для изучения, поскольку такие жидкости используют в производстве, например газированной воды, кумыса, шампанского. Представляет интерес динамика изменения давления, объемного газосодержания, размера газовых зародышей в случае разгерметизации емкостей с газонасыщенными жидкостями, находящимися под давлением, превышающим давление насыщения.

Отмечено [1], что растворимость может оказать существенную роль для сжимаемости газожидкостной смеси в целом. Когда фазовые переходы отсутствуют, сжимаемость смеси определяется сжимаемостью ее составляющих. Если же при течении смеси происходит растворение газа в жидкости или, наоборот, выделение растворенного в жидкости газа в виде отдельной газовой фазы, то эти фазовые переходы обуславливают некоторую дополнительную сжимаемость. В некоторых случаях такая эффективная сжимаемость за счет фазовых переходов может быть более сильной, чем сжимаемость смеси за счет сжимаемости ее составляющих. Примером такой двухфазной системы, для которой могут проявляться отмеченный эффект, являются газированная вода, шампанское, кумыс, а также газонасыщенные углеводородные смеси. В этих системах, в отличие от обычных водовоздушных смесей, например, наблюдается более высокая растворимость газовой

[1]Шагапов Владислав Шайхулгазамович (shagapov@rambler.ru), Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450025, Российская Федерация, г. Уфа, пр. Октября, 71.

[2]Ялаев Андрей Витальевич (yavafly@mail.ru), кафедра математического анализа и прикладной математики Бирского филиала Башкирского государственного университета, 452453, Российская Федерация, г. Бирск, Интернациональная, 10.

фазы в жидкости. В случае шампанского (газированной воды или кумыса) такую газовую фазу в основном составляет двуокись углерода.

1. Постановка задачи. Уравнение состояния

Пусть в исходном состоянии газонасыщенная жидкость находится под давлением p_0, а массовая концентрация растворенного газа составляет k_0. Здесь отметим, что величина k_0 всегда обычно значительно меньше единицы ($k_0 << 1$). Даже для самых высокорастворимых газов она составляет обычно не более одной тысячной ($k_0 \leqslant 10^{-3}$). Поэтому за массовую концентрацию растворенного газа k_d можно взять массу газа, приходящуюся на единицу массы жидкости. Будем полагать, что при снижении давления p_d ниже значения p_0 значение текущей концентрации растворенного газа удовлетворяет условию насыщения. При этом для условия насыщения, в свою очередь, выполняется закон Генри:

$$k_d = \frac{k_0}{p_{d0}} p_d, \tag{1}$$

где p_{d0} — давление на линии насыщения, k_0 — массовая концентрация растворенного газа при давлении p_0.

Кроме того, в жидкости, находящейся при температуре $T = T_0$ и под давлением $p = p_0 = p_{l0}$, имеются малорастворимые газовые зародыши с радиусами $a = a_0$ и с объемным содержанием α_0. Для газонасыщенной смеси примем закон Дальтона, а также для растворимого и малорастворимого газов примем уравнение Менделеева — Клапейрона:

$$p_g = p_u + p_d, p_d = \rho_d^0 R_d T_0, p_u = \rho_u^0 R_u T_0, \tag{2}$$

где нижний индекс d относится к растворимому газу (dissolve), u — к нерастворимому (undissolve). Как видно из формулы (1), со снижением давления значение массовой концентрации также снижается. Массовая концентрация выделившегося газа при переходе системы из состояния с концентрацией k_0 в состояние с концентрацией k_d определяется формулой:

$$x_v = k_0 - k_d = k_0 \left(1 - \frac{p_d}{p_{d0}}\right).$$

Для средней плотности смеси запишем:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_l^0} + \frac{k_0}{\rho_g^0} \left(1 - \frac{p_d}{p_{d0}}\right). \tag{3}$$

С учетом того, что $\rho = \rho_l^0 (1 - \alpha) + \rho_g^0 \alpha$, из (3) получим:

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{k_0 \rho_l^0}{\rho_g^0} \left(1 - \frac{p_d}{p_{d0}}\right), \tag{4}$$

где $\rho_g^0 = \rho_d^0 + \rho_u^0$.

Тогда условие равновесия для текущих значений давлений жидкости $p = p_l$ и газа p_g (растворимый и нерастворимый) во всем объеме с учетом капиллярных сил на межфазной поверхности запишется в виде:

$$p + \frac{2\sigma}{a} = p_u + p_d, \tag{5}$$

а для исходного состояния, для которого $p_{d0} = p_s\left(k_0\right)$, — в виде:

$$p_0 + \frac{2\sigma}{a_0} = p_{u0} + p_s\left(k_0\right). \tag{6}$$

Парциальное давление нерастворимого газа в изотермическом случае определяется соотношением:

$$p_u = p_{u0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3. \tag{7}$$

Из уравнений (5), (6) и (7) можно получить уравнение, связывающее текущее давление жидкости p, массовую концентрацию растворенного газа k_d и текущий радиус пузырька a:

$$p - p_0 = 2\sigma\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a}\right) + p_{u0}\left(\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - 1\right) + p_d - p_s\left(k_0\right),$$

которое, с учетом (1), запишется в виде:

$$p - p_0 = 2\sigma\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a}\right) + p_{u0}\left(\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - 1\right) + p_s\left(k_0\right)\left(\frac{k_d}{k_0} - 1\right). \tag{8}$$

Используя уравнение, связывающее объемное содержание газа и радиус пузырька $\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^3$ и полагая, что $\alpha_0 << 1$, а также подставляя (1), (2) и (7) в (4), получим:

$$\alpha_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 = \frac{\rho_l^0 T_0\left(k_0 - k_d\right)}{\frac{p_{u0}(a_0/a)^3}{R_u} + \frac{p_{d0}(k_d/k_0)}{R_d}}. \tag{9}$$

Уравнения (8) и (9) позволяют получить зависимости давления жидкости p от радиуса пузырьков a, объемного содержания газа α и массовой концентрации k_d.

Численные расчеты

Приняты следующие исходные значения: $p_0 = 0,3$ МПа, $T_0 = 288$ К, $k_0 = 3,7 \times \times 10^{-3}$ ($p_s(k_0) = p_{d0} = 0,2$ МПа), $n_0 = 10^9$ м$^{-3}$. Для параметров, определяющих теплофизические свойства воды и газов, приняты значения: $\rho_l^0 = 10^3$ кг/м^3, $\sigma = = 75,5 \cdot 10^{-3}$ Н/м, $R_d = 189$ Дж/(кг·К), $R_u = 287$ Дж/(кг·К), $Nu = 2$, $D = 1,4 \times \times 10^{-9}$ м^2/с [2].

Из рис. 1 следует, что при внезапной разгерметизации емкости с газонасыщенной жидкостью давление p падает ниже давления насыщения $p_s(k_0)$ и опускается до некоторого минимального значения p_Σ. Видно, что с ростом исходного радиуса зародышей a_0 заход давления p в метастабильную область снижается. Иными словами, чем меньше исходный радиус газового зародыша a_0, тем меньше давление p_Σ.

В метастабильном состоянии жидкость находится некоторый промежуток времени, а затем происходит опорожнение емкости с выходом из этого состояния в равновесное двухфазное состояние. Такой выход из метастабильного состояния в равновесное двухфазное состояние будем называть спонтанным.

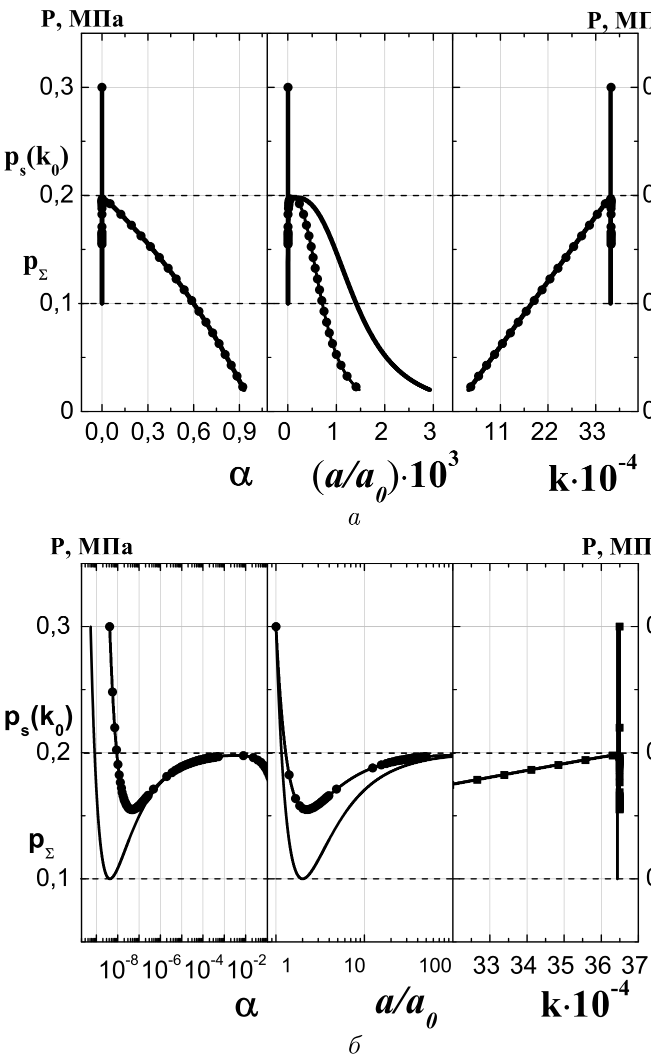

Рис. 1. Иллюстрация влияния исходного радиуса газового зародыша a_0 на зависимость давления жидкости от объемного газосодержания α, отношения радиусов a/a_0 и массовой концентрации k. Сплошная линия — $a_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ м, для линии с точкой — $a_0 = 10^{-6}$ м. Фрагменты в увеличенном масштабе (*б*) вблизи состояния (Σ)

2. "Спонтанные решения"

Представляет интерес характерное время выхода из метастабильного состояния в равновесное двухфазное состояние. Для решения этого вопроса построены "спонтанные решения" [3]. Для этого примем, что каждый пузырек газа находится в некой ячейке радиуса a_{b0}. Для нахождения "спонтанных решений" используем ячеистую схему [4]. Приняты следующие допущения: суммарная масса газа в ячейке остается постоянной, процесс выхода системы из метастабильного состояния в равновесное двухфазное состояние считаем изобарическим ($p = const$), переменностью радиуса ячейки пренебрегаем $a_b \approx a_{b0}$, а также считаем, что $a_{b0} \geqslant a_0$.

Запишем уравнение сохранения массы для газонасыщенной смеси:

$$\frac{4\pi}{3}a_{b0}^3\rho_l^0 k_l + \frac{4\pi}{3}a^3\rho_d^0 = \frac{4\pi}{3}a_{b0}^3\rho_l^0 k_0, \tag{10}$$

где a_{b0} — исходный радиус ячейки, a — радиус пузырька, k_σ — массовая концентрация растворенного газа на линии насыщения, k_l — массовая концентрация растворенного в жидкости газа.

С использованием уравнения Клапейрона — Менделеева для плотности растворенного газа уравнение (10) перепишется в виде:

$$\frac{4\pi}{3}a_{b0}^3\rho_l^0\left(k_l - k_0\right) + \frac{4\pi}{3}a^3\frac{p_d}{R_d T_0} = 0, \tag{11}$$

к тому же имеет место условие механического равновесия для изобарного процесса

$$p_d + p_{u0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - \frac{2\sigma}{a} = p = const. \tag{12}$$

Будем полагать, что при уменьшении давления растворенного газа p_d, весь растворенный газ будет выделяться в газовые пузырьки. Тогда уравнение баланса массы запишется:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3}a_{b0}^3\rho_l^0 k_l\right) = -2\pi a \mathrm{Nu} D\rho_l^0\left(k_l - k_\sigma\right), \tag{13}$$

где Nu — число Нуссельта, D — коэффициент диффузии газа.

Учитывая, что при снижении давления p_d ниже значения p_{s0} значение текущей концентрации растворенного газа удовлетворяет условию насыщения. При этом для условия насыщения, в свою очередь, выполняется закон Генри. Тогда

$$k_\sigma = k_{d0}\frac{p_d}{p_{s0}}. \tag{14}$$

Система (13)–(14), по сути, представляет одно нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка. Но из алгебраических уравнений (11) и (12) в явном виде не удается выразить a и k_l через p_d. Поэтому для проведения расчетов эти алгебраические уравнения целесообразно также свести к дифференциальным, которые имеют вид:

$$\frac{dk_l}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{a\mathrm{Nu}D}{a_{b0}^3}\left(k_l - k_\sigma\right), \tag{15}$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a_{b0}^3\rho_l^0 R_d T_0}{3a^2 p + \frac{3p_{u0}a_0^3}{a} - 2a\sigma}\frac{dk_l}{dt}, \tag{16}$$

$$\frac{dp_d}{dt} = \left(2p_{u0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3\frac{1}{a} - \frac{2\sigma}{a^2}\right)\frac{da}{dt}. \tag{17}$$

Уравнения (15)–(17), учитывая (14), можно разрешить относительно производных по времени от k_l, a, p_d. Тогда задача сводится к решению системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений. На рис. 2 иллюстрируются "спонтанные решения", описывающие переход из метастабильного состояния в устойчивое состояние.

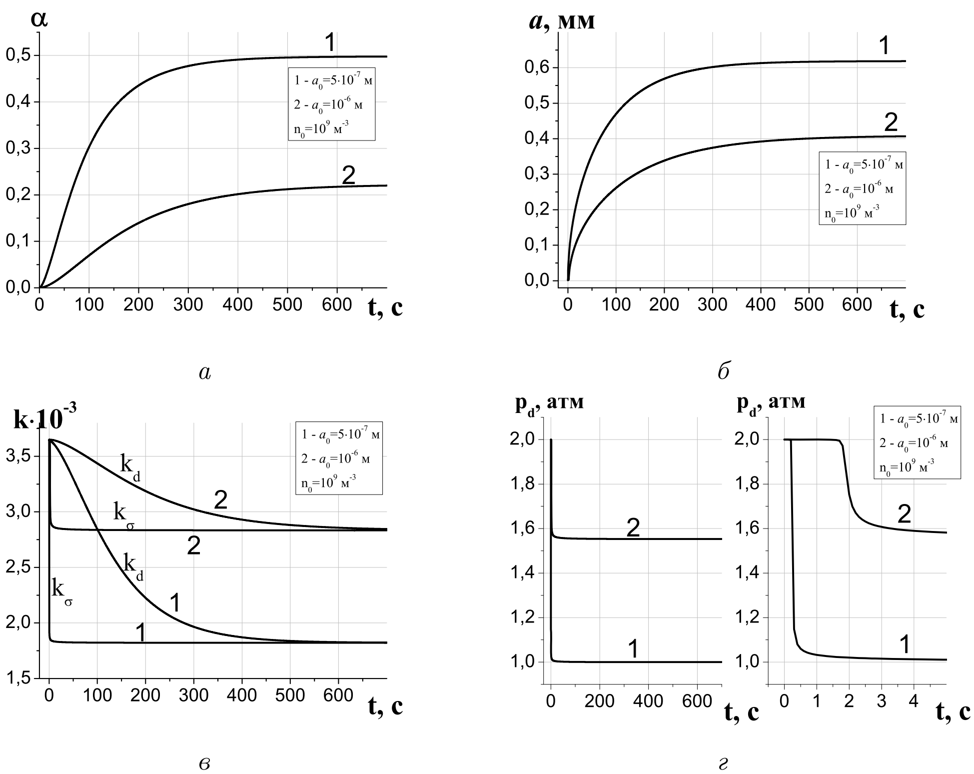

Рис. 2. "Спонтанные решения", иллюстрирующие темп выхода из метастабильного состояния в равновесное двухфазное состояние в зависимости от радиуса газового зародыша в исходном состоянии. Линии *1, 2* для — $a_0 = 5 \cdot 10^{-7}$, 10^{-6} м.

Заключение

1. В случае газонасыщенной жидкости установлено, что с ростом радиуса зародышей заход давления p в метастабильную область на первом участке равновесной изотермы снижается. Для "спонтанных решений" выявлено, что газонасыщенные жидкости с такими параметрами достаточно долго находятся в метастабильной области, а также сильно зависят от исходного числа зародышей n_0 .

2. Численный анализ, согласно предлагаемой в работе теории "спонтанных решений", показывает, что с ростом исходного числа зародышей снижается характерное время выхода из метастабильного состояния.

Литература

[1] Шагапов В.Ш., Галеева Г.Я. Опорожнение каналов и емкостей, сопровождаемое вскипанием // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 3. С. 409–418.

[2] Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.

[3] Жданов С.К., Трубников Б.А. Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991. 176 с.
[4] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 2. 360 с.

Поступила в редакцию 18/*III*/2013;
в окончательном варианте — 19/*III*/2013.

ON THE THEORY OF THE BULK FOAM-FORMATION OF GAS-SATURATED LIQUID DURING THE DEPRESSURIZING OF CONTAINER

 V.Sh. Shagapov[3] A.V. Yalaev[4]

The problem of depressurizing in the gas-saturated liquid is considered. It is found out that the smaller is the initial radius of original germ of gas, the more pressure drops as compared with equilibrium pressure. The solution of the system that describes the transition from the metastable state to the equilibrium two-phase state is found. It is found that the characteristic time of exit from the metastable state depends on the initial number of gas germ.

Key words: gas germ, saturated station, two-phase liquid.

Paper received 18/*III*/2013.
Paper accepted 19/*III*/2013.

[3]Shagapov Vladislav Shayhulagzamovich (shagapov@rambler.ru), Institute of Mechanics, Ufa Branch of RAS, Ufa, 450025, Russian Federation.
[4]Yalaev Andrey Vitalievich (yavafly@mail.ru), the Dept. of Mathematical Analysis and Applied Mathematics, Birsk branch of Bashkir State University, Birsk, 452453, Russian Federation.