УДК 517.956.3

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© 2013 В.Б. Дмитриев[1]

В работе рассматриваются начально-краевые задачи с нелокальными граничными условиями, содержащими интегральный оператор, для уравнений высокого порядка. Доказана единственность решения задачи.

Ключевые слова: нелокальная задача, интегральное условие, уравнение 4-го порядка, обобщенное решение.

Введение

Нелокальные задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений с частными производными в настоящее время весьма активно изучаются, однако в основном рассматриваются уравнения второго порядка. Отметим некоторые из недавних работ по исследованию нелокальных задач для гиперболических и параболических уравнений [1–3] и список литературы в них. Исследования нелокальных задач с интегральными условиями показали, что стандартные методы для их изучения часто оказываются неприемлемыми без соответствующих модификаций.

Многочисленные работы по исследованию уравнений высокого порядка в своем большинстве связаны с изучением классических начальных и начально-краевых задач. В книге [4] приведен обширный перечень работ, посвященных этим вопросам. Добавим к нему несколько более поздних работ [5; 6].

В настоящей работе доказана однозначная обобщенная разрешимость задачи с нелокальным условием, содержащим как интегральный оператор от искомого решения, так и значение производной от него на границе.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv -D_t^4 u - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\, u_{x_j}\right) + c(x,t)\, u = f(x,t) \tag{1.1}$$

[1]Дмитриев Виктор Борисович (dmitriev_v.b@mail.ru), преподаватель информатики Самарского государственного колледжа сервисных технологий и дизайна, 443020, Российская Федерация, г. Самара, ул. Галактионовская, 37

в цилиндре $Q = \{(x,\tau) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < \tau < T\}$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, и поставим для него нелокальную задачу.

Задача. Найти в области Q решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{1.2}$$

$$u_{tt}(x,T) = \psi(x),\ u_{ttt}(x,0) = \eta(x), \tag{1.3}$$

$$u_t(x,0) = \nu(x) \tag{1.4}$$

и нелокальным условиям

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\mathbf{n},x_i)\,|_{S_T} = \int\limits_0^t\int\limits_\Omega K_1\big(x,y,\tau,u(y,\tau)\big)\,dy\,d\tau +$$

$$+\int\limits_\Omega K_2\big(x,y,t,u(y,t)\big)\,dy,\ x \in \partial\Omega, \tag{1.5}$$

где $\varphi(x),\psi(x),\eta(x),K_1(x,y,\tau,u(y,\tau)),K_2\big(x,y,t,u(y,t)\big)$ заданы, а $S_T = \{(x,t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ — боковая поверхность цилиндра Q_T. Здесь

$$a_{ij} = a_{ji},\ \nu\xi^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2,\ \nu > 0.$$

Функции $K_i(x,y,t,u)$ предполагаются заданными в $\Omega\times\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}$.

Введем понятие обобщенного решения поставленной задачи. Для этого умножим (1.1) на $v \in W_2^{1,2}(Q_T)$ такую, что $v(x,T) = 0$, $v_t(x,0) = 0$, и, предполагая, что $u(x,t)$ является решением задачи (1.1)–(1.5), проинтегрируем уравнение (1.1) по цилиндру Q_T:

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega Lu\cdot v\,dx\,dt = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega fv\,dx\,dt.$$

Интегрируя слева по частям, получаем

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(-u_{tt}v_{tt} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,u_{x_j}v_{x_i} +$$

$$+c(x,t)\,uv)\,dx\,dt - \int\limits_\Omega u_{ttt}v\Big|_0^T dx + \int\limits_\Omega u_{tt}v_t\Big|_0^T dx -$$

$$-\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} v\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\mathbf{n},x_i)\,ds\,dt = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega fv\,dx\,dt.$$

Заметим, что $u_{tt}|_{t=T} = \psi$, $u_{ttt}|_{t=0} = \eta$, и в силу условия (1.5) получим тождество, с помощью которого введем понятие обобщенного решения:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (-u_{tt}v_{tt} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\, u_{x_j} v_{x_i} +$$

$$+c(x,t)\, uv)\, dx\, dt - \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v(x,t) \int\limits_0^t \int\limits_\Omega K_1(x,y,\tau,u(y,\tau))\, dy\, d\tau\, ds\, dt -$$

$$-\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v(x,t) \int\limits_\Omega K_2(x,y,t,u(y,t))\, dy\, ds\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(x,t)\, v(x,t)\, dx\, dt - \int\limits_\Omega \psi(x)\, v_t(x,T)\, dx - \int\limits_\Omega \eta(x)\, v(x,0)\, dx. \qquad (1.6)$$

Определение. Назовем обобщенным решением из $W_2^{1,2}(Q_T) \bigcap C^1[0,T]$ задачи (1.1)–(1.5) функцию $u(x,t) \in W_2^{1,2}(Q_T)$ такую, что $u \in C^1[0,T]$ для почти всех $x \in \Omega$, удовлетворяющую условиям (1.2),(1.4) и равенству (1.6) для любой функции $v \in W_2^{1,2}(Q_T)$ такой, что $v(x,T) = 0$, $v_t(x,0) = 0$.

Теперь наложим условия на коэффициенты уравнения (1.1) и на ядро и сформулируем теорему.

Теорема.

Пусть выполняются условия.

$$a_{ij} \in C(\overline{Q_T}),\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \in C(\overline{Q_T}),\ \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \in C(\overline{Q_T}),\ c(x,t) \in C(\overline{Q_T}),$$

$$\max_{Q_T}\Big(|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}|, |\frac{\partial a_i}{\partial x_i}|, |c|\Big) \leqslant \mu_1,$$

$$|K_1(x,y,\tau,u_1) - K_1(x,y,\tau,u_2)\,| \leqslant R_1(y,\tau)\, |u_1 - u_2|,$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega R_1^2(y,t)\, dy\, dt = R_{11} < \infty,$$

$$|K_2(x,y,t,u_1) - K_2(x,y,t,u_2)\,| \leqslant R_2(y,t)\, |u_1 - u_2|,$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega R_2^2(y,t)\, dy = R_{21} < \infty,$$

$$R_{11}|\partial\Omega| + R_{21} \leqslant \frac{4}{\sqrt{7}} 1/T^3,$$

$$\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t} + \lambda_0\, a_{ij}(x,t)\, \mathrm{cth}\, \lambda_0\, t \right) \xi_i \xi_j \;\geqslant \delta\, \xi^2,$$

где $\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{7}} 1/T$, для некоторого $\delta > 0$;

$$\lambda_0\, c(x,t)\ \mathrm{ch}\, \lambda_0\, t + c_t(x,t)\ \mathrm{sh}\, \lambda_0\, t \leqslant -M,$$

где M — некоторое достаточное большое число.

Тогда задача (1.1)–(1.5) не может иметь более одного решения.

2. Доказательство единственности решения задачи

Пусть задача (1.1)–(1.5) имеет два обобщенных решения u_1 и u_2 из $W_2^{1,2}(Q_T)$. Тогда их разность $u = u_1 - u_2 \in W_2^{1,2}(Q_T)$ удовлетворяет равенству

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_{tt} v_{tt} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\, u_{x_j} v_{x_i} + c(x,t)\, uv)\, dx\, dt -$$

$$-\int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x,t) \int_0^t \int_\Omega \Big\{ K_1(x,y,\tau,u_1(y,\tau)) - K_1(x,y,\tau,u_2(y,\tau)) \Big\}\, dy\, d\tau\, ds\, dt -$$

$$-\int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x,t) \int_\Omega \Big\{ K_2(x,y,t,u_1(y,t)) - K_2(x,y,t,u_2(y,t)) \Big\}\, dy\, ds\, dt = 0 \tag{2.1}$$

и удовлетворяет условиям (1.2) и (1.4) с нулями в правых частях. Возьмем в этом равенстве

$$v(x,t) = \int_T^t \frac{u(x,\tau)}{\mathrm{sh}\, \lambda\, \tau}\, d\tau. \tag{2.2}$$

Подставим v из (2.2) в (2.1) и выразим u, u_t и u_{x_i} через v и их производные. Так, $u = v_t\ \mathrm{sh}\, \lambda\, t$. Заметим, что условия $v \in W_2^{1,2}(Q_T)$, $v(x,T) = 0$, $v_t(x,0) = 0$ выполняются в силу того, что $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0$. Интегрируя по частям и учитывая краевые условия, после преобразований, опираясь на условия $v_{tt}|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$, $v_{x_i}|_{t=T} = 0$ и условия теоремы, получаем

$$\frac{3}{2}\lambda \int_0^T \int_\Omega (D_t^2\, v)^2\ \mathrm{ch}\, \lambda\, t\, dx\, dt + \frac{\mathrm{sh}\, \lambda\, T}{2} \int_\Omega (D_t^2\, v)^2|_{t=T}\, dx - \frac{\mathrm{sh}\, 0}{2} \int_\Omega (D_t^2\, v)^2|_{t=0}\, dx +$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\, \frac{\mathrm{sh}\, \lambda\, T}{2} \int_\Omega v_t^2|_{t=T}\, dx - \frac{\lambda^2\, \mathrm{sh}\, 0}{2} \int_\Omega v_t^2|_{t=0}\, dx -$$

$$-\frac{\lambda^3}{2} \int_0^T \int_\Omega (D_t\, v)^2\ \mathrm{ch}\, \lambda\, t\, dx\, dt +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{Q_T} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t}\ \mathrm{sh}\, \lambda\, t + \lambda\, a_{ij}(x,t)\ \mathrm{ch}\, \lambda\, t \right) v_{x_j}(x,t)\, v_{x_i}(x,t)\ dx\, dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,v_{x_j}(x,t)\,v_{x_i}(x,t)\ \mathrm{sh}\,\lambda\,t\,\big|_{t=0}^{t=T}\Big]\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_T}(\lambda\,c(x,t)\ \mathrm{ch}\,\lambda\,t+c_t(x,t)\ \mathrm{sh}\,\lambda\,t)\,v^2(x,t)\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}v(x,t)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\Big\{K_1(x,y,\tau,u_1(y,\tau))-K_1(x,y,\tau,u_2(y,\tau))\Big\}\,dy\,d\tau\,ds\,dt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}v(x,t)\int\limits_{\Omega}\Big\{K_2(x,y,t,u_1(y,t))-K_2(x,y,t,u_2(y,t))\Big\}\,dy\,ds\,dt. \tag{2.3}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{Q_T}c(x,t)\,v_t(x,t)\,v(x,t)\ \mathrm{sh}\,\lambda\,t\,dx\,dt=$$

$$=\frac{\mathrm{sh}\,\lambda T}{2}\int\limits_{\Omega}c(x,T)\,v^2(x,T)\,dx-\frac{\mathrm{sh}\,0}{2}\int\limits_{\Omega}c(x,0)\,v^2(x,0)\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_T}(\lambda\,c(x,t)\ \mathrm{ch}\,\lambda\,t+c_t(x,t)\ \mathrm{sh}\,\lambda\,t)\,v^2(x,t)\,dx\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_T}(\lambda\,c(x,t)\ \mathrm{ch}\,\lambda\,t+c_t(x,t)\ \mathrm{sh}\,\lambda\,t)\,v^2(x,t)\,dx\,dt.$$

Для оценки других слагаемых в правой части (2.3) мы будем использовать неравенство

$$\int\limits_{\partial\Omega}v^2\,ds\leqslant\int\limits_{\Omega}\Big(\varepsilon v_x^2+c_\varepsilon v^2\Big)\,dx, \tag{2.4}$$

справедливое для любой функции $v\in W_2^1(\Omega)$ и области Ω с гладкой границей [11, с. 77].

Оно полезно для дальнейших оценок, в нашем случае (и в наших обозначениях) перепишем его в виде

$$\int\limits_{\partial\Omega}u^2\,ds\leqslant\delta_i\int\limits_{\Omega}|\nabla u(x,t)|^2\,dx+c(\delta_i)\int\limits_{\Omega}u^2(x,t)\,dx. \tag{2.5}$$

Здесь δ_i — некоторые достаточно малые числа, которые будут выбраны ниже, для номеров $i=1,2$.

Оно справедливо для любого $t\in[0,T]$. Заметим, что $c(\delta_i)$ имеет вид $c(\delta_i)=$ $=c/\delta_i$ для некоторого c, не зависящего от δ_i и от u.

Преобразуем слагаемые с разностями ядер в правой части (2.3). Имеем:

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x,t) \int_0^t \int_\Omega \Big\{ K_1(x,y,\tau,u_1(y,\tau)) - K_1(x,y,\tau,u_2(y,\tau)) \Big\}\, dy\, d\tau\, ds\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x,t) \int_0^t \int_\Omega \Big\{ R_1(y,\tau)\, |u_1 - u_2| \Big\}\, dy\, d\tau\, ds\, dt =$$

$$= \int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x,t) \int_0^t \int_\Omega \Big\{ R_1(y,\tau)\, |v_\tau(x,\tau)\, \operatorname{sh}\lambda\tau| \Big\}\, dy\, d\tau\, ds\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} v^2(x,t)\, ds\, \operatorname{sh}\lambda t\, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \int_0^t \left(\int_\Omega R_1^2(y,\tau)\, dy \right) d\tau \cdot \int_\Omega v_t^2(y,t)\, dy\, ds\, \operatorname{sh}\lambda t\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_1}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla v|^2\, \operatorname{sh}\lambda t\, dx\, dt + \frac{c(\delta_1)}{2} \int_0^T \int_\Omega v^2\, \operatorname{sh}\lambda t\, dx\, dt + \frac{R_{11}|\partial\Omega|}{2} \int_0^T \int_\Omega v_t^2\, \operatorname{sh}\lambda t\, dx\, dt;$$

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x,t) \int_\Omega \Big\{ K_2(x,y,t,u_1(y,t)) - K_2(x,y,t,u_2(y,t)) \Big\}\, dy\, ds\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x,t) \int_\Omega \Big\{ R_2(y,\tau)\, |u_1 - u_2| \Big\}\, dy\ ds\, dt =$$

$$= \int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x,t) \int_\Omega \Big\{ R_2(y,\tau)\, |v_t\, \operatorname{sh}\lambda t| \Big\}\, dy\ ds\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} v^2(x,t)\, ds\, \operatorname{sh}\lambda t\, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega R_2^2(y,\tau)\, dy \right) \cdot \int_\Omega v_t^2(y,t)\, dy\, ds\, \operatorname{sh}\lambda t\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_2}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla v|^2\, \operatorname{sh}\lambda t\, dx\, dt + \frac{c(\delta_2)}{2} \int_0^T \int_\Omega v^2\, \operatorname{sh}\lambda t\, dx\, dt + \frac{R_{22}}{2} \int_0^T \int_\Omega v_t^2\, \operatorname{sh}\lambda t\, dx\, dt.$$

Положим

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta,$$

тогда в правой части этого неравенства будет фигурировать $c\,(\delta)$.

После преобразований получим

$$\frac{3}{2}\lambda \int_0^T \int_\Omega (D_t^2\, v)^2\, \operatorname{ch}\lambda t\, dx\, dt + \frac{\operatorname{sh}\lambda T}{2} \int_\Omega u_t^2(x,T)\, dx +$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\lambda T}{2}\int\limits_{\Omega} u^2(x,T)\,dx-$$

$$-\frac{\lambda^3}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(D_t\,v)^2\,\operatorname{ch}\lambda\,t\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t}\,\operatorname{sh}\lambda\,t+\lambda\,a_{ij}(x,t)\,\operatorname{ch}\lambda\,t\right)v_{x_j}(x,t)\,v_{x_i}(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_T}(\lambda\,c(x,t)\,\operatorname{ch}\lambda\,t+c_t(x,t)\,\operatorname{sh}\lambda\,t)\,v^2(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\left(\frac{c(\delta_1)+c(\delta_2)}{2}\right)\int\limits_{Q_T}v^2(x,t)\operatorname{sh}\lambda\,t\,dx\,dt-$$

$$-\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}|\nabla v|^2\,\operatorname{sh}\lambda\,t\,dx\,dt-\frac{R_{11}|\partial\Omega|+R_{21}}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}v_t^2\,\operatorname{sh}\lambda\,t\,dx\,dt\leqslant 0.$$

Заметим также, что справедливо представление

$$D_t v e^{-\frac{\lambda t}{2}}=\int\limits_0^t(D_t v e^{-\frac{\lambda t}{2}})_t\,dt=\int\limits_0^t D_t^2 v e^{-\frac{\lambda t}{2}}\,dt-\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^t D_t v e^{-\frac{\lambda t}{2}}\,dt,$$

из которого можно получить неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(D_t v)^2 e^{-\lambda t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant T^2\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(D_t^2 v)^2 e^{-\lambda t}\,dx\,dt+\frac{\lambda^2\,T^2}{4}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(D_t v)^2 e^{-\lambda t}\,dx\,dt. \qquad (2.6)$$

Если $\lambda^2\,T^2<4$, то из неравенства (2.6) следует, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(D_t v)^2 e^{-\lambda t}\,dx\,dt\leqslant\frac{4T^2}{4-\lambda^2\,T^2}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(D_t^2 v)^2 e^{-\lambda t}\,dx\,dt.$$

Теперь получаем после замены λ на $-\lambda$ и сложения полученного и исходного неравенств

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(D_t v)^2\operatorname{ch}\lambda\,t\,dx\,dt\leqslant\frac{4T^2}{4-\lambda^2\,T^2}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(D_t^2 v)^2\operatorname{ch}\lambda\,t\,dx\,dt.$$

Введем обозначение $d=R_{11}|\partial\Omega|+R_{21}$.

Теперь выясним, можно ли подобрать число λ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\frac{3}{2}\lambda - \frac{2\,(\lambda^3+d)T^2}{4-\lambda^2\,T^2}\right)\int\limits_0^T\int\limits_\Omega v_{tt}^2\ \mathrm{ch}\,\lambda\,t\,dx\,dt+$$

$$+\frac{\mathrm{sh}\,\lambda\,T}{2}\int\limits_\Omega u_t^2(x,T)\,dx+\frac{\lambda^2}{2}\,\frac{\mathrm{sh}\,\lambda\,T}{2}\int\limits_\Omega u^2(x,T)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^n\left(\left(\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t}\right)\mathrm{sh}\,\lambda\,t+\lambda\,a_{ij}(x,t)\ \mathrm{ch}\,\lambda\,t\right)v_{x_j}(x,t)\,v_{x_i}(x,t)\ dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_T}(\lambda\,c(x,t)\ \mathrm{ch}\,\lambda\,t+c_t(x,t)\ \mathrm{sh}\,\lambda\,t)\,v^2(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\delta\int\limits_0^T\int\limits_\Omega|\nabla v|^2\ \mathrm{sh}\,\lambda\,t\,dx\,dt-c(\delta)\int\limits_{Q_T}v^2(x,t)\,\mathrm{sh}\,\lambda\,t\,dx\,dt\leqslant 0.$$

При оценке слагаемых в левой части используем неравенство $\mathrm{ch}\,\lambda\,t \geqslant \mathrm{sh}\,\lambda\,t$.

Потребуем выполнения следующих условий

$$\frac{3}{2}\lambda-\frac{2\,(\lambda^3+d)T^2}{4-\lambda^2\,T^2}\geqslant 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^n\left(\left(\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t}\right)\mathrm{sh}\,\lambda\,t+\lambda\,a_{ij}(x,t)\ \mathrm{ch}\,\lambda\,t\right)v_{x_j}(x,t)\,v_{x_i}(x,t)\ \geqslant\delta\,|\nabla v|^2\ \mathrm{sh}\,\lambda\,t$$

(заметим, что это осуществляется в силу условий теоремы при указанном в теореме $\lambda=\lambda_0$), а также должно выполняться

$$\lambda\,c(x,t)\ \mathrm{ch}\,\lambda\,t+c_t(x,t)\ \mathrm{sh}\,\lambda\,t+c(\delta)\leqslant 0.$$

Теперь в силу условий теоремы можно подобрать коэффициенты так, чтобы слева все коэффициенты были неотрицательны.

Должно выполняться

$$3\,\lambda(4-\lambda^2\,T^2)-4\,(\lambda^3+d)T^2\geqslant 0,$$

а тогда $4\,d\,T^2\leqslant 12\,\lambda-7\,\lambda^3\,T^2$.

Заметим, что тогда $\lambda^2\,T^2\in[0,12/7]$ и, перейдя в выражении $12\,\lambda-7\,\lambda^3\,T^2$ к супремуму по всем λ из данного промежутка, получим, что наибольшему d соответствует $\lambda^2\,T^2=4/7$, то есть $\lambda=\frac{2}{\sqrt{7}}1/T$.

Тогда $d\,T^2=2\,\lambda=2\sqrt{\frac{4}{7}}1/T=\frac{4}{\sqrt{7}}1/T$, и далее получаем $d=\frac{4}{\sqrt{7}}1/T^3$.

Далее, в силу условий теоремы, в частности, $\int\limits_0^T\int\limits_\Omega v^2\,dx\,dt\leqslant 0$, стало быть, $v(x,t)\equiv 0$, а тогда и $u(x,t)\equiv 0$, что и доказывает утверждение теоремы.

Литература

[1] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальными граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.

[2] Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространствено нелокальных задач для линейных параболических уравнений // Вестник СамГУ. 2008. № 3(62). С. 165–174.

[3] Пулькина Л.С. Начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для многомерного гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 8. С. 1084–1089.

[4] Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995. 133 с.

[5] Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. VSP. Utrecht, 1999.

[6] Кожанов А.И. О разрешимости первой начально-краевой задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа высокого порядка // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. трудов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2007. С. 172–181.

[7] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: Иностр. лит., 1961. 122 с.

[8] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестн. СамГУ. 2006. Естественнонаучн. сер. № 2(42). С. 15–27.

[9] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения гиперболического типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. 2006. Сер.: Физ.-мат. науки, № 42. С. 35–40.

[10] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Доклады Академии наук. 2005. Т. 404. № 5.

[11] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

[12] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

[13] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник для ун-тов. 4-е изд. М.: Наука, 1974. 331 с.

[14] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.

[15] Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

Поступила в редакцию 22/*III*/2013;
в окончательном варианте — 22/*III*/2013.

ON THE UNIQUENESS OF SOLUTION OF NONLOCAL PROBLEM WITH NON-LINEAR INTEGRAL CONDITION FOR A FOURTH ORDER EQUATION

© 2013 V.B. Dmitriev[2]

Initial boundary-value problems with non-local boundary conditions which contain integral operator for the equations of higher order are studied. The uniqueness of generalized solution is proved.

Key words: non-local problem, integral condition, 4th order equation, generalized solution.

Paper received 22/*III*/2013.
Paper accepted 22/*III*/2013.

[2]Dmitriev Viktor Borisovich (dmitriev_v.b@mail.ru), teacher of Informatics, Samara State College of Service Technology and Design, Samara, 443020, Russian Federation.