УДК 519.642.8

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДЕННЫХ ВОЗМУЩЕННЫМИ САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ, МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

© 2013 С.И. Кадченко[1]

В статье разработан новый метод решения обратных задач порожденных возмущенными самосопряженными операторами по их спектральным характеристикам. Метод был проверен на обратных задачах для операторов типа Штурма — Лиувилля. Результаты многочисленных расчетов показали вычислительную эффективность метода.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, теория возмущений, самосопряженные операторы, собственные числа, собственные функции, некорректно поставленные задачи.

Введение

В работах [1–6] был разработан численный метод вычисления собственных значений полуограниченных снизу дискретных операторов, который, по предложению автора статьи, был назван методом *регуляризованных следов* (РС). На основе построенной теории в статье разработан новый метод, позволяющий решать обратные спектральные задачи, порожденные дискретными полуограниченными снизу операторами заданными в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим задачу нахождения собственных значений оператора $T+P$

$$\Big(T+P\Big)u=\beta u,$$

где T — дискретный полуограниченный снизу оператор, P — ограниченный оператор, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Допустим, что известны собственные значения $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, которые занумерованы в порядке возрастания собственных значений μ_n по величине с учетом кратности. Обозначим через ν_n кратность собственного значения μ_n, а количество всех неравных друг другу собственных значений μ_n, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0}=\frac{|\mu_{n_0+1}+\mu_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Пусть $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные значения оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Если для всех $n\in N$

[1]Кадченко Сергей Иванович (kadchenko@masu.ru), кафедра уравнений математической физики Южно-Уральского государственного университета (Национального исследовательского университета), 454080, Российская Федерация, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.

выполняются неравенства $q_n = \frac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n}-\mu_n|} < 1$, тогда первые $m_0 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ являются решениями системы m_0 нелинейных уравнений вида [8]

$$\sum_{k=1}^{m_0} \beta_k^p = \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0), \ \ p=\overline{1,m_0}. \tag{1}$$

Здесь $\alpha_k^{(p)}(m_0) = \frac{(-1)^k p}{2\pi k i} Sp \int\limits_{T_{n_0}} \mu^{p-1} \Big[PR_\mu(T)\Big]^k d\mu$ — k-е поправки теории возмущений оператора $T+P$ целого порядка p, $R_\mu(T)$ — резольвента оператора T.

Известно, что в этом случае контур T_{n_0} содержит одинаковое количество собственных значений операторов T и $T+P$ [8].

Система уравнений (1) лежит в основе численного метода РС, позволяющего находить собственные значения возмущенных самосопряженных операторов в том случае, когда самосопряженные операторы имеют собственные значения с произвольной кратностью.

В работе [5] показано, что *если T — дискретный полуограниченный снизу оператор, а P — ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H, при этом система собственных функций $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора T является базисом H, и существует $n_0 \in N$ такое, что для всех $n \in N$ выполняются неравенства $q_n < 1$, тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0) = Sp\mathbf{A}^p - \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \delta_p(m_0), \ \ p=\overline{1,m_0}, \tag{2}$$

$$|\delta_1(m_0)| \leqslant \Big| \sum_{k=2}^{t_1} \alpha_k^{(1)}(m_0) \Big| + n_0 \rho_{n_0} \frac{q^{t_1+1}}{1-q}, \ \ q = \max_{n\geqslant 1} q_n, \ \ t_1 \in N,$$

$$|\delta_p(m_0)| \leqslant \Big| \sum_{k=2}^{t_p} \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0} \Big(\sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} +$$

$$+ \sum_{j_2,\ldots,j_p=1,\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r} \Big) \Big| + p n_0 \rho_{n_0}^p \frac{q^{t_p+1}}{1-q}, \ \ p=\overline{2,m_0}, \ \ t_p \in N.$$

Здесь $\delta_p(m_0) = \sum\limits_{k=1}^{m_0} [\beta_k^p - \widetilde{\beta}_k^p(m_0)]$, $\{\widetilde{\beta}_k(m_0)\}_{k=1}^{m_0}$ — приближенные значения по Бубнову — Галеркину соответствующих собственных значений $\{\beta_k\}_{k=1}^{m_0}$ оператора $T+P$, $\mathbf{A} = \|a_{km}\|_{k,m=1}^{m_0}$, $a_{km} = \mu_k \delta_{km} + V_{km}$, δ_{km} — символ Кронекера, $V_{km} = (P\omega_k, \omega_m)$, $r = \begin{cases} s+1, & s \neq p, \\ 1, & s = p. \end{cases}$ След p-й степени матрицы $\mathbf{A}$ вычисляется по формуле

$$Sp\mathbf{A}^p = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_p=1}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r}. \tag{3}$$

Формулы (3) были подобраны во время численных расчетов величин $Sp\mathbf{A}^p$ и многократно проверялась при $1 \leqslant p \leqslant 35$.

1. Формулы вычисления собственных значений методом РС

В данном разделе получим простые формулы, позволяющие с высокой *вычислительной эффективностью* находить собственные значения дискретного полуограниченного снизу оператора вида $T+P$, если собственные значения и собственные функции оператора T известны.

Теорема 1 *Пусть T — дискретный полуограниченный снизу оператор, а P — ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если для всех $n \in N$ выполняются неравенства $q_n < 1$ и собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T являются базисом в H, то собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ вычисляются по формулам:*

$$\beta_n = \mu_n + (P\omega_n, \omega_n) + \widetilde{\delta}_1(n), \ \ n = \overline{1, m_0}, \tag{4}$$

где $|\widetilde{\delta}_1(n)| \leqslant (2n-1)\rho_n \frac{q^2}{1-q}$, $\widetilde{\delta}_1(n) = \delta_1(n) - \delta_1(n-1)$.

Доказательство. Из системы уравнений (1) для $m_0 = n$ и $m_0 = n-1$ при $p = 1$ получим

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)}(n), \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)}(n-1). \tag{6}$$

Вычитая из уравнения (5) уравнение (6), найдем

$$\beta_n = \mu_n + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k^{(1)}(n) - \alpha_k^{(1)}(n-1)]. \tag{7}$$

Используя (2), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k^{(1)}(n) - \alpha_k^{(1)}(n-1)] = Sp\mathbf{A}(n) - Sp\mathbf{A}(n-1) - \mu_n + \widetilde{\delta}_1(n). \tag{8}$$

Из равенства (3) получаем

$$Sp\mathbf{A}(n) - Sp\mathbf{A}(n-1) = \mu_n + (P\omega_n, \omega_n). \tag{9}$$

Подставляя равенства (8) и (9) в (7), найдем формулы (4).

Используя соотношения (2), найдем оценки погрешностей $\tilde{\delta}_1(n)$ вычисления собственных значений оператора $T+P$

$$|\tilde{\delta}_1(n)| = |\delta_1(n) - \delta_1(n-1)| \leqslant |\delta_1(n)| + |\delta_1(n-1)| \leqslant$$
$$\leqslant \Big[n\rho_n + (n-1)\rho_{n-1} \Big] \frac{q^2}{1-q} \leqslant (2n-1)\rho_n \frac{q^2}{1-q}.$$

Используя формулы (4), построим численный метод решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами.

2. Решение обратных задач методом РС

Рассмотрим задачу восстановления потенциала P по собственным значениям $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и собственным функциям $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T и собственным значениям

$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $T+P$ в гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$, где (a,b) — интервал изменения переменной s. Пусть T — дискретный полуограниченный снизу оператор, а P — ограниченный оператор умножения на функцию $p(s)$. Если для всех $n \in N$ выполняются неравенства $q_n < 1$ и собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T является базисом в $L_2(a,b)$, то согласно теореме 1 собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ вычисляются по формулам:

$$\beta_n = \mu_n + \int_a^b \omega_n^2(s)p(s)ds + \tilde{\delta}_1(n), \;\; n = \overline{1, m_0}.$$

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Ap \equiv \int_a^b K(x,s)p(s)ds = f(x), \quad c \leqslant x \leqslant d, \tag{10}$$

где функции $f(x)$ и $K(x,s)$ такие, что

$$f(x_n) = \beta_n - \mu_n - \tilde{\delta}_1(n), \quad K(x_n, s) = \omega_n^2(s), \;\; c \leqslant x_n \leqslant d, \;\; n = \overline{1, m_0}.$$

Пусть ядро интегрального уравнения (10) $K(x,s)$ непрерывно и замкнуто в квадрате $\Pi = [a,b] \times [c,d]$, а функции $p(s) \in W_2^1[a,b]$ и $f(x) \in L_2[c,d]$.

Задача решения интегрального уравнения фредгольма первого рода (10) является некорректно поставленной. Ее приближенное решение может быть найдено с помощью метода регуляризации Н.А. Тихонова [9–10]. Численное решение уравнения (10) будет определять значения функции $p(s)$ в узловых точках s_i, $i = \overline{1, I}$, $a = s_1 < s_2 < ... < s_I = b$. Число узловых точек I можно выбрать достаточно большим, чтобы получить хорошую точность при интерполяции функции $p(s)$.

3. Численный эксперимент

Проиллюстрируем разработанный метод на следующей задачи Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} -u'' + p(s)\;\; u = \beta\;\; u, \quad a < s < b; \\ cos\alpha\;\; u'(a) + sin\alpha\;\; u(a) = 0; \\ cos\gamma\;\; u'(b) + sin\gamma\;\; u(b) = 0, \quad \alpha, \gamma\;\; \in R. \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим оператор $T\omega \equiv -\omega''$, причем функция ω удовлетворяет граничным условиям (11). Нетрудно показать, что оператор T самосопряженный и его собственные числа являются решением трансцендентного уравнения

$$[\sin\alpha \sin(\sqrt{\mu}a) + \sqrt{\mu}\cos\alpha \cos(\sqrt{\mu}a)] \times$$
$$\times [\sin\gamma \cos(\sqrt{\mu}b) - \sqrt{\mu}\cos\gamma \sin(\sqrt{\mu}b)] +$$
$$+ [\sqrt{\mu}\cos\alpha \sin(\sqrt{\mu}a) - \sin\alpha \cos(\sqrt{\mu}a)] \times$$
$$\times [\sin\gamma \sin(\sqrt{\mu}b) + \sqrt{\mu}\cos\gamma \cos(\sqrt{\mu}b)] = 0,$$

а собственные функции имеют вид:

$$\omega_n(s) = C_n\{[\sin\alpha \sin(\sqrt{\mu_n}a) + \sqrt{\mu_n}\cos\alpha \cos(\sqrt{\mu_n}a)]\cos(\sqrt{\mu_n}s) +$$
$$+ [\sqrt{\mu_n}\cos\alpha \sin(\sqrt{\mu_n}a) - \sin\alpha \cos(\sqrt{\mu_n}a)]\sin(\sqrt{\mu_n}s)\}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Здесь $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные значения оператора T. Постоянные C_n находятся из условия нормировки.

При проведении численных экспериментов вначале, задавая функцию $p(s)$, вычислялись собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ задачи Штурма — Лиувилля (11) по формулам (4) ($\widetilde{\delta}_1(n)=0,\ n=\overline{1,m_0}$) и с помощью метода Бубнова — Галеркина. Собственные значения, найденные по формулам (4) в табл. 1, обозначены $\widetilde{\beta}_n$, а методом Бубнова — Галеркина — $\widehat{\beta}_n$. Один из результатов приближенных расчетов собственных значений $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ задачи (11) приведен в табл. 1. Расчет был выполнен при $m_0=31,\ a=0,\ b=1,\ c=\mu_1,\ d=\mu_{m_0},\ \alpha=\pi/8,\ \gamma=\pi/2,\ p(s)= =(1+i)s$.

Результаты расчетов показывают, что найденные собственные значения задачи (11) по формулам (4) и с помощью метода Бубнова — Галеркина хорошо согласуются. Надо отметить, что по мере возрастания номера n собственного значения абсолютная погрешность $|\widetilde{\beta}_n-\widehat{\beta}_n|$ уменьшается.

Кроме того, время, затраченное персональным компьютером при вычислении первых собственных значений оператора T + P методом РС, меньше, чем при вычислении методом Бубнова — Галеркина. При этом чем больше номер вычисляемого собственного значения, тем больше разница во времени вычислений. Это связано с тем, что для вычисления собственных значений $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора T + P методом Бубнова — Галеркина надо находить собственные значения матрицы порядка $n\times n$, а для их вычисления методом РС используются простые для вычислений формулы (4).

Таблица 1

n	$\widetilde{\beta}_n$	$\widehat{\beta}_n$	$\lvert\widetilde{\beta}_n-\widehat{\beta}_n\rvert$
1	$1,843707+0,278536i$	$1,843669+0,274578i$	$0,00395801$
2	$21,858542+0,486138i$	$21,858578+0,488020i$	$0,00188181$
3	$61,349731+0,495168i$	$61,349733+0,495847i$	$0,00067940$
4	$199,528965+0,498527i$	$199,528965+0,498736i$	$0,00020897$
5	$120,570749+0,497556i$	$120,570749+0,497902i$	$0,00034587$
6	$298,225704+0,499015i$	$298,225704+0,499155i$	$0,00013979$
7	$416,661356+0,499296i$	$416,661356+0,499396i$	$0,00010004$
8	$554,836068+0,499471i$	$554,836068+0,499547i$	$0,00007512$
9	$712,749905+0,499589i$	$712,749905+0,499647i$	$0,00005847$
10	$890,402901+0,499671i$	$890,402901+0,499718i$	$0,00004680$
11	$1087,795074+0,499731i$	$1087,795074+0,499769i$	$0,00003831$
12	$1304,926435+0,499775i$	$1304,926435+0,499807i$	$0,00003193$
13	$1541,796990+0,499810i$	$1541,796990+0,499837i$	$0,00002703$
14	$1798,406743+0,499837i$	$1798,406743+0,499860i$	$0,00002317$
15	$2074,755697+0,499859i$	$2074,755697+0,499879i$	$0,00002008$
16	$2370,843854+0,499876i$	$2370,843854+0,499894i$	$0,00001758$
17	$2686,671216+0,499891i$	$2686,671216+0,499906i$	$0,00001551$
18	$3022,237783+0,499903i$	$3022,237783+0,499917i$	$0,00001379$
19	$3377,543556+0,499913i$	$3377,543556+0,499926i$	$0,00001234$
20	$3752,588535+0,499922i$	$3752,588535+0,499933i$	$0,00001110$
21	$4147,372722+0,499929i$	$4147,372722+0,499939i$	$0,00001005$
22	$4561,896116+0,499936i$	$4561,896116+0,499945i$	$0,00001005$
23	$4996,158717+0,499941i$	$4996,158717+0,499950i$	$0,00000834$
24	$5450,160527+0,499946i$	$5450,160527+0,499954i$	$0,00000765$
25	$5923,901544+0,499951i$	$5923,901544+0,499958i$	$0,00000705$
26	$6417,381770+0,499954i$	$6417,381770+0,499961i$	$0,00000651$
27	$6930,601203+0,499958i$	$6930,601203+0,499964i$	$0,00000607$
28	$7463,559845+0,499961i$	$7463,559845+0,499966i$	$0,00000564$
29	$8016,257696+0,499963i$	$8016,257696+0,499969i$	$0,00000582$
30	$8588,694754+0,499966i$	$8588,694754+0,499971i$	$0,00000546$
31	$9180,871022+0,499968i$	$9180,871022+0,500107i$	$0,00013933$

Изменим правую часть уравнения (10) и восстановим приближенные значения функции $p(s)$ в узловых точках $\{s_n\}_{n=1}^{m_0}$. В табл. 2 приведен пример расчетов при $\widetilde{f}(x_n) = \beta_n - \mu_n - 0,2 - 0,1i,\ n = \overline{1, m_0}$.

Таблица 2

n	s_n	$\widetilde{p}(s_n)$	$\gamma(s_n)$
1	0,0000	$-0,382389 - 0,282987i$	0,013575
2	0,0333	$-0,334504 - 0,235054i$	0,000870
3	0,0667	$-0,273961 - 0,174422i$	0,001278
4	0,1000	$-0,207430 - 0,107782i$	0,002520
5	0,1333	$-0,207430 - 0,107782i$	0,001078
6	0,1667	$-0,068987 + 0,030896i$	0,000322
7	0,2000	$0,000016 + 0,100016i$	0,000587
8	0,2333	$0,067325 + 0,167436i$	0,000249
9	0,2667	$0,131982 + 0,232196i$	0,000212
10	0,3000	$0,193169 + 0,293474i$	0,000273
11	0,3333	$0,250220 + 0,350603i$	0,000042
12	0,3667	$0,302565 + 0,403011i$	0,000026
13	0,4000	$0,349810 + 0,450300i$	0,000048
14	0,4333	$0,391633 + 0,492152i$	0,000093
15	0,4667	$0,427903 + 0,528431i$	0,000148
16	0,5000	$0,458548 + 0,559068i$	0,000175
17	0,5333	$0,483687 + 0,584180i$	0,000200
18	0,5667	$0,503493 + 0,603942i$	0,000184
19	0,6000	$0,518318 + 0,618705i$	0,000217
20	0,6333	$0,528009 + 0,627446i$	0,000250
21	0,6667	$0,528280 + 0,627826i$	0,000244
22	0,7000	$0,528563 + 0,628875i$	0,000245
23	0,7333	$0,530344 + 0,630007i$	0,000265
24	0,7667	$0,530358 + 0,629693i$	0,000258
25	0,8000	$0,533227 + 0,633008i$	0,000251
26	0,8333	$0,534701 + 0,633834i$	0,000280
27	0,8667	$0,534791 + 0,635014i$	0,000271
28	0,9000	$0,535295 + 0,634538i$	0,000256
29	0,9333	$0,536001 + 0,635901i$	0,000277
30	0,9667	$0,537608 + 0,637731i$	0,000283
31	1,0000	$0,537750 + 0,637764i$	0,000287

Здесь $\widetilde{p}(s_n)$ — приближенное значение функции $p(s)$ в узловых точках s_n.

Величины $\gamma_n = |\widetilde{f}(x_n) - \int_a^b K(x_n, s)\widetilde{p}(s)ds|$ определяют поточечную абсолютную погрешность решения. Невязка, найденная в узловых точках s_n приближенного решения $\widetilde{p}(s_n)$, равна $||A\widetilde{p} - \widetilde{f}||_{L_2} = 0,003011$. Параметр регуляризации $\alpha = 0,000815$ при численном решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода (10) методом регуляризации Тихонова вычислялся с помощью метода невязки.

Заключение

В работе разработан численный метод решения обратных спектральных задач для возмущенных самосопряженных операторов. В среде Maple написан пакет программ, позволяющий восстанавливать потенциал $p(x)$ по спектральным характеристикам оператора A, порожденного дифференциальным выражением $l[y] = -y'' + p(x)$ в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$. Метод достаточно прост в применении. Им с успехом могут пользоваться исследователи, не имеющие достаточных знаний в области спектрального анализа.

Литература

[1] Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В.В. Дубровский [и др.] // ДАН России. 2001. Т. 380. № 2. С. 160–163.

[2] Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи Орра—Зомерфельда / В.В. Дубровский [и др.] // ДАН России. 2001. Т. 378. № 4. С. 443–446.

[3] Вычисление первых собственных значений задачи гидродинамической устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами / В.А. Садовничий [и др.] // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 6. С. 742–746.

[4] Кадченко С.И. Вычисление сумм рядов Релея – Шредингера возмущенных самосопряженных операторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1494–1505.

[5] Кадченко С.И. Метод регуляризованных следов // Вестник Юж-Урал. гос. ун-та. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2009. № 37(170). Вып. 4. С. 4–23.

[6] Кадченко С.И., Рязанова Л.С. Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов // Вестник Юж-Урал. гос. ун-та. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2011. № 17(234). Вып. 8. С. 46–51.

[7] Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 659 с.

[8] Садовничий В.А. Теория операторов: учеб. для вузов: 3-е изд., стер. М.: Высш. шк., 1999. 368 с.

[9] Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1943. Т. 39. № 5. С. 501–505.

[10] Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы Киев: Наукова думка, 1986. 542 с.

Поступила в редакцию $3/VI/2013$;
в окончательном варианте — $3/VI/2013$.

NUMERICAL METHOD FOR THE SOLUTION OF INVERSE PROBLEMS GENERATED BY PERTURBATIONS OF SELF-ADJOINT OPERATORS BY METHOD OF REGULARIZED TRACES

© 2013 S.I. Kadchenko[2]

In the article a new method for the solution of inverse problems generated by perturbations of self-adjoint operators on their spectral characteristics is developed. The method was tested on inverse problems for Sturm-Liouville problems. The results of numerous calculations showed the computational efficiency of the method.

Key words: inverse spectral problem, perturbation theory, self-adjoint operators, eigen values, eigen functions, incorrectly formulated problems.

Paper received 3/*VI*/2013.
Paper accepted 3/*VI*/2013.

[2]Kadchenko Sergey Ivanovich (kadchenko@masu.ru), the Dept. of Equations of Mathematical Physics, Southern Ural State University, Chelyabinsk, 454080, Russian Federation.