УДК 517.956

# ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2013 С.В. Кириченко[1]

В статье рассмотрена краевая задача для одномерного гиперболического уравнения с нелокальными начальными данными интегрального вида. Доказано существование единственного обобщенного решения.

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, нелокальные условия, обобщенное решение.

## Введение

В настоящее время задачи с нелокальными условиями для уравнений в частных производных вызывают большой интерес, который обусловлен необходимостью обобщения классических задач математической физики в связи с математическим моделированием ряда физических процессов, изучаемых современным естествознанием [1].

Заметим, что в большинстве публикаций, посвященных задачам с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений, рассматриваются пространственно нелокальные условия [2–5] (см. также список литературы в них). В предлагаемой статье рассмотрена задача с нелокальными по времени интегральными условиями для гиперболического уравнения. Нелокальные задачи с условиями такого вида для других уравнений рассмотрены в работах [6–8]. Результаты исследования показали, что размер области, в которой ищется решение, имеет значение, а также, что условия разрешимости могут связывать между собой как размеры области, так и ограничения на другие входные данные.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xx} + c(x)u = f(x,t) \tag{1.1}$$

и будем искать его решение, удовлетворяющее условиям:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{1.2}$$

[1]Кириченко Светлана Викторовна (svkirichenko@mail.ru), кафедра высшей математики Самарского государственного университета путей сообщения, 443066, Российская Федерация, г. Самара, 1-й Безымянный переулок, 18.

$$
\begin{aligned}
&u(x,0)+\int\limits_0^T M_1(x,t)u(x,t)dt=0,\\
&u_t(x,0)+\int\limits_0^T M_2(x,t)u(x,t)dt=0.
\end{aligned}
\qquad (1.3)
$$

Для обоснования разрешимости задачи (1.1), (1.2), (1.3) сведем ее к задаче с классическими начальными данными для нагруженного уравнения [3].

Введем обозначения:

$$N(x,t,\tau)=M_1(x,\tau)+tM_2(x,\tau),$$

$$P(x,t,\tau)=N_{xx}(x,t,\tau)-N(x,t,0)M_2(x,\tau),$$

$$\Omega=(0,T)\times(0,T),\ \ ||\phi(x,\cdot,\cdot)||_{L_2(\Omega)}=\max_{[0,l]}\Big(\int\limits_0^T\int\limits_0^T\phi^2(x,t,\tau)dtd\tau\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$n_0=\max\{||N||_{L_2(\Omega)},||N_t||_{L_2(\Omega)},||N_x||_{L_2(\Omega)},||N_{xx}||_{L_2(\Omega)},||N_\tau||_{L_2(\Omega)}\},$$

$$p_0=||P||_{L_2(\Omega)},$$

$$\gamma_0=\max\{p_0,n_0\},\ \ \gamma_1=\frac{1-n_0^2+n_0}{(1-n_0)^2},m_0=\max\{1+c_0,\frac{c_0l^2}{2}\}.$$

Определим оператор $B$ формулой

$$Bu=u(x,t)+\int\limits_0^T N(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau$$

и будем обозначать $Bu=v(x,t)$. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.1), (1.2), (1.3). Преобразуем выражение

$$L\Big(\int\limits_0^T N(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau\Big)=$$

$$=\int\limits_0^T[(N_{xx}-c(x)N)u+2N_xu_x]d\tau+\int\limits_0^T Nu_{xx}d\tau.$$

Так как по предположению $u(x,t)$ — решение уравнения (1.1), то

$$\int\limits_0^T N(x,t,\tau)u_{xx}(x,\tau))d\tau=\int\limits_0^T N(x,t,\tau)[u_{\tau\tau}+c(x)u-f(x,\tau)]d\tau.$$

Учитывая, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3) и $N(x,t,T)=0$, получим

$$\int\limits_0^T N(x,t,\tau)u_{xx}(x,\tau))d\tau=\int\limits_0^T N(x,t,\tau)f(x,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^T[(N(x,t,\tau)c(x)+N(x,t,0)M_2(x,\tau))u-N_\tau(x,t,\tau)u_\tau]d\tau.$$

Обозначим

$$F(x,t)=f(x,t)+\int\limits_0^T N(x,t,\tau)f(x,\tau)d\tau.$$

## 2. Разрешимость задачи

**Теорема.** Пусть выполняются условия

$$M_i \in C^1(\bar{Q}_T), \;\; M_{ixx} \in C(\bar{Q}_T), \;\; M_i(x,T) = 0,$$

$$c \in C[0,l], \;\; f \in L_2(Q_T), \;\; f_t \in L_2(Q_T), \;\; n_0 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда существует единственное решение $u \in W_2^2(Q_T)$ задачи (1.1), (1.2), (1.3) для $T$, удовлетворяющих неравенству

$$T < \frac{1}{m_0} \ln\left(\frac{2m_0}{(2+l)^2\gamma_0^2\gamma_1^2} + 1\right).$$

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную задачу: найти в $Q_T$ пару функций $(u,v)$, удовлетворяющих уравнениям

$$v_{tt} - v_{xx} + cv + \int\limits_0^T [Pu + 2N_x u_x - N_\tau u_\tau] d\tau = F(x,t), \tag{2.1}$$

$$v(x,t) = u(x,t) + \int\limits_0^T N(x,t,\tau) u(x,\tau) d\tau, \quad x \in [0,l] \tag{2.2}$$

и условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad v(x,0) = 0, \;\; v_t(x,0) = 0. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$W(Q_T) = \{u : u \in W_2^1(Q_T), \quad u(0,t) = u(l,t) = 0\},$$

$$\hat{W}(Q_T) = \{u : u \in W(Q_T), \quad u(x,T) = 0\}.$$

Норму в этих пространствах определим следующим образом:

$$||u||_{W(Q_T)} = ||u||_{L_2(Q_T)} + ||u_t||_{L_2(Q_T)} + ||u_x||_{L_2(Q_T)}.$$

Введем понятие обобщенного решения вспомогательной задачи (2.1)—(2.3), пусть $\eta \in \hat{W}(Q_T)$. Следуя известной процедуре [9, с. 210], получим тождество

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l (-v_t\eta_t + v_x\eta_x + cv\eta) dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_0^l \eta(x,t) \int\limits_0^T [Pu + 2N_x u_x - N_\tau u_\tau] d\tau dxdt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^l F(x,t)\eta(x,t) dxdt. \tag{2.4}$$

**Определение.** Обобщенным решением вспомогательной задачи (2.1), (2.2), (2.3) будем называть пару функций $u,v$ из $W(Q_T)$, удовлетворяющих тождеству (2.4), равенству (2.3) и условию $v(x,0) = 0$.

Будем искать приближенные решения вспомогательной задачи из соотношений

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l (-v_t^m\eta_t + v_x^m\eta_x + cv^m\eta) dxdt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^l \eta(x,t) \int\limits_0^T [P(x,t,\tau)u^m + 2N_x(x,t,\tau)u_x^m - N_\tau(x,t,\tau)u_\tau^m] d\tau dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_0^l F(x,t)\eta(x,t)dxdt, \quad v^m(x,0) = 0, \tag{2.5}$$

$$u^m(x,t) + \int_0^T N(x,t,\tau)u^m(x,\tau)d\tau = v^{m-1}(x,t). \tag{2.6}$$

Положим $v^0(x,t) = 0$. Тогда $u^1(x,t) = 0$ как решение однородного уравнения (2.6), и тождество (2.5) для $m = 1$ не содержит неизвестной функции $u^1(x,t)$, поэтому $v^1(x,t)$ определяется как обобщенное решение первой начально-краевой задачи для уравнения

$$v^1_{tt} - v^1_{xx} + cv^1 = F(x,t)$$

с однородными начальными условиями. Как известно, эта задача однозначно разрешима в $W(Q_T)$, и справедливо неравенство [9, с. 215]

$$||v^1||_{W^1_2(Q_T)} \leqslant C(||F(x,t)||_{L_2(Q_T)}. \tag{2.7}$$

Найдем постоянную $C$, входящую в правую часть этого неравенства.

Для гладких функций $v(x,t)$, удовлетворяющих уравнению $v^1_{tt} - v^1_{xx} + cv^1 = F(x,t)$ с $F \in L_2(Q_T)$ и однородным начальным и краевым условиям, для любого $\tau \in [0,T]$ и любой функции $\eta(x,t)$, обладающих той же гладкостью, что и $v(x,t)$, справедливо тождество

$$\int_0^\tau \int_0^l (v_{tt} - v_{xx} + cv)\eta dxdt = \int_0^\tau \int_0^l F\eta dxdt,$$

положив в котором $\eta(x,t) = v_t(x,t)$, получим равенство

$$\int_0^\tau \int_0^l (v_{tt}v_t - v_{xx}v_t + cvv_t)dxdt = \int_0^\tau \int_0^l Fv_t dxdt.$$

Интегрируя по частям в левой его части, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l [v_t^2(x,\tau) + v_x^2(x,\tau)]dx = \int_0^\tau \int_0^l Fv_t dxdt - \int_0^T \int_0^l cvv_t dxdt.$$

Для оценки правой части последнего равенства используем неравенство Коши. Заметим, что из условий теоремы вытекает существование числа $c_0 > 0$ такого, что $|c(x)| \leqslant c_0$. Получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l [v_t^2(x,\tau) + v_x^2(x,\tau)]dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\tau \int_0^l F^2 dxdt + \int_0^T \int_0^l (c_0v^2 + (1+c_0)v_t^2)dxdt.$$

Применив теперь неравенство

$$\int_0^l v^2(x,t)dx \leqslant \frac{l^2}{2}\int_0^l v_x^2 dx, \tag{2.8}$$

вытекающее из представления $v(x,t)=\int\limits_0^x v_\xi(\xi,t)d\xi$, приходим к оценке

$$\int\limits_0^l (v_t^2(x,\tau)+v_x^2(x,\tau))dx \leqslant m_0\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (v_t^2+v_x^2)dxdt+||F||^2_{L_2(Q_T)}.$$

Применив к последнему неравенству лемму Гронуолла, получим

$$\int\limits_0^l [v_t^2(x,\tau)+v_x^2(x,\tau)]dx \leqslant \exp\{m_0\tau\}||F||^2_{L_2(Q_T)}. \tag{2.9}$$

Интегрируя неравенство (2.9) по $\tau$ от 0 до $T$, приходим к оценке норм:

$$||v_t||_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{m_0}}\sqrt{\exp\{m_0T\}-1}||F||_{L_2(Q_T)},$$

$$||v_x||_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{m_0}}\sqrt{\exp\{m_0T\}-1}||F||_{L_2(Q_T)}.$$

Воспользовавшись еще раз неравенством (2.8), получим

$$||v||_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{l}{\sqrt{2m_0}}\sqrt{\exp\{m_0T\}-1}||F||_{L_2(Q_T)}.$$

Тогда

$$||v||_{W(Q_T)} \leqslant \frac{l+2\sqrt{2}}{\sqrt{2m_0}}\sqrt{\exp\{m_0T\}-1}||F||_{L_2(Q_T)}.$$

Замыкая это неравенство по норме, убеждаемся, что оно справедливо и для функций $v\in W(Q_T)$. Таким образом, в неравенстве (2.7)

$$C=\frac{l+2\sqrt{2}}{\sqrt{2m_0}}\sqrt{\exp\{m_0T\}-1}.$$

Вернемся к доказательству разрешимости вспомогательной задачи. По найденному $v^1(x,t)$ на следующем шаге найдем $u^2(x,t)$ как решение уравнения (2.6) с правой частью $v^1(x,t)\in W(Q_T)$, а затем $v^2(x,t)$ как решение первой начально-краевой задачи. Продолжая этот процесс, мы построим последовательность приближенных решений вспомогательной задачи $\{v^m,u^m\}$ таких, что выполняется неравенство

$$||v^m||_{W(Q_T)} \leqslant C||F^m||_{L_2(Q_T)}, \tag{2.10}$$

в правую часть которого теперь входит $u^m(x,t):$

$$F^m(x,t)=F(x,t)+\int\limits_0^T [P(x,t,\tau)u^m+2N_x(x,t,\tau)u_x^m-N_\tau(x,t,\tau)u_\tau^m]d\tau.$$

Перейдем к выводу априорной оценки.

Обозначим

$$r^m=v^{m+p}-v^m,\quad s^m=u^{m+p}-u^m.$$

Нетрудно видеть, что справедливы соотношения

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (-r_t^m\eta_t+r_x^m\eta_x+cr^m\eta)dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^l \eta(x,t)\int_0^T [Ps^m + 2N_x s_x^m - N_\tau s_\tau^m]d\tau dx dt = 0, \tag{2.11}$$

$$s^m(x,t) + \int_0^T N(x,t,\tau)s^m(x,\tau)d\tau = r^{m-1}(x,t). \tag{2.12}$$

Выведем ряд неравенств.

Рассмотрим равенство (2.12) и умножим обе его части на $s^m(x,t)$ скалярно. Получим равенство

$$||s^m||^2_{L_2(Q_T)} = (r^{m-1}, s^m)_{L_2(Q_T)} - (\int_0^T N(x,t,\tau)s^m(x,\tau)d\tau, s^m)_{L_2(Q_T)},$$

из которого в результате очевидных преобразований следует неравенство

$$||s^m||_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{1}{1-n_0}||r^{m-1}||_{L_2(Q_T)}. \tag{2.13}$$

Дифференцируя (2.12) по $t$, а затем по $x$, умножив скалярно на $s_t^m$ и $s_x^m$ соответственно, получим, как и выше, с учетом (2.13) еще два неравенства:

$$||s_t^m||_{L_2(Q_T)} \leqslant ||r_t^{m-1}||_{L_2(Q_T)} + \frac{n_0}{1-n_0}||r^{m-1}||_{L_2(Q_T)}, \tag{2.14}$$

$$||s_x^m||_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{1}{1-n_0}||r_x^{m-1}||_{L_2(Q_T)} + \frac{n_0}{(1-n_0)^2}||r^{m-1}||_{L_2(Q_T)}. \tag{2.15}$$

Из (2.13)—(2.15) получаем оценку нормы:

$$||s^m||_{W(Q_T)} \leqslant \gamma_1||r^{m-1}||_{W(Q_T)}, \tag{2.16}$$

Заметим, что для каждого $m$ соотношения (2.11), (2.12) имеют такой же вид, как и (2.5), (2.6), но для $F = 0$. Используя выведенную выше оценку (2.10), получим

$$||r^m||_{W(Q_T)} \leqslant C||F_0^m||_{L_2(Q_T)} \tag{2.17}$$

с найденной выше постоянной $C$, где

$$F_0^m(x,t) = \int_0^T P(x,t,\tau)s^m(x,\tau)d\tau + 2\int_0^T N_x(x,t,\tau)s_x^m(x,\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^T N_\tau(x,t,\tau)s_\tau^m d\tau.$$

Рассмотрим правую часть последнего равенста.

Используя неравенство Коши—Буняковского и выведенные неравенства (2.13)—(2.15), получим

$$||F_0^m||_{L_2(Q_T)} \leqslant \gamma_0||s^m||_{W(Q_T)},$$

что влечет за собой в силу (2.16) и (2.17) выполнение неравенства

$$||r^m||_{W(Q_T)} \leqslant C\gamma_0\gamma_1||r^{m-1}||_{W(Q_T)}. \tag{2.18}$$

Если

$$C\gamma_0\gamma_1 < 1, \tag{2.19}$$

то из неравенства (2.18) следует сходимость последовательности $\{r^m(x,t)\}$, а в силу (2.16) — и последовательности $\{s^m(x,t)\}$. Так как $r^m = v^{m+p} - v^m$, $s^m = u^{m+p} - u^m$, то последовательности $\{v^m(x,t)\}$, $\{u^m(x,t)\}$ являются фундаментальными в пространстве $W(Q_T)$ и в силу его полноты сходятся к элементам $v(x,t)$, $u(x,t)$, принадлежащим $W(Q_T)$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в (2.5) и (2.6), убеждаемся, что $v(x,t)$, $u(x,t)$ определяют единственное решение вспомогательной задачи, принадлежащее пространству $W(Q_T)$.

Заметим, что в силу условий теоремы $\int\limits_0^T [Pu + 2N_x u_x - N_\tau u_\tau]d\tau \in L_2(Q_T)$ и $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^T [P_t u + 2N_{xt} u_x - N_{\tau t} u_\tau]d\tau \in L_2(Q_T)$. Поэтому нетрудно доказать, следуя [9, с. 218], что функция $v(x,t)$, рассматриваемая как решение из $W(Q_T)$ первой начально-краевой задачи для уравнения $Lv = h + F$, где

$$h(x,t) = \int\limits_0^T [P(x,t,\tau)u^m + 2N_x(x,t,\tau)u_x^m - N_\tau(x,t,\tau)u_\tau^m]d\tau,$$

имеет производные $v_{tt}, v_{xt} \in L_2(Q_T)$. Тогда [9, с. 218] и тождество (2.4) можно записать так:

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l (v_{tt}\eta + v_x\eta_x + cv\eta)dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_0^l \eta(F+h)dxdt. \tag{2.20}$$

Покажем, что функция $v(x,t)$ имеет и вторую производную по $x$. В последнем тождестве выберем $\eta(x,t) = \chi(t)\Phi(x)$, где $\chi(t)$—произвольный элемент $L_2(0,T)$, а $\Phi(x)$—произвольный элемент $W(0,l)$, и запишем интегралы $\int\limits_0^T \int\limits_0^l ...dxdt$ как повторные $\int\limits_0^T \chi(t) \int\limits_0^l ...dxdt$. В силу произвола выбора $\chi(t)$ из (2.20) для почти всех $t \in [0,T]$ будет выполняться тождество

$$\int\limits_0^l v_x\Phi' dx = \int\limits_0^l \Phi(-v_{tt} - cv + F + h)dx,$$

которое и означает существование $v_{xx} \in L_2(Q_T)$. Стало быть, $v \in W_2^2(Q_T)$.

В силу взаимной однозначности оператора $B$ $u \in W_2^2(Q_T)$. Учитывая принадлежность функций $u, v$ пространству $W_2^2(Q_T)$, тождество (2.4) можно записать следующим образом:

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l (v_{tt} - v_{xx} + cv)\eta dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_0^l \eta[\int\limits_0^T (Nu)_{xx}d\tau - c(x,t)\int\limits_0^T Nud\tau]dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T \int\limits_0^l \eta \int\limits_0^T N(u_{\tau\tau} - u_{xx} + c(x,\tau)u)d\tau dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_0^l F\eta dxdt.$$

Так как $v = Bu$, $\int\limits_0^T (Nu)_{xx}d\tau - c(x,t)\int\limits_0^T Nud\tau = -LBu + Lu$, $\int\limits_0^T N(u_{\tau\tau} - u_{xx} +$

$+ c(x,\tau)u)d\tau = BLu - Lu$, то последнее тождество можно записать так:

$$\int_0^T\int_0^l \eta LBu dxdt + \int_0^T\int_0^l \eta(Lu - LBu)dxdt +$$

$$+\int_0^T\int_0^l \eta(BLu - Lu)dxdt = \int_0^T\int_0^l \eta Bf dxdt,$$

откуда следует, в силу произвольности $\eta(x,t)$,

$$B(Lu - f) = 0,$$

что означает, что $u(x,t)$ — решение уравнения (1.1). Выполнение условий (1.3) следует из (2.3). Теорема доказана.

## Литература


[1] Самарский А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.

[2] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделир. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.

[3] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.

[4] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1 и 2-го рода // Известия вузов. Сер.: Математика. 2012. № 4. С. 74–83.

[5] Пулькина Л.С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1 рода с ядрами, зависящими от времени // Известия вузов. Сер.: Математика. 2012. № 10. С. 32–44.

[6] Кузь А.М., Пташник Б.И. Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна-Гордона у классі функцій, майже периодичних за просторовими змінними // Прикл. проблеми мех. і мат. 2010. Вип. 8. С. 41–53.

[7] Абдрахманов А.М., Кожанов А.И. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка // Известия вузов. Сер.: Математика. 2007. № 5. С. 3–12.

[8] Лукина Г.А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями по времени для уравнений третьего порядка // Матем. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17. Вып. 2. С. 75–97.

[9] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.


Поступила в редакцию $4/IV/2013$;
в окончательном варианте — $6/VI/2013$.

# ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH NONLOCAL IN TIME CONDITIONS FOR A ONE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION

 S.V. Kirichenko[2]

In this article, the boundary value problem for hyperbolic equation with nonlocal initial data in integral form is considered. Existence and uniqueness of generalized solution are proved.

**Key words:** hyperbolic equation, non-local conditions, generalized solution.

Paper received 4/*IV*/2013.
Paper accepted 6/*VI*/2013.

[2]Kirichenko Svetlana Viktorovna (svkirichenko@mail.ru), the Dept. of Higher Mathematics, Samara State University of Railway Transport, Samara, 443066, Russian Federation.