УДК 517.977.5

*С.С. Грачева**

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕКЛАМНОЙ СТРАТЕГИИ КОМПАНИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ СПРОСА

В статье рассматривается дискретная модель оптимизации рекламной политики фирмы. Задача решается методом динамического программирования. Полученное решение позволяет максимизировать прибыль компании.

Ключевые слова: оптимальное управление, дискретная модель, рекламные расходы, динамическое программирование, нелинейный спрос

Реклама является одним из важнейших способов продвижения продукции на рынок. Практически перед каждой компанией стоит задача определения оптимальной величины рекламного бюджета. При недостаточном выделении средств на рекламу компания недополучает прибыль от продажи продукции, поскольку потребители недостаточно осведомлены о товаре. Избыточные расходы на рекламные мероприятия необоснованно увеличивают затраты компании.

В настоящее время существует несколько различных подходов к определению рекламного бюджета [7].

Достаточно часто менеджеры при определении величины необходимых рекламных вложений опираются только на собственный опыт, интуицию и здравый смысл. Однако решения, принимаемые таким образом, нередко бывают ошибочны.

В последнее время на практике все чаще стали использоваться более сложные методы определения рекламного бюджета, учитывающие динамику продаж продукции. Данные методы рассматривают задачу определения оптимальной величины рекламных вложений как задачу оптимального управления [1—5].

Рассмотрим следующую постановку задачи. Динамика объема продаж продукции описывается в виде следующей модели:

$$d_t = bu_t^{\alpha} + cd_{t-1}, \tag{1}$$

где d_t — спрос на продукцию за период времени t (описывается как объем продаж в денежном выражении); u_t — расходы на рекламу за период времени t; $t = 1, 2, \dots T$.

Здесь T — заданный конечный горизонт планирования.

Запишем

$b > 0, \quad 0 < c < 1,$

α — коэффициент эластичности, показывающий зависимость объема продаж от величины рекламных вложений.

Предполагается, что $0<\alpha<1$. Начальное значение спроса на продукцию задано.

Грачева Светлана Сергеевна (znanie01@mail.ru), кафедра статистических методов Высшей школы экономики, 101000, Российская Федерация, г. Москва, ул. Мясницкая, 20.

Как видно из модели (1), предполагается, что спрос предыдущего периода оказывает влияние на спрос последующего периода. Информация о продукции распространяется от одного покупателя к другому.

Рассматривается задача определения оптимальных рекламных расходов компании в течение выбранного горизонта планирования. Менеджер компании должен определить уровень рекламных затрат в каждом периоде времени таким образом, чтобы максимизировать совокупную прибыль своего предприятия.

Критерий качества имеет вид:

$$J = \sum_{t=1}^{T} \pi_t r^t = \sum_{t=1}^{T} \left[d_t - v - u_t\right] r^t \ , \tag{2}$$

где v — затраты на производство продукции, которые будем считать на каждом периоде планирования постоянными; π_t — прибыль за период t $(t = 1, 2, \ldots T)$; r — дисконтный множитель.

$$r^t = \frac{1}{(1+i)^t},$$

где i — ставка дисконтирования.

На управляющие воздействия наложены ограничения

$$u_t \geq 0 . \tag{3}$$

Получим решение данной задачи методом динамического программирования Беллмана [6].

Согласно данному многошаговому методу, необходимо построить рекуррентную формулу для оптимального управления. Опишем несколько итераций для нахождения оптимального решения. Процесс решения начинается с правого конца рассматриваемого интервала планирования. Запишем значение критерия качества в конечной точке интервала.

$$J_1(d_{T-1}) = \max_{u_T}\left[d_T - v - u_T\right] = \max_{u_T}\left[b u_T^{\alpha} + c d_{T-1} - v - u_T\right]. \tag{4}$$

Найдем оптимальное значение рекламных вложений, доставляющее максимум данному критерию

$$b\alpha u_T^{\alpha-1} - 1 = 0,$$

$$u_T^{\alpha-1} = \frac{1}{b\alpha},$$

$$u_T = (b\alpha)^{1/1-\alpha},$$

$$u_{T-1} = \sqrt[1-\alpha]{b\alpha} . \tag{5}$$

Выражение (5) представляет собой решение задачи в конце горизонта планирования.

Аналогично находится решение задачи u_{T-1}.

Запишем оптимальное значение целевой функции:

$$J_2(d_{T-2}) = \max_{u_{T-1}}\left[d_{T-1} - v - u_{T-1} + rJ_1(d_{T-1})\right].$$

Подставим в значение функционала выражение для критерия $J_1(d_{T-1})$ и выражение для спроса

$$d_{T-1} = b u_{T-1}^{\alpha} + c d_{T-2}, \tag{6}$$

$$J_2(d_{T-2}) = \max_{u_{T-1}}\left[bu_{T-1}^{\alpha} + cd_{T-2} - v - u_{T-1} + rJ_1(d_{T-1})\right], \tag{7}$$

$$J_2(d_{T-2}) = \max_{u_{T-1}}\left[bu_{T-1}^{\alpha} + cd_{T-2} - v - u_{T-1} + r\left[(bu_T^{\alpha} + c(bu_{T-1}^{\alpha} + cd_{T-2}) - v - u_T)\right]\right]$$

Дифференцируем полученное выражение по , приравниваем производную к нулю и получаем оптимальное значение рекламных значений на интервале *T-1*

$$u_{T-1} = \sqrt[1-\alpha]{(1+rc)b\alpha}\ . \tag{8}$$

Можно отметить, что выражения (5) и (8) отличаются только наличием выражения (1+rc) под знаком корня в формуле (8).

Рассмотрим оптимальное значение целевой функции задачи на шаге *T-3*:

$$J_3(d_{T-3}) = \max_{u_{T-2}}\left[d_{T-2} - v - u_{T-2} + rJ_2(d_{T-2})\right].$$

Подставляем в данное выражение формулу для спроса

$$d_{T-2} = bu_{T-2}^{\alpha} + cd_{T-3}$$

и дифференцируем по u_{T-2}. Приравнивая полученную производную к нулю, получим оптимальное значение

$$u_{T-2} = \sqrt[1-\alpha]{(1+rc+r^2c^2)b\alpha}\ . \tag{9}$$

Формулу (9) можно переписать в виде

$$u_{T-2} = \sqrt[1-\alpha]{b\alpha\sum_{i=0}^{2}(rc)^i}\ . \tag{10}$$

Аналогично находится оптимальное решение задачи на интервале Т-*k*:

$$J_{k+1}(d_{T-(k+1)}) = \max_{u_{T-k}}\left[d_{T-k} - v - u_{T-k} + rJ_k(d_{T-k})\right].$$

Производя все описанные выше вычисления, получаем рекуррентное соотношение для оптимального значения рекламных вложений на *k*-м шаге:

$$u_{T-k} = \sqrt[1-\alpha]{b\alpha\sum_{i=0}^{k}(rc)^i}\ . \tag{11}$$

Сумму геометрической прогрессии $\sum_{i=0}^{k}(rc)^i$ можно записать в следующем виде:
$\sum_{i=0}^{k}(rc)^i = \frac{1-(rc)^{k+1}}{1-rc}$

Тогда оптимальное решение (11) представляется в виде

$$u_{T-k} = \sqrt[1-\alpha]{b\alpha\frac{1-(rc)^{k+1}}{1-rc}}, \quad k=0,1, \qquad T-1. \tag{12}$$

На рис. 1 и 2 качественно показаны графики оптимального распределения рекламных вложений и соответствующие им значения объема продаж компании. Все данные на рисунках условные.

Как видно из рис. 1, вложения в рекламу первое время держатся практически на постоянном максимальном уровне. В начале рекламной кампании это необходимо для продвижения продукции на рынок. Затем, при завершении проекта, затраты на рекламу начинают постепенно уменьшаться.

Динамика объема продаж, показанная на рис. 2, имеет похожую тенденцию. Сначала спрос на продукцию компании возрастает под влиянием активной рекламной кампании, затем, по мере снижения рекламы, начинает также уменьшаться. Проект заканчивается.

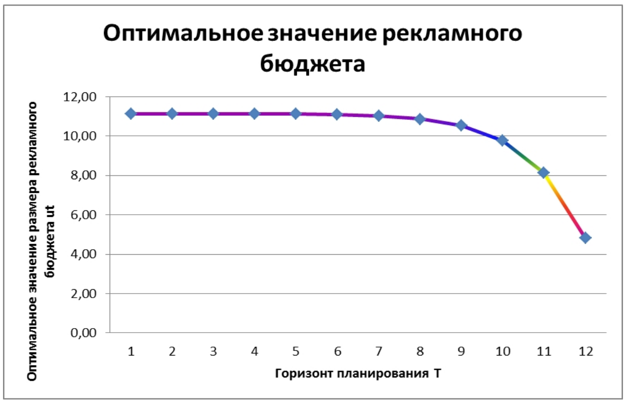

Рис. 1. Оптимальное распределение рекламных вложений

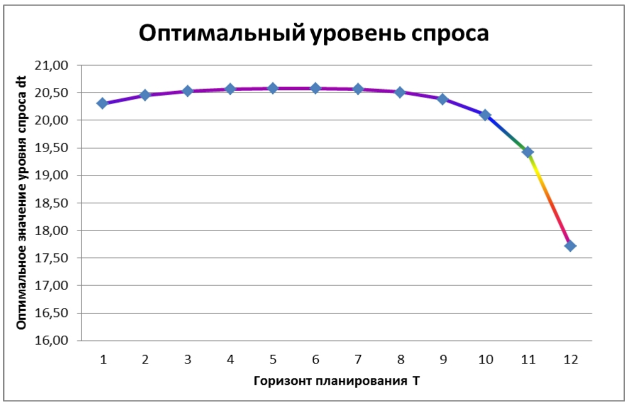

Рис. 2. Оптимальный уровень спроса на продукцию

Рассмотрим теперь стационарный случай, т. е. ситуацию, когда горизонт планирования не задан и считается достаточно большим.

В этом случае предполагается, что фирма не собирается уходить из бизнеса, а планирует заниматься им неопределенный срок.

Модель, как и ранее, записывается в виде

$$d_t = bu_t^{\alpha} + cd_{t-1}.$$

Критерий качества имеет смысл максимизации дисконтированной прибыли на бесконечном горизонте планирования

$$J = \sum_{t=1}^{\infty} [d_t - u_t]\, r^t .$$

Для нахождения решения используем формулу (11)

$$\lim_{T\to\infty} u_{T-k} = \lim_{T\to\infty} \sqrt[1-\alpha]{b\alpha \sum_{i=0}^{k} (rc)^i}\,, \quad k=0, \quad T-1.$$

Поскольку, как уже было отмечено, сумма $\sum_{i=0}^{k}(rc)^i$ представляет собой геометрическую прогрессию, то при определенных условиях можно найти значение предела

$$\lim_{T\to\infty} u_{T-k} = \sqrt[1-\alpha]{b\alpha \frac{1}{1-rc}}, \qquad \text{если } |rc|<1.$$

Таким образом, в случае, если выполнены указанные условия существования предела, оптимальное стационарное значение рекламных расходов может быть записано в виде

$$u^*_{\text{ст}} = \sqrt[1-\alpha]{b\alpha \frac{1}{1-rc}} \ . \tag{13}$$

Подставив оптимальный уровень рекламных вложений в уравнение (1), описывающее динамику объема продаж, можно вычислить оптимальный стационарный уровень спроса:

$$d^*_{\text{ст}} = \frac{b(u^*_{\text{ст}})^{\alpha}}{(1-c)} . \tag{14}$$

Подставляя в формулу (14) выражение (13), получим значение стационарного спроса, выраженное через параметры исходной модели

$$d^*_{\text{ст}} = \sqrt[1-\alpha]{\frac{b\alpha^{\alpha}}{(1-c)(1-rc)}} . \tag{15}$$

Как видно из выражения (15), оптимальное значение спроса в стационарной модели увеличивается при возрастании параметров b и α, характеризующих эффективность рекламных вложений, а также при росте параметра c, показывающего интенсивность распространения информации о продукции от одного покупателя к другому.

Перечислим основные результаты работы. Для рассмотренной модели, описывающей динамику объема продаж компании, была решена задача определения оптимальных рекламных вложений. Полученное решение позволяет максимизировать прибыль фирмы.

Для практического применения результатов, полученных в данной работе, необходимо оценить параметры модели (1), используя имеющуюся статистическую информацию для реальной компании. Решение данной задачи позволит дать фирме рекомендации по распределению средств на проведение рекламных мероприятий и добиться максимизации своей прибыли.

Библиографический список

1. Mahajan V., Muller E. Advertising Pulsing Policies for Generating Awareness for New Products // Marketing Sci. 1986. V. 5. № 2. P. 89–106.

2. Sasieni M. W. Optimal Advertising Strategies // Marketing Science. 1989. V. 8. № 4. P. 358–370.

3. Feinberg F.M. On Continuous-Time Optimal Advertising Under S-Shaped Response // Management Sci. 2001. V. 47. № 11. P. 1476–1487.

4. Welam U.P. Optimal and Near Optimal Price and Advertising Strategies for Finite and Infinite Horizons // Management Sci. 1982. V. 28. № 11. P. 1313–1327.

5. Бородин А.И., Сорочайкин А.Н. Особенности методов стохастической оптимизации в социально-экономических системах // Экономические науки. 2013. № 4 (101). С. 151–156.

6. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / пер. с англ. Г.И. Жуковой, Ф.Я. Кельмана. М.: Айрис-пресс, 2002. 576 с.
7. Дихтль Е., Хершген Х. Практический маркетинг: учеб. пособие / пер. с нем. А.М. Макарова; под ред. И.С. Минко. М.: Высшая шк.: ИНФРА-М, 1996. 225 с.

References

1. Mahajan V., Muller E. Advertising Pulsing Policies for Generating Awareness for New Products // Marketing Sci. 1986. V. 5. № 2. P. 89–106.
2. Sasieni M. W. Optimal Advertising Strategies // Marketing Science. 1989. V. 8. № 4. P. 358–370.
3. Feinberg F.M. On Continuous-Time Optimal Advertising Under S-Shaped Response // Management Sci. 2001. V. 47. № 11. P. 1476–1487.
4. Welam U.P. Optimal and Near Optimal Price and Advertising Strategies for Finite and Infinite Horizons // Management Sci. 1982. V. 28. № 11. P. 1313–1327.
5. Borodin A.I., Sorochaikin A.N. Peculiarities of methods of stochastic optimization in social and economic systems // Ekonomicheskie nauki. 2013. № 4 (101). P. 151–156.
6. Intriligator M. Mathematical optimization and economic theory / translation from English G.I. Zhukova, F.Ya. Kel'man. M.: Airis-press, 2002. 576 p.
7. Dikhtl' E., Hjorshgen Kh. Practical marketing: Schoolbook / nranslation from German A.M. Makarov; ed. by I.S. Minko. M.: Vysshaya shkola.: INFRA-M, 1996. 225 p.

S.S. Gracheva*

OPTIMIZATION OF ADVERTISING STRATEGY OF A COMPANY IN CASE OF NON-LINEAR FUNCTION OF DEMAND

The article examines discrete model of optimization of advertising policy of a company. This problem is solved by the method of dynamical programming. The resulting solution allows the company to maximize profits.

Key words: optimum control, discrete model, publicity expenditures, dynamical programming, non-linear demand.

* *Gracheva Svetlana Sergeevna* (znanie01@mail.ru), the Dept. of Statistic Methods, National Research University Higher School of Economics, Moscow, 101000, Russian Federation.