УДК 536.2.01

АБЛЯЦИЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ВЫЗЫВАЕМАЯ ТЕПЛОВЫМ УДАРОМ

© 2010 А.Г. Шаталов[1]

Рассматривается трехмерная задача абляции для полупространства, на границе которого задана температура. Предполагается, что тепло распространяется с конечной скоростью. Решение представляется в виде лучевого ряда. Расположение фронтов абляции в различные моменты времени проиллюстрировано графиками.

Ключевые слова: абляция, фазовый переход, инерция теплового потока, тепловой удар, лучевой ряд, интенсивность разрыва, абсолютная производная, кинематические и геометрические условия совместности.

Введение

Стефан в конце XIX века, изучая таяние льдов, впервые сформулировал задачу о фазовых переходах. Постановка задачи приводит к нелинейности III рода [1]. Характерная особенность в задачах данного класса состоит в том, что необходимо определять положение поверхности раздела фаз. Если при определенных условиях, скажем, при входе космических объектов в плотные слои атмосферы расправленный материал сносится набегающим потоком, то задачу называют задачей с уносом массы, или задачей абляции. Классическая модель теплопроводности Фурье приводит к тому, что в начальный момент времени тепловой поток принимает бесконечное значение. Для устранения данного парадокса в работе предполагается, что тепло распространяется с конечной скоростью. Это приводит к гиперболичности уравнения теплопроводности.

1. Постановка задачи

Математическая модель, описывающая абляцию материала с учетом инерции теплового потока, содержит обобщенный закон теплопроводно-

[1]Шаталов Александр Григорьевич (alexShat@mail.ru), кафедра математики Воронежского военного авиационного инженерного университета, 394064, Россия, г. Воронеж, ул. Старых большевиков, 54А.

сти [2] и закон сохранения энергии [3]

$$\tau_0 q_{i,t} + q_i = -\lambda_0 T_{,i}, \qquad q_{i,i} + c_p T_{,t} = 0, \tag{1.1}$$

где q_i — вектор теплового потока, T — температура, τ_0 — время релаксации теплового потока, λ_0 — коэффициент теплопроводности, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, t — время. Всюду индексы после запятой означают дифференцирование по соответствующей переменной и принято условие суммирования по повторяющимся индексам, причем латинские индексы принимают значения 1–3, а греческие — значения 1–2. Пространственные координаты x_i предполагаются декартовыми.

На границе полупространства $x_3 = 0$ задана температура

$$T(x_1, x_2, 0, t) = u_0(t) \exp(-d(x_1^2 + x_2^2)), \tag{1.2}$$

где d — const.

На границе абляции выполняется условие Стефана, и температура среды равна температуре плавления T_L

$$[q_i \nu_i] = L\rho V, \quad T(x_1, x_2, x_3, t) = T_L. \tag{1.3}$$

Здесь $[f] = (f^+ - f^-)|_\Sigma$ — разрыв функции на поверхности Σ; индекс плюс относится к значению функции перед фронтом волны разрыва, индекс минус — за фронтом волны разрыва. ν_i — единичный вектор нормали к поверхности; L — скрытая теплота плавления; ρ — плотность; $V = dX/dt$ — скорость фронта абляции.

Среда в начальный момент времени находится в невозмущенном состоянии

$$T(x_1, x_2, x_3, 0) = 0. \tag{1.4}$$

2. Лучевой метод

Решение для температуры и вектора теплового потока ищется в виде лучевого ряда [4]

$$f = (f^+ - [f])\Big|_\Sigma - h(f_{,n}^{(1)+} - [f_{,n}^{(1)}])\Big|_\Sigma + \frac{h^2}{2!}(f_{,nn}^{(2)+} - [f_{,nn}^{(2)}])\Big|_\Sigma - \dots \tag{2.1}$$

Здесь $f_{,n\dots n}^{(k)} = \dfrac{\partial^k f}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_l} \nu_i \nu_j \dots \nu_l$, h — расстояние по нормали за фронтом поверхности разрыва. Если среда находится в невозмущенном состоянии, то

$$f^+|_\Sigma = f_{,n}^{+(1)}|_\Sigma = f_{,nn}^{+(2)}|_\Sigma = \dots = 0.$$

Для нахождения решения задачи (1.1)–(1.4) перейдем от неподвижной ортогональной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 к подвижной локальной ортогональной системе координат y_1, y_2, $\mathbf{n}$, связанной с некоторой движущейся со скоростью c поверхностью $\Sigma(y_1, y_2, t)$, координаты которой в любой момент времени имеют вид $x_i = x_i(y_1, y_2, t)$.

Скорость фронта абляции представляется в виде

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y_1, y_2) t^k. \tag{2.2}$$

Запишем систему уравнений (1.1) в разрывах

$$-\tau_0[q_i] + \lambda_0[T]\nu_i = 0, \quad [q_i]\nu_i - c_p c[T] = 0. \tag{2.3}$$

Приравнивая к нулю определитель системы четвертого порядка (2.3), получим значение скорости тепловой волны

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\tau_0 c_p}}.$$

В работе [5] получено уравнение затухания интенсивности разрыва, которое для данной краевой задачи имеет вид

$$\frac{\delta\omega}{\delta t} + \frac{\omega}{2\tau_0} = 0. \tag{2.4}$$

Здесь $\omega = [q_i]\nu_i|_\Sigma$, $\dfrac{\delta}{\delta t}$ — абсолютная производная [6].

Разрывы теплового потока и температуры связаны соотношениями

$$[q_i] = \omega\nu_i, \quad [T] = \frac{\omega}{c_1 c_p}. \tag{2.5}$$

Решение дифференциального уравнения (2.4) имеет вид

$$\omega = \omega_0(y_1, y_2) \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right). \tag{2.6}$$

Продифференцируем систему (1.1) m раз по нормали $\mathbf{n}$ к поверхности Σ и запишем в разрывах

$$\tau_0[q^{(m+1)}_{i,tn\ldots n}] + \lambda_0[T^{(m+1)}_{,in\ldots n}] = -[q^{(m)}_{i,n\ldots n}], \quad [q^{(m+1)}_{i,in\ldots n}] + c_p[T^{(m+1)}_{,tn\ldots n}] = 0. \tag{2.7}$$

Кинематические и геометрические условия совместности $(m+1)$-го порядка при постоянной скорости волны разрыва имеют вид [7]

$$[f^{(m+1)}_{,in\ldots n}] = [f^{(m+1)}_{,n\ldots n}]\nu_i + g^{\alpha\beta}[f^{(m)}_{,n\ldots n}]_{,\alpha} x_{i,\beta},$$

$$[f^{(m+1)}_{,tn\ldots n}] = -c[f^{(m+1)}_{,n\ldots n}] + \frac{\delta[f^{(m)}_{,n\ldots n}]}{\delta t}. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.7), получим

$$-\tau_0 c[q^{(m+1)}_{i,n\ldots n}] + \lambda_0[T^{(m+1)}_{,n\ldots n}]\nu_i = -\tau_0\frac{\delta[q^{(m)}_{i,n\ldots n}]}{\delta t} - \lambda_0 g^{\alpha\beta}[T^{(m)}_{,n\ldots n}]_{,\alpha} x_{i,\beta} - [q^{(m)}_{i,n\ldots n}],$$

$$[q^{(m+1)}_{i,n\ldots n}]\nu_i - c_p c[T^{(m+1)}_{,n\ldots n}] = -g^{\alpha\beta}[q^{(m)}_{i,n\ldots n}]_{,\alpha} x_{i,\beta} - c_p\frac{\delta[T^{(m)}_{,n\ldots n}]}{\delta t}. \tag{2.9}$$

Исключим разрыв $[q^{(m+1)}_{i,n\ldots n}]$. Для этого умножим первое уравнение на ν_i, просуммируем по индексу i и сложим со вторым уравнением, умноженным на $\tau_0 c$, получим

$$(\lambda_0 - \tau_0 c_p c^2)[T^{(m+1)}_{,n\ldots n}] = -\tau_0 \nu_i \frac{\delta[q^{(m)}_{i,n\ldots n}]}{\delta t} - [q^{(m)}_{i,n\ldots n}]\nu_i -$$

$$-\tau_0 c g^{\alpha\beta}[q^{(m)}_{i,n\ldots n}]_{,\alpha} x_{i,\beta} - \tau_0 c_p c \frac{\delta[T^{(m)}_{,n\ldots n}]}{\delta t}. \qquad (2.10)$$

Полученное рекуррентное уравнение при значении $c = c_1$ описывает поведение разрывов для температуры и теплового потока порядка m на поверхности разрыва.

Для краевой задачи (1.1)–(1.4) тепловая волна представляет собой плоскость, которая распространяется вдоль оси $0x_3$ со скоростью c_1. В качестве криволинейных координат на движущейся поверхности выберем $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$. Декартова координата движущейся поверхности $x_3 = c_1 t$, компоненты единичного вектора нормали к плоскости принимают значения $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\nu_3 = 1$.

Подставляя в (2.10) $c = c_1$ при $m = 1$, получим уравнение затухания для интенсивности разрыва первого порядка

$$\frac{\delta\omega^{(1)}_n}{\delta t} + \frac{\omega^{(1)}_n}{2\tau_0} = -\frac{\omega}{8\tau_0^2 c_1} - c_1 \frac{\omega_{,\alpha\alpha}}{2}. \qquad (2.11)$$

Здесь $\omega^{(1)}_n = [q^{(1)}_{i,n}]\nu_i|_\Sigma$.

Решение уравнения (2.11) имеет вид

$$\omega^{(1)}_n = \left[\omega_{n0}(y_1, y_2) - \left(\frac{\omega_0(y_1, y_2)}{8\tau_0^2 c_1} + c_1 \frac{\omega_{0,\alpha\alpha}(y_1, y_2)}{2}\right) t\right] \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right). \qquad (2.12)$$

Из (2.9) при $m = 0$ получим

$$[q^{(1)}_{i,n}] = \omega^{(1)}_n \nu_i + \omega_{,\alpha} x_{i,\alpha}, \quad [T^{(1)}_{,n}] = \frac{1}{c_p c_1}\left(\omega^{(1)}_n - \frac{\omega}{2\tau_0 c_1}\right). \qquad (2.13)$$

При $m = 2$ и $c = c_1$ из (2.10) после преобразований и упрощений получим уравнение затухания для интенсивности разрыва второго порядка

$$\frac{\delta\omega^{(2)}_n}{\delta t} + \frac{\omega^{(2)}_n}{2\tau_0} = -\frac{\omega^{(1)}_n}{8\tau_0^2 c_1} - \frac{c_1}{2}\omega^{(1)}_{n,\alpha\alpha}. \qquad (2.14)$$

Здесь $\omega^{(2)}_n = [q^{(2)}_{i,nn}]\nu_i|_\Sigma$.

Решение уравнения (2.14) имеет вид

$$\omega^{(2)}_n = [\omega_{nn0}(y_1, y_2) + A_1 t + B_1 t^2] \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right). \qquad (2.15)$$

Здесь $A_1 - \dfrac{\omega_{n0}(y_1, y_2)}{8\tau_0^2 c_1} - \dfrac{c_1}{2}\omega_{n0,\alpha\alpha}(y_1, y_2)$,

$$B_1 = \frac{\omega_0(y_1, y_2)}{128\tau_0^4 c_1^2} + \frac{\omega_{0,\alpha\alpha}(y_1, y_2)}{16\tau_0^2} + \frac{c_1^2}{8}\omega_{01,\alpha\alpha\beta\beta}(y_1, y_2).$$

Из (2.9) при $m = 1$ получим

$[q_{i,nn}^{(2)}] = \omega_n^{(2)}\nu_i + \omega_{n,\alpha}^{(1)} x_{i,\alpha}$,

$$[T_{,nn}^{(2)}] = \frac{1}{c_p c_1}\left(\omega_n^{(2)} - \frac{\omega_n^{(1)}}{2\tau_0 c_1} + \frac{\omega}{8\tau_0^2 c_1^2} + \frac{\omega_{,\alpha\alpha}}{2}\right). \tag{2.16}$$

Интегрируя (2.2) и предполагая, что поперечная составляющая градиента фронта абляции мала по сравнению с продольной составляющей, получим

$$x_3 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y_1, y_2)\frac{t^{k+1}}{k+1}. \tag{2.17}$$

При распространении плоских фронтов разрыва лучевой ряд (2.1) имеет вид

$$f(y_1, y_2, x_3, t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x_3 - c_1 t)^k}{k!}[f_{,n\ldots n}^{(k)}]|_{\Sigma}. \tag{2.18}$$

3. Определение коэффициентов лучевого ряда

Для нахождения решения необходимо найти величины ω_0, ω_{n0}, ω_{nn0} и a_0, a_1, a_2, входящие в решения (2.2), (2.6), (2.12), (2.15). Они находятся из краевого условия (1.2) и условий сопряжения (1.3).

Используя соотношения (2.3), получим

$$u_0(t)\exp(-d(x_1^2 + x_2^2)) - T(x_1, x_2, x_3, t) = \sqrt{\frac{\tau_0}{\lambda_0 c_p}}L\rho V. \tag{3.1}$$

Подставим лучевые соотношения (2.18) для температуры и теплового потока с учетом (3.1) в условия сопряжения (1.3), полагая $t = 0$ и $x_3 = 0$, получим

$-[T]|_{\Sigma(0)} = -\frac{1}{c_1 c_p}\omega_0 = T_L$,

$$u_0(0)\exp(-d(x_1^2 + x_2^2)) + \frac{\omega_0}{c_1 c_p} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\lambda_0 c_p}}L\rho a_0, \tag{3.2}$$

Решая систему (3.2), получим

$$\omega_0 = -c_1 c_p T_L, \quad a_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0 c_p}{\tau_0}}\frac{u_0(0)\exp(-d(x_1^2 + x_2^2)) - T_L}{L\rho}. \tag{3.3}$$

Отметим, что скорость фронта абляции в начальный момент времени конечна. Отметим, что в классическом решении Неймана задачи плавления для полупространства с заданной на поверхности температурой плавления скорость границы раздела жидкой и твердой фаз в начальный момент времени принимает бесконечное значение. Абляция наблюдается при выполнении условия $u_0(0)\exp(-d(x_1^2 + x_2^2)) \geqslant T_L$, что естественно.

Из первого соотношения (3.3) и лучевого ряда (2.17) следует, что тепловой поток в начальный момент времени имеет постоянное значение, не зависящее от величины, действующей на границе температуры. Температура в начальный момент времени влияет только на скорость фронта абляции. Из второго соотношения (3.3) следует, что чем больше температура на границе, тем выше начальная скорость фронта абляции. Превышение температуры по отношению к температуре плавления материала является доминирующим фактором увеличения начальной скорости абляции материала.

Для нахождения коэффициентов ω_{n0} и a_1 продифференцируем второе соотношение (1.3) и (3.1) по времени t, полагая $t = 0$ и $x_3 = 0$, получим систему уравнений, решением которой являются первые коэффициенты разложения

$$\omega_{n0} = \frac{a_0\omega_0}{2\tau_0 c_1(a_0 - c_1)}, \quad a_1 = \frac{1}{L\rho}\sqrt{\frac{\lambda_0 c_p}{\tau_0}}u_0'(0)\exp(-d(x_1^2 + x_2^2)). \tag{3.4}$$

Коэффициент a_1 определяет ускорение точек фронта абляции в начальный момент времени, которое зависит от координат, выбранных на подвижной поверхности.

Аналогично определяются коэффициенты ω_{nn0} и a_2. Продифференцируем второе соотношение (1.3) и (3.1) дважды по времени t и положим $t = 0$ и $x_3 = 0$. Решая систему уравнений, получим

$$\omega_{nn0} = \frac{1}{(a_0 - c_1)^2}\left\{\frac{2(a_0 - c_1)}{c_p c_1}\left(\frac{\omega_{n0}}{2\tau_0} - \frac{\omega_0}{8\tau_0^2 c_1} + \frac{c_1}{2}\omega_{0,\alpha\alpha}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega_0}{4\tau^2 c_p c_1} - a_1\left(\frac{\omega_{n0}}{c_p c_1} - \frac{\omega_0}{2\tau_0 c_1}\right)\right\},$$
$$a_2 = \sqrt{\frac{\lambda_0 c_p}{\tau_0}}\frac{u_0''(0)\exp(-d(x_1^2 + x_2^2))}{L\rho}. \tag{3.5}$$

Для иллюстрации полученных решений в качестве материала выберем алюминий со следующими теплофизическими свойствами: $\rho = 2700$ Кг/м^3, $\lambda_0 = 209,3$ Вт/(м·град), $\tau_0 = 10^{-11}$ с, c_p=2,376 кДж/(м^3·град), T_L=658°, L =358 кДж/кг. При рассмотрении удобно перейти к безразмерным переменным с помощью замены $x_i = x_0\bar{x}_i$, $t = t_0\bar{t}$, $T = T_0\bar{T}$, $q_i = q_0\bar{q}_i$. Здесь $t_0 = \tau_0 = 10^{-11}$ с, $x_0 = \sqrt{\lambda_0\tau_0/c_p} = 2,97 \cdot 10^{-8}$ м, $q_0 = T_L\sqrt{\lambda_0 c_p/\tau_0} = 4,64{\cdot}10^{12}$ Вт/м^2, $T_0 = T_L = 658°$, $\bar{d} = dx_0^2$.

Дифференциальные уравнения и условия сопряжения запишутся в безразмерном виде

$$\bar{q}_{i,t} + \bar{q}_i = -\bar{T}_{,i}, \qquad \bar{q}_{i,i} + \bar{T}_{,t} = 0,$$
$$\bar{T}_L(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{t}) = 1, \quad \bar{T}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, \bar{t}) = \bar{u}_0(t)\exp(-\bar{d}(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2)),$$
$$\bar{u}_0(t)\exp(-\bar{d}(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2)) - 1 = \bar{V}. \tag{3.6}$$

Используя соотношения (2.5), (2.13), (2.16), по известным величинам ω_0, $\omega_{n0}, \omega_{nn0}$ и a_0, a_1, a_2 определяются разрывы для теплового потока $[q_i]$ и

температуры $[T]$ и их производных по нормали $[q_{i,n}^{(1)}]$, $[T_{,n}^{(1)}]$, $[q_{i,nn}^{(2)}]$, $[T_{,nn}^{(2)}]$. С их помощью находятся решения для температуры и теплового потока в виде лучевого ряда (2.18). Точки фронта абляции определяются при условии, что температура достигает температуры плавления.

Если $y_1 = x_1$ и $y_1 = x_1$, то уравнение (2.17) описывает поверхность абляции в момент времени t. Так как коэффициенты a_0, a_1, a_2 зависят только от $x_1^2+x_2^2$, то поверхность абляции является поверхностью вращения.

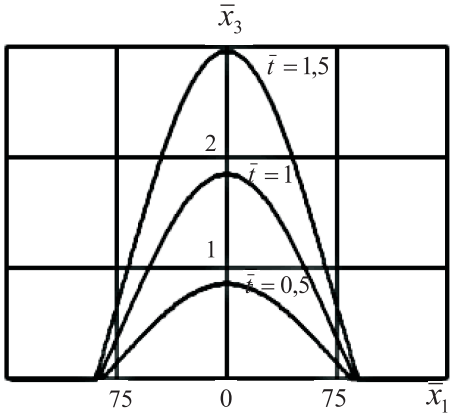

Рис. 3.1. Положение фронтов абляции для различных времен $\bar{t}$

На рис. 3.1 изображено положение фронтов абляции в различные моменты времени $\bar{t} = 0,5$, $\bar{t} = 1,0$, $\bar{t} = 1,5$ при $u(0) = 2$, $u'(0) = 0,3$ $(x_2 = 0)$ с учетом трех членов разложения ряда (2.17). Единицы расстояний и времени равны соответственно $2,97 \cdot 10^{-8}$ м и 10^{-11} с.

Литература

[1] Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975. 228 с.

[2] Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.

[3] Carslaw H.S., Jager J.C. Conduction of heat in solids. Oxford: At the Clarendon Press, 1959.

[4] Быковцев Г.И., Бабичева Л.А., Вервейко Н.Д. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах // ПММ. 1973. Т. 37. № 1. С. 145–155.

[5] Шаталов А.Г. Лучевой метод решения задачи абляции // ИФЖ. 2003. Т. 76. Вып. 4. С. 25–30.

[6] Mc Connel A.J. Application of Tensor Analysis. New York: Dover, 1957.

[7] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 527 с.

Поступила в редакцию 26/X/2009;
в окончательном варианте — 26/X/2009.

ABLATION OF THE SEMI-SPACES, CAUSED BY TEPLOV BLOW

© 2010 A.G. Shatalov[2]

The three-dimensional ablation problem for semi-space on the border of which the temperature is set is considered. It is supposed that heat extends with final speed. The decision is represented in the form of a beam number. The arrangement of ablation fronts in the various moments of time are illustratec by schedules.

Key words: ablation, phase transition, enertia of a thermal stream, a heatstroke, beam number, intensity of rupture, absolute derivative, kinematic and geometrical conditions of compatibility.

Paper received 26/X/2009.
Paper accepted 26/X/2009.

[2]Shatalov Alexander Grigorevich (alexShat@mail.ru), Dept. of Mathematics, Voronezh Military Aviation Engineering University, Voronezh, 394064, Russia.