

УДК 534.535

ДЕФОРМАЦИЯ НЕМАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ БИНАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ЖИДКИЙ КРИСТАЛЛ СДВИГА И СЖАТИЯ¹

© 2009 Е.Н. Кожевников, Я.В. Кучеренко²

Теоретически в широком диапазоне частот описано искажение нематической структуры жидкого кристалла при бинарном воздействии периодического сдвига и сжатия. В расчете эффекта при формулировке граничных условий учитываются подвижность по нормали верхней граничной пластины и конечное значение ориентирующей энергии на границах слоя. Доказана нелинейная зависимость деформации нематической структуры от амплитуды сдвигового воздействия. Анализируется возможность регистрации деформации структуры оптическим путем.

Ключевые слова: нематический жидкий кристалл, периодический сдвиг, осцилляции директора, деформация структуры, потоки, прозрачность.

Введение

Воздействие периодического сдвига на слой нематического жидкого кристалла (НЖК) с исходной ориентацией молекул, ортогональной сдвигу, приводит к деформации его структуры, при которой меняется направление выстраивания длинных осей молекул — директора [1-3]. При малых амплитудах сдвига ось кристалла периодически отклоняется от равновесного направления на угол, пропорциональный градиенту сдвига и однородный в пределах плоскости сдвига (линейная деформация). Увеличение амплитуды сдвига приводит к нарушению ориентационной однородности кристалла и

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ: грант 07-02-00763.

²Кожевников Евгений Николаевич (kozhev@ssu.samara.ru), Кучеренко Яна Викторовна (yana20002@yandex.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

возникновению пространственно-модулированных структур с периодом порядка толщины НЖК-слоя, изменение симметрии кристалла носит пороговый характер и сопровождается появлением вихревых гидродинамических потоков [4-8]. Угол отклонения молекул нематика от исходной ориентации в модулированной структуре содержит постоянную составляющую, величина которой зависит от расстояния до порога эффекта и, следовательно, нелинейна по амплитуде сдвига.

Дополнительно помимо сдвига периодическое воздействие на нематический кристалл с частотой, равной частоте сдвига, также может приводить к нелинейной деформации нематической структуры, при которой стационарный угол поворота директора значительно превышает амплитуду его осцилляций. Нелинейный эффект в этом случае является непороговым, и пространственно-модулированные искажения не возникают. В данной работе рассматриваются искажения гомеотропной структуры нематического монокристалла при его деформации, создаваемой одновременным воздействием на кристалл периодических сдвига и сжатия. Такое воздействие, в частности, достигается, если одна из граничных пластин, ограничивающих НЖК-слой, совершает эллиптическое движение, смещаясь гармонически в своей плоскости и, с некоторым запаздыванием по фазе, в направлении нормали. Показано, что одновременное воздействие на кристалл сдвига и сжатия приводит к появлению среднего по времени отклонения директора от нормали, в результате чего он осциллирует вблизи нового квазиравновесного положения — стационарный эффект в основном обусловлен действием нелинейных моментов и несколько уменьшается за счет потоков жидкости.

О степени деформации ориентационной структуры кристалла при воздействии периодических сдвига и сжатия будем судить по изменению оптических свойств жидkokристаллической ячейки, в которой гомеотропный слой нематического кристалла помещен между скрещенными поляроидами. В отсутствие внешнего воздействия на кристалл ячейка непрозрачна по отношению к потоку света, падающему на нее по нормали. При отклонении оси кристалла от первоначальной ориентации в плоскости, не совпадающей с осями поляроидов, ячейка просветляется. В линейной области эффекта, в которой поворот директора определяется в основном периодическим сдвигом граничной пластины, прозрачность ячейки, нарастая с увеличением амплитуды сдвига U_0 , достигает первого максимума при некотором значении $U_{0,max}$. Изменение характера внешнего воздействия на НЖК-слой меняет оптическую картину его деформации. При переходе в нелинейную область эффекта, когда начинает сказываться сжатие слоя, возникает стационарная деформация нематической структуры, и просветление ячейки наблюдается при амплитудах сдвига, меньших тех, которые необходимы при идеальном сдвиге. Меняются также временной характер прозрачности и спектральные составляющие интенсивности оптического потока, прошедшего через ячейку.

Просветление жидкокристаллической ячейки, возникающее при воздействии эллиптического сдвига на нематическую структуры, описано в работах [9,10] для низких частот, на которых длина вязкой волны больше толщины жидкокристаллического слоя. В данной работе деформация структуры нематического кристалла при бинарном воздействии периодических сдвига и сжатия анализируется в широком диапазоне частот, включая ультразвуковые, на которых длина вязкой волны много меньше толщины слоя. Описание искажения нематической структуры проводится в рамках классической гидродинамики жидких кристаллов [11,12] с учетом квадратичных слагаемых в уравнении вращения директора и уравнении движения; учитываются все факторы, которые могут определить деформацию структуры: объемные моменты и напряжения, граничные напряжения, обусловленные дополнительным смещением подвижной пластины по нормали, условия ориентации молекул на границах слоя. Конечными результатами расчета являются выражения для углов поворота оптической оси кристалла в НЖК-слое и прозрачности жидкокристаллической ячейки.

1. Теоретический анализ

Рассмотрим двухмерную картину деформации гомеотропно ориентированного НЖК-слоя толщины h и длины L ($L \gg h$) при эллиптическом движении одной из граничных пластин, считая, что течение жидкости и поворот молекул происходят в плоскости сдвига XZ , где ось X указывает направление сдвига, а ось Z направлена перпендикулярно границам слоя (возможность пренебрежения азимутальными возмущениями в ориентации молекул при бинарном воздействии обсуждается в работе [10]). Выбирая начало координат $Z = 0$ на нижней неподвижной границе слоя, зададим воздействие на структуру нематического кристалла движением верхней границы в виде

$$V_X|_{Z=h+U_h} = V_0 \cos \omega T, \quad V_Z|_{Z=h+U_h} = \beta V_0 \sin \omega T.$$

Здесь V_0 и βV_0 — амплитуды продольной и поперечной составляющих скорости движения пластины, $U_h = -\beta U_0 \cos \omega T$ — смещение верхней границы слоя по нормали, $U_0 = V_0/\omega$, T — время, ω — частота.

Ограничимся частотами, при которых длина звуковой волны много больше длины слоя, а длина ориентационной волны меньше толщины слоя, считая выполняющимися неравенства

$$\frac{K_{33}}{\gamma_1 h^2} \ll \omega < \frac{c}{L},$$

где c — скорость звука в кристалле, K_{33} — упругий модуль Франка, $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$, α_k ($k = 1, \dots, 6$) — коэффициенты вязкости Лесли. В дальнейших расчетах малые коэффициенты вязкости α_1 и α_3 полагаются равными нулю, при этом $\gamma_1 \approx -\gamma_2 \approx -\alpha_2$. Ограничение частоты снизу позволяет пренебрегать упругими моментами Франка при описании осцилляций директора,

ограничение частоты сверху позволяет при формулировке уравнений движения считать нематический кристалл несжимаемой жидкостью.

В расчете полагаем деформации нематического кристалла малыми, считая, что малы углы θ отклонения молекул от оси Z , и линеаризуем уравнения движения и поворота молекул по θ .

Вводя безразмерные координаты $x = X/h$, $z = Z/h$, время $t = \omega T$ и безразмерные скорости $v_k = V_k/(\omega h)$, представим уравнения для гидродинамических переменных в виде [13]

$$\begin{aligned} \partial_t \theta - \varepsilon \Delta \theta - v_{x,z} &= -\theta_{,x} v_x - \theta_{,z} v_z - 2\theta v_{zz}, \\ [2\eta \sigma^2 \Delta \partial_t - (\eta \Delta^2 + \partial_z^2 \partial_x^2)] v_x + \varepsilon \Delta \partial_z^3 \theta &= \\ = [\partial_z (\partial_z^2 - \partial_x^2) (v_{z,z} \theta) - 2\partial_x \partial_z^2 (v_{xz} \theta)] + 2\eta \sigma^2 \partial_z [\Delta v_z v_{1x} - v_z v_{x,z^2}], \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{\rho \omega h^2}{2\eta}, \quad \varepsilon = \frac{K_{33}}{\gamma_1 \omega h^2} = \frac{\lambda}{2\sigma^2}, \quad \lambda = \frac{\rho K_{33}}{\gamma_1 \eta} \sim 10^{-6},$$

ρ — плотность, $\eta = (\alpha_4 + \alpha_6)/2\gamma_1$ — безразмерная вязкость в вязкой волне, распространяющейся вдоль оси кристалла.

Граничные условия для скорости жидкости и угла поворота молекул на верхней подвижной границе запишем для $z = 1$, раскладывая по степеням $u_{1z} = u_z|_{z=1} = -\beta u_0 \sin t$ ($u_0 = U_0/h$ — безразмерная амплитуда сдвига) и ограничиваясь первой степенью разложения

$$\begin{aligned} v_x|_{z=0} = v_z|_{z=0} &= 0, \\ v_x + v_{x,z} u_{1z}|_{z=1} &= u_0 \cos t, \\ v_z + v_{z,z} u_{1z}|_{z=1} &= \beta u_0 \sin t. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Граничные условия для угла θ определяем с учетом конечной связи молекул НЖК с ограничивающими слой поверхностями. Полагая поверхностную плотность ориентирующей энергии изотропной и равной $F_s = 1/2w\theta^2$, получим

$$\begin{aligned} \theta - \delta \theta_{z,z}|_{z=0} &= 0, \\ \theta + (\delta + u_{1z}) \theta_{z,z}|_{z=1} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\delta = K_{33}/wh$ — безразмерный параметр.

Представим далее скорости v и угол θ в виде суммы осциллирующих с частотой внешнего воздействия (индекс "1") и стационарных (индекс "2") слагаемых

$$v = v_1 + v_2 \quad \theta = \theta_1 + \theta_2,$$

и рассмотрим отдельно уравнения для v_1 , θ_1 и v_2 , θ_2 .

Отбрасывая малые производные по x ($\partial/\partial x \sim 1/L \ll \partial/\partial z \sim \sigma$), выделим из (1.1)-(1.3) уравнения для осциллирующих переменных

$$\begin{aligned} \partial_t \theta_1 - \varepsilon \partial_z^2 \theta_1 - v_{1x,z} &= 0, \\ (2\sigma^2 \partial_t - \partial_z^2) v_{1x} + \frac{\varepsilon}{\eta} \partial_z^3 \theta_1 &= 0, \quad \text{div } \vec{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} z = 0: \quad v_{1x} &= v_{1x} = \theta_1 - \delta \theta_{1,z} = 0, \\ z = 1: \quad v_{1x} &= u_0 \cos t, \quad v_{1z} = \beta u_0 \sin t, \quad \theta_1 + \delta \theta_{1,z} = 0 \end{aligned}$$

и уравнения для стационарных переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 v_{2x}}{\partial z^3} &= \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\left\langle v_{1x} \theta_{1,x} + v_{1z} \theta_{1,z} + \theta_1 \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right\rangle \right] + \\ &\quad + \frac{2\sigma^2 \eta}{\eta_2} \frac{\partial}{\partial z} \langle (v_1 \nabla) v_{1x} \rangle, \\ \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle u_{1x} v_{1z} \rangle - \frac{\partial v_{2x}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

с условиями

$$\begin{aligned} v_{2x}|_{z=0} &= 0, \quad v_{2x} + \langle u_{1z} v_{1x,z} \rangle|_{z=1} = 0, \quad \int_0^1 v_{2x} dz = 0, \\ \theta_2 - \delta \theta_{2,z}|_{z=0} &= 0, \quad \theta_2 + \delta \theta_{2,z} + \langle u_{1z} \theta_{1,z} \rangle|_{z=1} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\eta_2 = (\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_2)/2\gamma_1$ — вязкость в стационарном потоке v_{2x} , угловые скобки означают усреднение по периоду колебаний.

Решая уравнения для осциллирующих скоростей v_{1z} , v_{1x} и угла θ_1 , получим для них следующие выражения:

$$\begin{aligned} v_{1x} &\approx u_0 \mathbf{Re} \left\{ e^{-it} \left[z + \psi_1 + \beta i x (6(z^2 - z) + \psi_2) \right] \right\}, \\ v_{1z} &\approx u_0 \beta \mathbf{Re} \left\{ i e^{-it} (3z^2 - 2z^3 + \psi_3) \right\}, \\ \theta_1 &\approx u_0 \mathbf{Re} \left\{ i e^{-it} \left[1 + \psi_4 - \right. \right. \\ &\quad - \frac{s(1+i)}{(1+i+2\delta q) \sin s} \left(e^{(i-1)qz} + (\cos s - \delta s \sin s) e^{(i-1)q(1-z)} \right) - \\ &\quad \left. \left. - \beta i x \left[6(1-2z) + \psi_5 - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{(1+i)(1-\cos s + \delta \sin s)}{(1+i+2\delta q)(2(1-\cos s) - s \sin s)} \left(e^{(i-1)qz} - e^{(i-1)q(1-z)} \right) \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $s = (1+i)\sigma$ и $(1+i)q = (1+i)\sqrt{\eta/[2\varepsilon(\eta+1)]}$ — комплексные волновые числа в вязких и ориентационных волнах, распространяющихся вдоль оси кристалла.

Комплексные функции $\psi_k = \psi_{k1}(z) + i\psi_{k2}(z)$ ($k = 1...5$) имеют вид

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\sin sz}{\sin s} - z, \\ \psi_2 &= s \frac{\sin s - \sin sz - \sin[s(1-z)]}{2(1 - \cos s) - s \sin s} - 6(z^2 - z), \\ \psi_3 &= - \int \psi_2 dz = \\ &= \frac{(1 - \cos s)(1 - \cos sz) + \sin s(\sin sz - sz)}{2(1 - \cos s) - s \sin s} - (3z^2 - 2z^3), \\ \psi_4 &= \frac{d\psi_1}{dz} = \frac{\cos(sz)s}{\sin(s)} - 1, \\ \psi_5 &= - \frac{d\psi_2}{dz} = \frac{s^2 [\cos sz(1 - \cos s) - \sin s \sin sz]}{2(1 - \cos s) - s \sin s} - (6 - 12z).\end{aligned}$$

Функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 обращаются в ноль на границах слоя. На низких частотах, когда справедливо неравенство $\sigma \ll 1$, функции ψ_k малы $|\psi_k| \ll 1$, и выражения для скоростей v_{1x}, v_{1z} и угла θ_1 совпадают с полученными ранее в работах [9,10].

Рассмотрим деформацию структуры НЖК в центральной части слоя для координат x , удовлетворяющих неравенству $6\beta x < 1$. Скорость потоков v_{2x} в этом случае определяется выражением

$$v_{2x} = \frac{\beta u_0^2}{2} \{F(z) + A(3z^2 - 2z)\}, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned}A &= -\frac{2}{\beta u_0^2} \langle v_{1x, z} u_z \rangle |_{z=1} = 1 + \psi_{41}|_{z=1}, \\ F(z) &= \tilde{V}(z) + \tilde{V}(1)(2z - 3z^2) - 6(z - z^2) \int_0^1 \tilde{V}(z) dz,\end{aligned}$$

$\tilde{V}(z)$ — частное решение уравнения для потоков в системе (1.5)

$$\begin{aligned}\tilde{V}(z) &= \frac{1}{\eta_2} \left\{ (3z^2 - 2z^3 + \psi_{31})(1 + \psi_{41}) + \psi_{32}\psi_{42} + \right. \\ &+ \int_0^z \left\{ [z' + \psi_{11}(z')] [6(1 - 2z') + \psi_{51}(z')] + \psi_{12}(z')\psi_{52}(z') \right\} dz + \\ &+ 2\sigma^2 \eta \int_0^z \int_0^{z'} \left\{ [6(z''^2 - z'') + \psi_{21}(z'')] \psi_{12}(z'') - [z'' + \psi_{11}(z'')] \psi_{22}(z'') + \right.\end{aligned}$$

$$+ [3z''^2 - 2z''^3 + \psi_{31}(z'')] \psi_{42}(z'') - [1 + \psi_{41}(z'')] \psi_{32}(z'') \} dz'' dz' \}.$$

Интегралы в функциях $F(z)$ и $\tilde{V}(z)$ допускают аналитическое представление, однако ввиду громоздкости эти выражения опущены.

Первое слагаемое в формуле (1.7), обусловленное объемными напряжениями, обращается в ноль на границах слоя.

Для θ_2 получим следующее выражение:

$$\theta_2 = \frac{\beta u_0^2}{\varepsilon} \Phi(\delta, \sigma, z) = \frac{2\beta \sigma^2 u_0^2}{\lambda} \Phi(\delta, \sigma, z), \quad (1.8)$$

где

$$\Phi(\delta, \sigma, z) = \frac{1}{2} \left\{ (z + \psi_{11}) (3z^2 - 2z^3 + \psi_{31}) + \psi_{12} \psi_{32} - \int_0^z F(z') dz' - A(z^3 - z^2) - \frac{\delta + z}{1 + 2\delta} \right\}.$$

Деформация структуры кристалла определяется полным углом поворота молекул θ , который представим в виде суммы осциллирующего угла θ_1 (1.6) и стационарного угла θ_2 (1.8): $\theta = \theta_2 + \theta_1$.

Особенности деформации структуры нематического кристалла при воздействии эллиптического сдвига в линейном и нелинейном режимах определяют оптические свойства жидкокристаллической ячейки, содержащей слой нематического жидкого кристалла с исходной гомеотропной ориентацией, помещенный между скрещенными поляроидами. В исходном состоянии с недеформированной структурой кристалла ячейка непрозрачна по отношению к световому потоку, падающему на нее нормально. Отклонение молекул нематика от нормали при внешнем воздействии приводит к изменению разности фаз в обыкновенной и необыкновенной световых волнах в кристалле и, как результат, к изменению оптической прозрачности ячейки. Определим оптическую прозрачность $m(t)$ НЖК-ячейки как отношение светового потока $I(t)$, прошедшего через систему, к падающему I_0 . При неоднородной по толщине слоя ориентации молекул и малых углах θ прозрачность $m(t)$ приводится к виду [14]

$$m(t) = \frac{I(t)}{I_0} = \frac{1}{2} \sin^2 \left\{ \frac{\Delta n}{2} k h \int_0^1 \theta^2(x, z) dz \right\} \sin^2(2\varphi), \quad (1.9)$$

где $\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp}$ — оптическая анизотропия, n_{\parallel} и n_{\perp} — показатели преломления вдоль и ортогонально оси кристалла, $k = 2\pi/\Lambda$ — волновое число в световой волне с длиной волны Λ , φ — угол между направлением сдвига и ориентацией одного из поляроидов. Рассмотрим далее случай максимальной по φ прозрачности, считая $\varphi = \pi/4$.

Подставляя $\theta = \theta_1 + \theta_2$ в выражение для прозрачности и преобразуя его, получим

$$m(t) = \frac{1}{2} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} [(P_{00} + P_{01}) - P_{1s} \sin t - P_{1c} \cos t + P_{2s} \sin 2t - P_{2c} \cos 2t] \right\}. \quad (1.10)$$

Коэффициенты P_i зависят от частоты через волновое число σ

$$\begin{aligned} P_{00} &= \Delta n k_o h \left(\frac{\beta \sigma^2 u_0^2}{\lambda} \right)^2 f_{00}, & P_{01} &= \Delta n k_o h u_0^2 f_{01}, \\ P_{1s} &= \Delta n k_o h \frac{\beta \sigma^2 u_0^3}{\lambda} f_{1s}, & P_{1c} &= \Delta n k_o h \frac{\beta \sigma^2 u_0^3}{\lambda} f_{1c}, \\ P_{2s} &= \Delta n k_o h u_0^2 f_{2s}, & P_{2c} &= \Delta n k_o h u_0^2 f_{2c}, \end{aligned}$$

а функции f_{ij} определяются следующими интегралами:

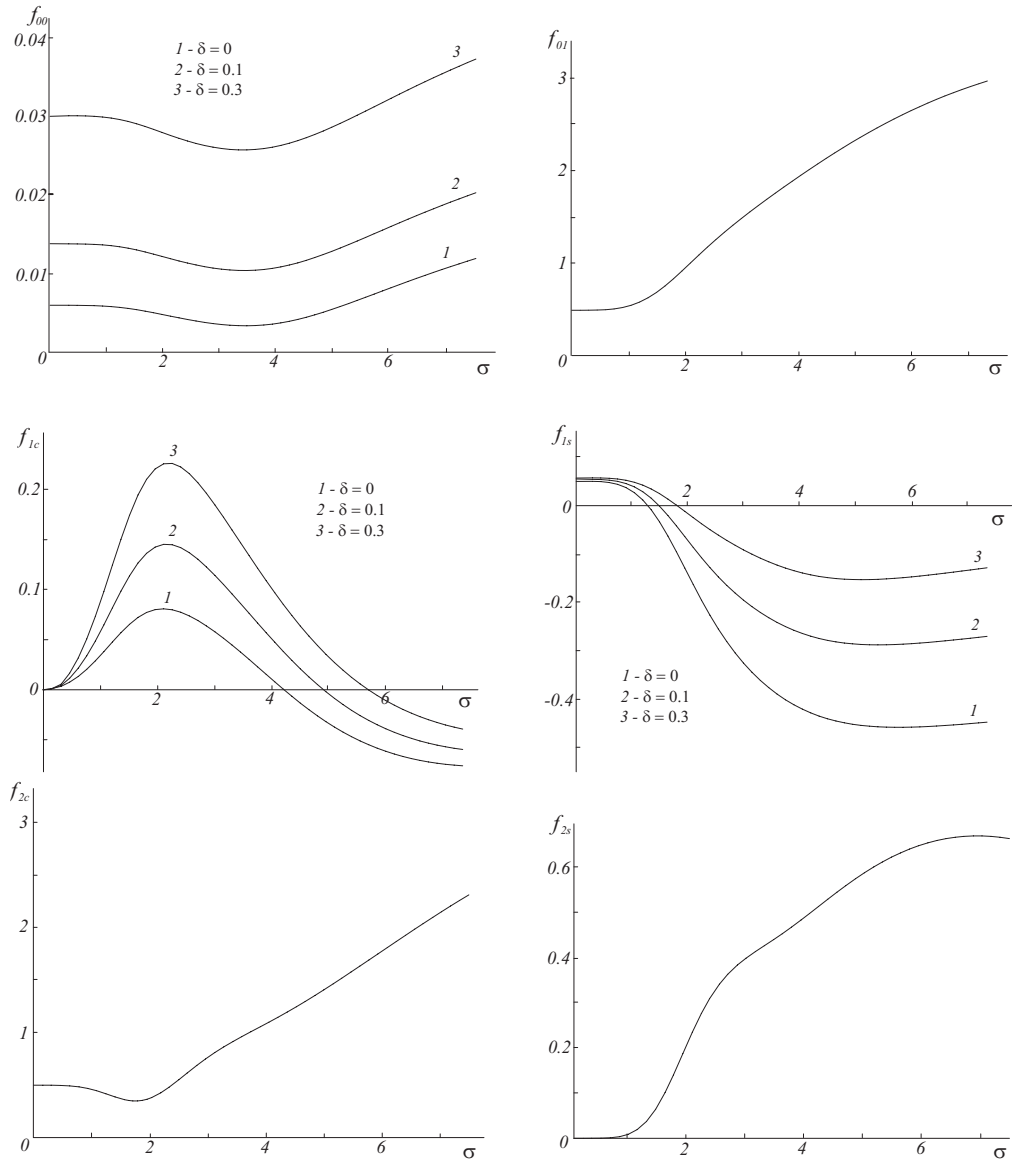
$$\begin{aligned} f_{00} &= 4 \int_0^1 \Phi(\delta, \sigma, z)^2 dz, & f_{01} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(1 + \psi_{41})^2 + \psi_{42}^2 \right] dz, \\ f_{1s} &= -4 \int_0^1 \Phi(\delta, \sigma, z)(1 + \psi_{41}) dz, & f_{1c} &= 4 \int_0^1 \Phi(\delta, \sigma, z) \psi_{42} dz, \\ f_{2s} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \psi_{41}) \psi_{42} dz, & f_{2c} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(1 + \psi_{41})^2 - \psi_{42}^2 \right] dz. \end{aligned}$$

Функции f_{01}, f_{2s}, f_{2c} не содержат параметр δ и, следовательно, не зависят от условий ориентации молекул на границах НЖК-слоя. Зависимость f_{ij} от волнового числа σ для жидкого кристалла МББА с параметрами [11] $K_{33} = 0.78 \cdot 10^{-11}$ Н, $\gamma_1 \approx 0.078$ Па·с, $\alpha_4 \approx 0.104$ Па·с, $\alpha_6 \approx -0.034$ Па·с ($\eta = 0.4, \eta_2 = 1.45$) представлена на рис. 1.1.

2. Результаты и их обсуждение

Возможность регистрации деформации структуры нематического жидкого кристалла на основе изменения оптической прозрачности определяется формулой (1.10). Рассмотрим особенности оптических эффектов, возникающих при деформации НЖК в линейном и нелинейном режимах.

В общем случае прозрачность НЖК-ячейки обусловлена суммарным углом поворота молекул $\theta = \theta_1 + \theta_2$, причем θ_1 определяется линейными ($\theta_1 \sim u_0$), а θ_2 нелинейными ($\theta_2 \sim u_0^2$) гидродинамическими эффектами. Определим значения параметров, при которых преобладающий вклад в прозрачность вносит осциллирующий угол θ_1 , как линейную область эффекта, и значения параметров, при которых основной вклад в прозрачность связан


 Рис. 1.1. Зависимость функций f_{ij} от σ

со стационарной деформацией θ_2 , как нелинейную. Эти области разделяются значениями безразмерного параметра l

$$l \approx \sqrt{\frac{P_{00}}{P_{01}}} \sim 0.1 \frac{\beta\gamma\omega hU_0}{K_{33}},$$

введенного ранее в работе [9].

Линейной области эффекта соответствуют малые значения параметра $l \ll 1$, а скорости и углы определяются формулами (1.6). В этом случае $P_{00} \ll P_{01}$, $|P_{1s}|, |P_{1c}| \ll P_{2c}$ — стационарная деформация кристалла мала и не влияет на прозрачность НЖК-ячейки, а выражение для $m(t)$ принимает

вид

$$m(t) = \frac{1}{2} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} [P_{01} + P_{2s} \sin 2t - P_{2c} \cos 2t] \right\}. \quad (2.1)$$

Параметр δ не входит в выражение для P_{01}, P_{2s}, P_{2c} , поэтому в линейной области эффекта прозрачность НЖК-ячейки не зависит от условий ориентации молекул кристалла на границах.

Оптическая прозрачность и, следовательно, интенсивность светового потока $I(t) = m(t) \cdot I_0$ периодически зависят от времени. Представим прозрачность $m(t)$ разложением в ряд Фурье

$$m(t) = m_0 + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos(kt + \nu_k),$$

где m_0 — постоянная составляющая, m_k — гармоники, ν_k — фазовая задержка по отношению к сдвиговым колебаниям пластины. Спектральные компоненты m_k определяются следующими выражениями:

$$m_0 = \frac{1}{4} [1 - \cos P_{01} J_0(P_2)],$$

$$m_{4k-2} = \frac{1}{4} \sin P_{01} J_{2k-1}(P_2),$$

$$m_{4k} = \frac{1}{4} \cos P_{01} J_{2k}(P_2),$$

$$m_{2k-1} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.2)$$

где J_0, J_n — функции Бесселя первого рода, $P_2 = \sqrt{P_{2s}^2 + P_{2c}^2}$.

В линейной области эффекта спектр прозрачности содержит лишь четные гармоники. На низких частотах, когда $\sigma \ll 1$, получим $P_2 = P_{01} = 1/2 \Delta n k_o h u_0^2$. В этом случае прозрачность определяется лишь параметром P_2 , выражения для постоянной составляющей m_0 и P_2 совпадают с полученным ранее в работе [9], где отмечено согласие теории с данными эксперимента. Постоянная составляющая прозрачности m_0 возрастает с увеличением амплитуды сдвига от нулевого значения при $P_2 = 0$ до максимального $m_{0,max} = 0,323$ при $P_2 = 1,95$ и далее осциллирует вблизи значения $m_0 = 0,25$. Амплитуда $u_{0,max}$, соответствующая первому максимуму прозрачности, не зависит от частоты.

На высоких частотах, когда $\sigma > 3$, параметры P_{01}, P_2 пропорциональны волновому числу σ , в этом случае $u_{0,max}$ уменьшается с ростом частоты по закону $u_{0,max} \sim \omega^{-1/4}$.

В нелинейной области ($l \gg 1$) прозрачность приводится к виду

$$m = \frac{1}{2} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} [P_{00} - P_{1s} \sin(t) - P_{1c} \cos t] \right\}. \quad (2.3)$$

Постоянная составляющая и спектральные компоненты прозрачности определяются выражениями

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{4} [1 - \cos P_{00} J_0(P_1)], \\ m_{2k-1} &= \frac{1}{4} \sin(P_{00}) J_{2k-1}(P_1), \\ m_{2k} &= \frac{1}{4} \cos(P_{00}) J_{2k}(P_1), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $P_1 = \sqrt{P_{1s}^2 + P_{1c}^2}$, спектральное разложение прозрачности $m(t)$ содержит как четные, так и нечетные гармоники.

В нелинейной области эффекта имеет место оценка $P_{00}/P_{1s} \sim l \gg 1$, следовательно, первые по амплитуде u_0 максимумы гармоник m_k определяются в основном значением P_{00} — соответствующие амплитуды сдвига $u_{0,max}$ с увеличением частоты и эллиптичности смещаются в область меньших значений. На низких частотах получим зависимость $u_{0,max} \sim (\beta\omega)^{-1/2}$. На высоких частотах, когда $\sigma > 4$, зависимость $u_{0,max}$ от ω и β аппроксимируется выражением $u_{0,max} \sim (\beta\omega)^{-1/2} (\omega/\omega_0 - 1)^{-1/4}$, где $\omega_0 = 2\eta\sigma_0^2/\rho h^2$, а волновое число σ_0 зависит от δ и подбирается по графику функции f_{00} : для $\delta = 0$ получим $\sigma_0 \approx 3$.

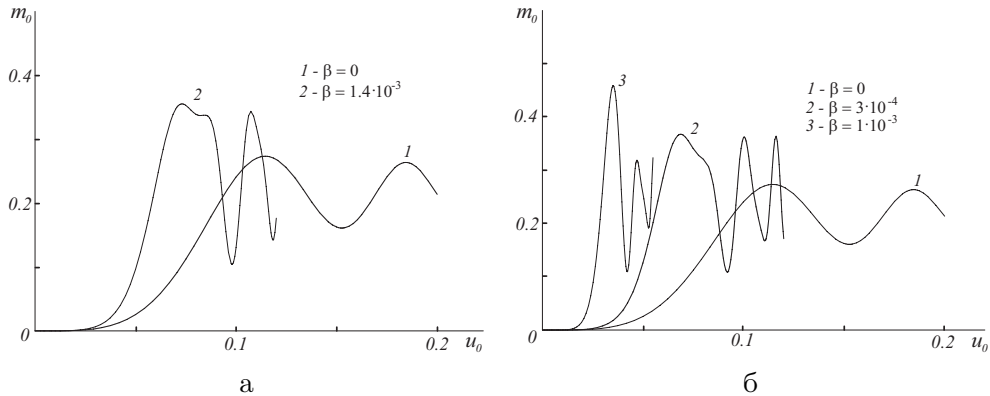


Рис. 2.1. Зависимость постоянной составляющей прозрачности m_0 от безразмерной амплитуды сдвига u_0 на частотах $\nu = 200$ Гц (а) $\nu = 1000$ Гц (б)

Рассмотрим отдельно влияние малой эллиптичности в движении граничной пластины на прозрачность НЖК-ячейки на примере ячейки с нематическим жидким кристаллом МББА, дополняя приведенные выше параметры кристалла значениями $n_{\perp} = 1,58$, $\Delta n = 0,2$ [11], полагая $h = 10^{-4}$ м, длину световой волны $\Lambda = 650$ Нм и предполагая жесткую ориентацию молекул на границе, что дает $\delta = 0$. На рис. 2.1 приведены зависимости постоянной составляющей прозрачности m_0 от безразмерной амплитуды сдвига $u_0 = U_0/h$, построенные для частот сдвига $\nu = 200$ Гц и $\nu = 1000$ Гц и значений эллиптичности $\beta \ll 1$. Составляющая m_0 определялась численным усреднением по периоду колебаний выражения (1.10) для прозрачности. Как видно из рис. 2.1, даже малая эллиптичность в дви-

жении граничной пластины может существенно по отношению к "чистому сдвигу" менять прозрачность жидкокристаллической ячейки, причем роль эллиптичности возрастает с увеличением частоты. На частоте 200 Гц при $\beta \approx 1,4 \cdot 10^{-3}$ первый максимум постоянной составляющей прозрачности достигается при амплитуде сдвига $u_{0,max}$, равной $u_{0,max} \approx 0,6 u_{0,max}^{(0)}$, где $u_{0,max}^{(0)}$ — амплитуда сдвига, соответствующая первому максимуму при "чистом сдвиге". На частоте 1000 Гц при значениях $\beta \approx 10^{-3}$ и $\beta \approx 3 \cdot 10^{-4}$ максимумы прозрачности достигаются соответственно при $u_{0,max} \approx 0,3 u_{0,max}^{(0)}$ и $u_{0,max} \approx 0,6 u_{0,max}^{(0)}$. Амплитуды нормального смещения граничной пластины $U_{1z} = \beta U_0$ при этом ничтожно малы и сопоставимы с длиной молекул нематического кристалла ($\approx 20 \div 30 \text{ \AA}$); на частоте $\nu = 1000$ Гц для приведенных значений β получим соответственно $U_{1z} \approx 38 \text{ \AA}$ и $U_{1z} \approx 20 \text{ \AA}$.

В нашем расчете амплитуды сдвига предполагались малыми настолько, чтобы были малы углы отклонения молекул от нормали $\theta \ll 1$, в этом случае справедливы исходные уравнения динамики (1.1) и формулы для прозрачности (1.9)-(1.10). Покажем, что описанные оптические свойства НЖК-ячейки (чередование максимумов и минимумов прозрачности) должны наблюдаться в эксперименте в пределах малых углов θ . Для этого оценим количество максимумов постоянной составляющей прозрачности, наблюдаемых при максимальных по z углах θ , не превышающих значение $\theta_M = 0,5$, что позволяет отбросить в уравнениях (1.1) и формуле (1.10) слагаемые порядка малости $\theta_M^3 \sim 0,1$ и меньшие. В расчете используем параметры жидкого кристалла МББА, полагая $h = 10^{-4}$ м и предполагая жесткую ориентацию молекул на границе.

В линейной области эффекта $\theta_2 \ll \theta_1 \approx u_0$ — постоянная составляющая прозрачности m_0 определяется первой из формул (2.2). Ограничивая угол $\theta_1 < 0,5$ на низких частотах ($\sigma \ll 1$), получим соотношение $P_{01} \approx P_2 < 37$. В этой области значений P_2 постоянная составляющая прозрачности имеет 6 максимумов. На высоких частотах ($\sigma \gg 1$) параметры P_{01}, P_2 можно оценить выражением $P_{01} \approx P_2 \approx 0,5 + \sigma/3$, а углы малы при амплитудах сдвига, меньших $u_0 < 0,5/\sigma$. Число N максимумов m_0 , описываемых настоящим расчетом, в этом случае оценивается целой частью выражения $(6 + 4\sigma)/\sigma^2 + 1/2$ и зависит от частоты: при значениях $\sigma = 3$ и $\sigma = 7$ получим соответственно $N = 2$ и $N = 1$.

В нелинейной области эффекта $\theta_1 \ll \theta_2 \sim u_0^2$. Постоянная составляющая прозрачности дается первой из формул (2.4), в которой $P_{00}/P_1 \sim l \gg 1$ — первые максимумы m_0 определяются значениями P_{00} . Максимальное по z значение угла θ_2 равно $\theta_2 = 0,012\beta\sigma^2 u_0^2/\lambda$; ограничивая его сверху величиной $\theta_M = 0,5$, получим неравенство $P_{00} = (\beta\sigma^2 u_0^2/\lambda)^2 f_{00} \leq 45$ — в эту область значений параметра P_{00} попадает 7 максимумов m_0 .

Таким образом, условие малости угла поворота молекул, определяющее применимость расчета, выполняется вблизи первых максимумов прозрачности НЖК-ячейки.

Заключение

Приведенные расчеты определяют свойства жидкокристаллической ячейки при бинарном воздействии на нее периодического сдвига и сжатия. Показано, что эллиптичность в движении граничной пластины может существенно по отношению к "чистому сдвигу" менять картину деформации структуры нематического жидкого кристалла и оптические свойства жидкокристаллической ячейки, причем роль эллиптичности возрастает с увеличением частоты. Возможность эллиптичности, даже малой, и нелинейной деформации НЖК-структуры необходимо учитывать при исследовании воздействия периодического сдвига на гомеотропный нематический жидкий кристалл.

Литература

- [1] Капустин, А.П. Акустика жидких кристаллов / А.П. Капустин, О.А. Капустина. — М.: Наука, 1986. — 248 с.
- [2] Vúka, A. Pattern Formation in Liquid Crystals / A. Vúka, L Kramer. — NY.: Springer-Verlag. 1996. — 339 p.
- [3] Капустина, О.А. Акустика жидких кристаллов. Современный взгляд на проблему (обзор) / О.А. Капустина // Кристаллография. — 2004. — Т. 49. — № 4. — С.759–772.
- [4] Dubois-Violette, E. Theory and experiments on plane shear flow instabilities in nematic / E. Dubois-Violette, E. Guyon, I. Janossy [et al] // J. de Mec. — 1977. — V. 16. — № 5. — P. 733–767.
- [5] Scudieri, F. High-frequency shear instability in nematic liquid crystal / F. Scudieri // Appl. Phys. Lett. — 1976. — V. 29. — P. 398–399.
- [6] Burghardt, W.R. Oscillatory shear flow of nematic liquid crystals / W.R. Burghardt // J. Rheol. — 1991. — V. 35. — P.49–62.
- [7] Baimakova, O.A. The orientational instability of nematic layers under oscillatory shear / O.A. Baimakova, O.A. Scaldin, A.N. Chuvyrov // Mol. Liq. Cryst. — 1995. — V. 265. — P.199–314.
- [8] Krehov, A.P. Flow-alignment instability and slow director oscillations in nematic liquid crystals under oscillatory flow / A.P. Krehov, L. Kramer // Phys. Rev. E. — 1996. — V. 53. — P.4925–4932.
- [9] Капустина, О.А. Оптические свойства гомеотропно ориентированного слоя нематического кристалла при эллиптической деформации / О.А. Капустина, Е.Н. Кожевников [и др.] // ЖЭТФ. — 1984. — Т. 87. — С. 849–858.
- [10] Кожевников, Е.Н. Оптические свойства нематического жидкого кристалла при бинарном воздействии периодического сдвига и сжатия / Е.Н. Кожевников, Я.В. Кучеренко // Кристаллография. — 2008. — Т.53. — №4. — С.8.

- [11] Stephen, M.J. Physics of liquid crystals / M.J. Stephen, J.P. Straley // Reviews of Modern Physics. — 1974. — V. 46. — P. 617–703.
- [12] Де Жен, П. Физика жидких кристаллов / П. Де Жен. — М: Мир, 1977. — 399 с.
- [13] Кожевников, Е.Н. Доменная структура в слое нематического жидкого кристалла в низкочастотном потоке Куэтта / Е.Н. Кожевников // Кристаллография. — 2005. — Т.50 — №5. — С. 908–914.
- [14] Кожевников, Е.Н. К вопросу об использовании жидких кристаллов в акустооптических устройствах. / Е.Н. Кожевников, И.А. Чабан // Акустический журнал. — 1975. — Т.21. — №6. — С.900–907.

Поступила в редакцию 15/II/2009;
в окончательном варианте — 15/II/2009.

DEFORMATION OF NEMATIC STRUCTURE UNDER BINARY ACTION ON LIQUID CRYSTAL OF SHEAR AND PRESSURE

© 2009 E.N. Kozhevnikov, Y.V. Kucherenko³

The distortion of the nematic structure of NLC under binary action of periodic shear and pressure is theoretically described in wide range of frequencies. In the calculation of the effect under formulating the boundary conditions, the mobility at the normal of the upper plate and finite value of the orientation energy on the layer boundaries is taken into consideration. Nonlinear dependence of a nematic structure deformation on the shear amplitude is proved. The possibility of optical registration of structure deformation is analyzed.

Key words and phrases: nematic liquid crystal, periodic shear, directors oscillation, structure deformation, streams, transparency.

Paper received 15/II/2009.
Paper accepted 15/II /2009.

³Kozhevnikov Evgeniy Nikolaevich (kozhev@ssu.samara.ru), Kucherenko Yana Victorovna (yana20002@yandex.ru), Dept. of Mathematical modelling in the mechanic, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

УДК 539.374

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ
ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ,
ПОДКРЕПЛЕННЫМ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИМ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, ПРИ ДВУОСНОМ
РАСТЯЖЕНИИ**

© 2009 П.Н. Кузнецов¹

В работе исследуется двuosное упругопластическое напряженное состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, усиленной эксцентрисческим эллиптическим включением. Рассматривается случай плоской деформации. Определяются граница упругопластической зоны, а также влияние неоднородного включения на напряженное состояние плоскости.

Ключевые слова: плоская деформация, тензор напряжений, пластичность, упругость, упругопластическая граница, неоднородность.

Отметим, что вопросам теории пластичности неоднородных сред посвящен ряд работ, среди которых отметим [1,4–6].

Рассмотрим плоскость с эллиптическим включением, которое ослаблено круговым отверстием радиуса R , центры окружности и эллипса смещены на величину c (рис. 1). Предел текучести материала включения равен k_1 , предел текучести материала плоскости – k_2 . Центр начала координат x, y совпадает с центром окружности. Пластина находится в состоянии двuosного растяжения под действием усилий на бесконечности p_1, p_2 (рис. 1).

Уравнение эллиптического контура отверстия запишем в виде

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

где a и b – полуоси эллипса, c – величина расстояния между центром окружности и центром эллипса.

Решение будем искать в приближенном виде аналогично [2–5]. Уравнение упругопластической границы запишем в виде

¹Кузнецов Павел Николаевич (kuznetsov_pn@mail.ru), кафедра математического анализа Чувашского государственного педагогического университета, 428000, Россия, г. Чебоксары, ул. Карла Маркса, 38.

$$r = r_s^{(0)} + \delta r_{s1}, \quad (2)$$

где δ – малый безразмерный параметр.

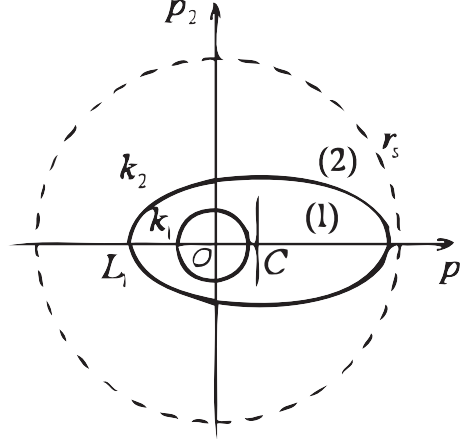


Рис. 1

В дальнейшем все величины, имеющие размерность длины, отнесем к величине $r_s^{(0)}$. Все величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к пределу текучести k_1 , обозначим $k_2/k_1 = \chi$. Примем $\rho = r/r_s^{(0)}$, $\rho' = r_{s1}/r_s^{(0)}$. Величины $c/r_s^{(0)}$, $(a-b)/2r_s^{(0)}$, $(p_1 - p_2)/2k_1$ будем считать достаточно малыми, порядка δ и обозначим

$$\frac{c}{r_s^{(0)}} = \delta_1, \quad \frac{(a-b)}{2r_s^{(0)}} = \delta_2, \quad \frac{(p_1 - p_2)}{2k_1} = \delta_3. \quad (3)$$

Далее примем

$$\delta_1 = d_1\delta, \quad \delta_2 = d_2\delta, \quad \delta_3 = d_3\delta, \quad d_i - const, \quad 0 \leq d_i \leq 1. \quad (4)$$

В исходном нулевом приближении при $\delta = 0$ имеем плоскость с круговым включением, ослабленным отверстием, равномерно растягиваемым на бесконечности усилиями $p = (p_1 + p_2)/2k_1$ (рис. 2).

Радиус отверстия в безразмерном виде обозначим $\alpha = R/r_s^{(0)}$, радиус включения – $\beta = (a+b)/2r_s^{(0)}$. Будем считать, что $\beta < 1$.

Компоненты напряжения запишем в полярной системе координат ρ, θ : $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$. Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma'_{ij}. \quad (5)$$

Припишем компонентам напряжения в зоне включения индекс "1" внизу, компонентам напряжения вне включения – индекс "2" внизу. Компо-

нентам напряжения в пластической зоне припишем индекс "р" наверху, в упругой зоне – индекс "е" наверху.

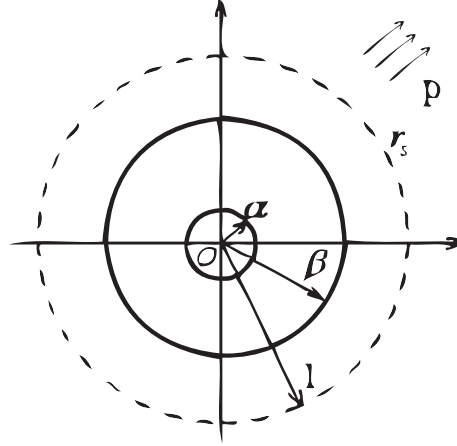


Рис. 2

Рассмотрим напряженное состояние в исходном нулевом приближении. Исходное напряженное состояние является осесимметричным

$$\tau_{p\theta_1}^{(0)} = 0, \quad \tau_{p\theta_2}^{(0)} = 0. \quad (6)$$

В зоне 1, в зоне включения, условие пластичности примет вид

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} - \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = -2, \quad \sigma_{\theta_1}^{(0)p} > \sigma_{\rho_1}^{(0)p}. \quad (7)$$

Вне зоны включения, в зоне 2, условие пластичности запишется в виде

$$\sigma_{\rho_2}^{(0)} - \sigma_{\theta_2}^{(0)} = -2\chi. \quad (8)$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d\sigma_{\rho}^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho}^{(0)} - \sigma_{\theta}^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (9)$$

Из (7)–(9) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1}^{(0)p} &= 2 \ln \rho + C_1, & \sigma_{\theta_1}^{(0)p} &= 2 + 2 \ln \rho + C_1, \\ \sigma_{\rho_2}^{(0)p} &= 2\chi \ln \rho + C_2, & \sigma_{\theta_2}^{(0)p} &= 2\chi + 2\chi \ln \rho + C_2, \end{aligned} \quad (10)$$

где C_1, C_2 – постоянные.

Из условия $\sigma_{\rho_1}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0$ определим постоянную

$$C_1 = -2 \ln \alpha.$$

Получим

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} = 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = 2 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}. \quad (11)$$

Условие сопряжения компонент напряжений на границе эллиптического включения запишется в виде

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} \Big|_{\rho=\beta} = \sigma_{\rho_2}^{(0)p} \Big|_{\rho=\beta}. \quad (12)$$

Согласно (10)–(12), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_2}^{(0)p} &= 2\chi \ln \frac{\rho}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha}, \\ \sigma_{\theta_2}^{(0)p} &= 2\chi \ln \frac{\rho}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\chi. \end{aligned} \quad (13)$$

На границе $\rho = \beta$ имеет место разрыв напряжений $\sigma_{\theta}^{(0)p}$:

$$\sigma_{\theta_2}^{(0)p} - \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = 2(\chi - 1). \quad (14)$$

При $\rho \rightarrow \infty$ имеет место $\sigma_{\rho}^{(0)e} = \sigma_{\theta}^{(0)e} = p$.

Решение в упругой области будем искать в виде:

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = p - \frac{B}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = p + \frac{B}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (15)$$

Из условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе будем иметь:

$$\sigma_{\rho_2}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_{\theta_2}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}. \quad (16)$$

Из (13), (15), (16) имеем

$$\begin{aligned} p - \frac{B}{1} &= 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} - 2\chi \ln \beta, \\ p + \frac{B}{1} &= 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} - 2\chi \ln \beta + 2\chi. \end{aligned} \quad (17)$$

Откуда

$$B = \chi, \quad p = 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} - 2\chi \ln \beta + 2\chi. \quad (18)$$

Учитывая, что $\alpha = R/r_s^{(0)}$ и $\beta = (a+b)/2r_s^{(0)}$, из (18) получим

$$r_s^{(0)} = \exp \left(\frac{p}{2\chi} + \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{1}{\chi} \ln R - \frac{1}{2} \right). \quad (19)$$

Уравнение эллипса (1) перепишем в виде

$$\frac{(x - \delta_1)^2}{(\beta + \delta_2)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \delta_2)^2} = 1 \quad (20)$$

или

$$(x - \delta_1)^2 (\beta + \delta_2)^{-2} + y^2 (\beta - \delta_2)^{-2} - 1 = 0.$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, уравнение (20) запишем в виде

$$(x - \delta_1)^2 \left(\frac{1}{\beta^2} - 2 \frac{\delta_2}{\beta^3} \right) + y^2 \left(\frac{1}{\beta^2} + 2 \frac{\delta_2}{\beta^3} \right) - 1 = 0. \quad (21)$$

Перейдем к полярным координатам по формулам

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

в первом приближении будем иметь

$$\rho^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{\beta^2} - 2\delta_2 \frac{\cos^2 \theta}{\beta^3} + \frac{\sin^2 \theta}{\beta^2} + 2\delta_2 \frac{\sin^2 \theta}{\beta^3} \right) - 2\rho \left(\delta_1 \frac{\cos \theta}{\beta^2} \right) - 1 = 0. \quad (22)$$

Откуда

$$\rho = \beta + \delta_1 \cos \theta + \delta_2 \cos 2\theta. \quad (23)$$

Контур кругового отверстия фиксирован, поэтому в зоне 1 величины $\sigma_{ij1}^p = 0$.

Граничные условия на контуре L_1 (рис. 1) запишутся в виде [2]

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{\rho 1}^p + \frac{d\sigma_{\rho 1}^{(0)p}}{d\rho} \rho' \right) \Big|_{\rho=\beta} &= \left(\sigma_{\rho 2}^p + \frac{d\sigma_{\rho 2}^{(0)p}}{d\rho} \rho' \right) \Big|_{\rho=\beta}, \\ \left(\tau_{\rho\theta 1}^p - \left(\sigma_{\theta 1}^{(0)p} - \sigma_{\rho 1}^{(0)p} \right) \frac{\rho'}{\beta} \right) \Big|_{\rho=\beta} &= \left(\tau_{\rho\theta 2}^p - \left(\sigma_{\theta 2}^{(0)p} - \sigma_{\rho 2}^{(0)p} \right) \frac{\rho'}{\beta} \right) \Big|_{\rho=\beta}, \end{aligned} \quad (24)$$

где точка наверху означает дифференцирование по θ .

Из (24) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^p \Big|_{\rho=\beta} &= \frac{2}{\beta} (1 - \chi) (d_1 \cos \theta + d_2 \cos 2\theta), \\ \tau_{\rho\theta 2}^p \Big|_{\rho=\beta} &= \frac{2}{\beta} (1 - \chi) (d_1 \sin \theta + 2d_2 \sin 2\theta). \end{aligned} \quad (25)$$

Согласно [2], из (25) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^p &= \frac{2}{\rho} (1 - \chi) d_1 \cos \theta + \\ &+ 2 \frac{(1-\chi)}{\rho} d_2 \left([\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)] \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \right. \\ &+ \left. [\sin(\sqrt{3} \ln \beta) - \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \beta)] \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta 2}^p &= \sigma_{\rho 2}^p, \\ \tau_{\rho\theta 2}^p &= \frac{2}{\rho} (1 - \chi) d_1 \sin \theta + 4 \frac{(1-\chi)}{\rho} d_2 \left(\cos(\sqrt{3} \ln \beta) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \right. \\ &+ \left. \sin(\sqrt{3} \ln \beta) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Условия сопряжения напряжений в пластической и упругой областях при $\rho = 1$ имеют вид

$$\sigma_{\rho 2}^p \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^e \Big|_{\rho=1}, \quad \tau_{\rho\theta 2}^p \Big|_{\rho=1} = \tau_{\rho\theta}^e \Big|_{\rho=1}. \quad (27)$$

Согласно (26), (27), компоненты напряжений при $\cos \theta$, $\sin \theta$ в упругой области имеют вид

$$\sigma_{\rho}^e = \frac{2(1-\chi)}{\beta\rho^3} \cos \theta, \quad \sigma_{\theta}^e = -\frac{2(1-\chi)}{\beta\rho^3} \cos \theta, \quad \tau_{\rho\theta}^e = \frac{2(1-\chi)}{\beta\rho^3} \sin \theta. \quad (28)$$

Компоненты напряжений при $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ на границе пластической зоны при $\rho = 1$, согласно (26), имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho 2}^{\prime p} &= 2(1 - \chi)d_2 [\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)] \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta 2}^{\prime p} &= \sigma_{\rho 2}^{\prime p}, \\ \tau_{\rho \theta 2}^{\prime p} &= 4(1 - \chi)d_2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (29)$$

Соответствующее решение в упругой области следует искать в виде [2]

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{\prime e} &= \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2}\right) a_2'' \cos 2\theta + \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2}\right) b_2''' \cos 2\theta + \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta}^{\prime e} &= \frac{1}{\rho^4} a_2'' \cos 2\theta - \frac{2}{\rho^4} b_2''' \cos 2\theta + \left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho \theta}^{\prime e} &= \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2}\right) a_2'' \sin 2\theta + \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2}\right) b_2''' \sin 2\theta + \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (30)$$

Из (29), (30) получим

$$\begin{aligned}a_2'' &= 2(1 - \chi) d_1 (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)), \\ b_2''' &= 4(1 - \chi) d_1 \cos(\sqrt{3} \ln \beta).\end{aligned}\quad (31)$$

Из (28), (30) следует

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{\prime e} &= \frac{2(1-\chi)}{\beta\rho^3} \cos \theta + \frac{2(1-\chi)}{\rho^2} d_2 \left\{ \left(2 - \frac{1}{\rho^2}\right) (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{\rho^2} - 2\right) 2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \right\} \cos 2\theta + \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta}^{\prime e} &= -\frac{2(1-\chi)}{\beta\rho^3} \cos \theta + \frac{2(1-\chi)}{\rho^4} d_2 \left\{ \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) - 3 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \right\} \cos 2\theta + \\ &\quad + \left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho \theta}^{\prime e} &= \frac{2(1-\chi)}{\beta\rho^3} \sin \theta + \frac{2(1-\chi)}{\rho^2} d_2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{\rho^2} - 1\right) 2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \right\} \sin 2\theta + \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (32)$$

Величину ρ'_s определим из условия сопряжения

$$\left(\sigma_{\theta 2}^{\prime p} + \frac{d\sigma_{\theta 2}^{(0)p}}{d\rho} \rho'_s \right) \Big|_{\rho=1} = \left(\sigma_{\theta}^{\prime e} + \frac{d\sigma_{\theta}^{(0)e}}{d\rho} \rho'_s \right) \Big|_{\rho=1}.\quad (33)$$

Из (13), (15), (26), (32), (33) следует

$$\rho'_s = \frac{(\chi - 1) \left(d_1 + \frac{1}{\beta} \right) \cos \theta + (4(\chi - 1)d_2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) + 2d_3) \cos 2\theta}{2\chi}.\quad (34)$$

Таким образом, уравнение упругопластической границы имеет вид

$$\rho = 1 + \delta \frac{(\chi - 1) \left(d_1 + \frac{1}{\beta} \right) \cos \theta + (4(\chi - 1)d_2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) + 2d_3) \cos 2\theta}{2\chi}. \quad (35)$$

В случае равномерного растяжения пластины в (35) следует положить $d_3 = 0$. В случае отсутствия эксцентриситета у эллипса включения положить $d_2 = 0$. В случае совпадения центров отверстия и эллипса включения положить $d_1 = 0$. При $d_2 = d_3 = 0$ имеет место включение в виде круга, смещенного относительно центра отверстия. При $d_1 = 1$, $d_2 = d_3 = 0$ из (35) следует

$$\rho = 1 + \delta \left(\frac{\chi - 1}{2\chi} \right) \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \cos \theta.$$

Литература

- [1] Ольшак, В. Теория пластичности неоднородных сред / В. Ольшак, Я. Рыхлевский, В. Урбановский. — М.: Мир, 1964. — 156 с.
- [2] Ивлев, Д.Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д.Д. Ивлев, Л.В. Ершов. — М.: Наука, 1978.
- [3] Роштова, А.Н. О предельных статически определяемых условиях отрыва для сжимаемого анизотропного материала / А.Н. Роштова // Вестник Самарского государственного университета. — 2007. — № 6(56). — С. 5–12.
- [4] Тихонов, С.В. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из неоднородного материала под действием внутреннего давления / С.В. Тихонов // Вестник Самарского государственного университета. — 2007. — № 6(56). — С. 13–21.
- [5] Целистова, Е.А. Пространственное течение идеальнопластического слоя в случае неоднородных свойств материала / Е.А. Целистова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. — 1999. — № 7. — С. 45–47.
- [6] Spenser, A.J.M. Perturbation methods in plasticity, I. Plane strain of nonhomogeneous plastic solids / A.J.M. Spenser // J. Mech. and Phys. Solids. — 1961. — № 4.

Поступила в редакцию 4/II/2009;
в окончательном варианте — 4/II/2009.

**ELASTOPLASTIC CONDITION OF INHOMOGENEOUS PLANE
WITH CIRCULAR APERTURE SUPPORTED BY ECCENTRIC
ELLIPTICAL INTRUSION WITH BIAXIAL TENSION**

© 2009 P.N. Kuznetsov²

In the paper biaxial elastoplastic strained condition of inhomogeneous plane weakened by circular aperture and supported by eccentric elliptical intrusion is investigated. The flat deformation is observed. The limit of elastoplastic zone, and influence of non-uniform intrusion on strained condition of a plane is defined.

Key words and phrases: plane deformation, stress tensor, plasticity, elasticity, elastoplastic limit, heterogeneity.

Paper received 4/II/2009.

Paper accepted 4/II/2009.

²Kuznetsov Pavel Nikolaevich (kuznetsov_pn@mail.ru), Dept. of mathematic analysis, Chuvash State Teachers' Training University, Cheboksary, 428000, Russia.

УДК 539.4

НЕЛИНЕЙНОЕ УПРОЧНЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НЕСТАБИЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ СТРУКТУР

© 2009 В.О. Левченко, А.В. Мантуленко, А.Л. Сараев¹

В статье построены математические модели процесса фазовых превращений в нестабильной упругой среде, элементы фазовой структуры которой образуются и распределяются в пространстве неравномерно. Рассмотрено два типа структур. В первом случае новая фаза образует скопления в виде отдельных включений. Во втором случае новая и старая фазы образуют скопления в виде взаимопроникающих каркасов. Статистическое осреднение нелинейных систем уравнений равновесия неравномерно распределенных микронеоднородных сред с нестабильными компонентами позволяет установить их макроскопические определяющие уравнения и вычислить соответствующие эффективные характеристики.

Ключевые слова: определяющие уравнения, фазовые превращения, эффективные характеристики, микроструктура, статистическое осреднение.

1. Эффективные свойства среды со скоплениями зародышей фаз в виде отдельных объемов

Пусть упругая среда, в которой происходит фазовый переход первого рода, занимает объем V , ограниченный поверхностью S . Объем зарождающейся и развивающейся новой фазы обозначим V_f , объем старой фазы — V_m .

Кроме того, обозначим объем, занимаемый скоплениями включений W_f , а объем оставшийся части матрицы — W_m . Таким образом, вся рассматриваемая среда представляет собой двухкомпонентную фазовую структуру, в которой включениями являются объемы скоплений, а каждый элемент скоплений включений в свою очередь представляет собой двухкомпонентный композит с равномерным распределением зародышей.

¹Левченко Вадим Олегович (ssumonk@yandex.ru), Мантуленко Алексей Вячеславович (mantulenko83@mail.ru), Сараев Александр Леонидович (alex_saraev@mail.ru), кафедра математики, информатики и математических методов в экономике Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

При этом выполняются элементарные соотношения

$$V_m + V_m = V, \quad W_m + W_f = V, \quad (V_m > W_m, V_f < W_f).$$

При фазовом превращении ($V_f \rightarrow V_m$) в материале новой фазы под воздействием внешних нагрузок возникают и развиваются необратимые структурные деформации $\alpha_{ij}(\mathbf{r})$, вызванные перестройкой кристаллической и доменной структуры материала. Эти деформации являются ограниченными предельными сдвигами двойниковых доменов $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$, $\alpha = \sqrt{\alpha_{ij}\alpha_{ij}}$, где α_{\max} — максимальный уровень структурных деформаций. Закон Гука такой среды имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu_m \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda_m \varepsilon_{pp}, & \mathbf{r} \in V_m, \\ \sigma_{ij} &= 2\mu_f (\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}) + \delta_{ij} \lambda_f \varepsilon_{pp}, & \mathbf{r} \in V_f. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — тензоры напряжений и полных деформаций, μ_s, λ_s ($s = 1, 2$) — параметры Ламе компонентов.

В качестве условий фазовых переходов второго компонента в первый и обратно принимаются поверхности нагружения

$$\begin{aligned} (s_{ij} - 2n_+ \alpha_{ij})(s_{ij} - 2n_+ \alpha_{ij}) &= k_+^2 \quad (V_m \rightarrow V_f), \\ (s_{ij} - 2n_- \alpha_{ij})(s_{ij} - 2n_- \alpha_{ij}) &= k_-^2 \quad (V_f \rightarrow V_m). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_{+,-}(\alpha) &= k_{+,-}^\infty + (k_{+,-}^0 - k_{+,-}^\infty)(1 - e^{-\lambda_{+,-}\alpha}), \\ n_{+,-}(\alpha) &= n_{+,-}^\infty + (n_{+,-}^0 - n_{+,-}^\infty)(1 - e^{-\lambda_{+,-}\alpha}), \end{aligned}$$

$k_{+,-}^{0,\infty}$ — начальный и конечный пределы прямого и обратного фазовых переходов, соответственно, $n_{+,-}^{0,\infty}$ — начальный и конечный коэффициенты упрочнения, $\lambda_{+,-}$ — параметр, характеризующий скорость перемещения поверхностей (1.2) в шестимерном пространстве напряжений. Экспериментальные наблюдения показывают, что эти характеристики зависят от температуры, и их значения определяют тип поведения нестабильной среды (сверхупругость, эффект "памяти формы" или обычное пластическое течение).

Геометрическая структура такого двухкомпонентного материала описывается случайной изотропной индикаторной функцией координат $\kappa(\mathbf{r})$, равной нулю в точках старой фазы и единице в точках новой. С помощью этой функции локальный закон Гука для среды записывается в виде

$$\begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{r}) &= 2(\mu_m + [\mu]\kappa(\mathbf{r}))e_{ij}(\mathbf{r}) - 2\mu_m \alpha_{ij}(\mathbf{r}), \\ \sigma_{pp}(\mathbf{r}) &= 3(K_m + [K]\kappa(\mathbf{r}))\varepsilon_{pp}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $s_{ij} = \sigma_{pp} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \cdot \sigma_{ij}$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{pp}$, $K_{m,f} = \frac{2}{3}\mu_{m,f} + \lambda_{m,f}$, квадратными скобками обозначены разрывы величин при переходе фазовой границы — $[Q] = Q_f - Q_m$. Структурные деформации удовлетворяют условию несжимаемости $\alpha_{pp}(\mathbf{r}) = 0$.

Индикаторная функция $\kappa(\mathbf{r})$, напряжения, полные и структурные деформации предполагаются статистически однородными и эргодическими

полями, поэтому их математические ожидания совпадают со средними значениями по полному объему V , объемам фаз $V_{m,f}$ и W_f [1]

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{V} \int_V Q(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \langle Q \rangle_w = \frac{1}{W_f} \int_{W_f} Q(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \langle Q \rangle_{m,f} = \frac{1}{V_{m,f}} \int_{V_{m,f}} Q(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

угловыми скобками обозначена операция осреднения.

Для установления макроскопических определяющих уравнений материала и вычисления его эффективных характеристик необходимо усреднить по полному объему W_f локальный закон Гука (1.3)

$$\begin{aligned} \langle s_{ij} \rangle_w &= 2\mu_m \langle e_{ij} \rangle_w + 2[\mu] \frac{c_v}{c_w} \langle e_{ij} \rangle_f - 2\mu_m \langle \alpha_{ij} \rangle_w, \\ \langle \sigma_{pp} \rangle_w &= 3K_m \langle \varepsilon_{pp} \rangle_w + 3[K] \langle \varepsilon_{pp} \rangle_f. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $c_v = \frac{V_f}{V}$ — объемное содержание зародышей новой фазы, $c_w = \frac{W_f}{V}$ — объемное содержание скоплений включений.

Соотношения (1.4) показывают, что для установления эффективного закона Гука необходимо выразить величины $\langle e_{ij} \rangle_f$, $\langle \varepsilon_{pp} \rangle_f$ через макроскопические деформации.

Для этого усредним систему интегральных уравнений равновесия, ядрами которой являются вторые производные тензора Грина [1]

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) = \int_{W_f} \mathbf{G}_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tau'_{kl}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (1.5)$$

Умножая уравнения (1.5) на $\kappa'(\mathbf{r})$, усредняя их по объему V и принимая во внимание изотропность структуры композита, находим [2]

$$\begin{aligned} \langle e_{ij} \rangle_f &= \frac{1}{1 + \alpha_m \left(1 - \frac{c_v}{c_w}\right) (m-1)} \left(\langle e_{ij} \rangle_w + m \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_w}\right) \alpha_m \langle \alpha_{ij} \rangle_w \right), \\ \langle \varepsilon_{pp} \rangle_f &= \frac{1}{1 + \gamma_m \left(1 - \frac{c_v}{c_w}\right) (q-1)} \langle \varepsilon_{pp} \rangle_w. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\alpha_m = \frac{2}{15} \frac{4 - 5v_m}{1 - v_m}$, $\gamma_m = \frac{1}{3} \frac{1 + v_m}{1 - v_m}$, $v_m = \frac{1}{2} \frac{3K_m - 2\mu_m}{3K_m + 2\mu_m}$, $m = \frac{\mu_f}{\mu_m}$, $q = \frac{K_f}{K_m}$.

Подстановка формул (1.6) в соотношения (1.4) дает макроскопический закон Гука рассматриваемой микронеоднородной среды

$$\langle s_{ij} \rangle_w = 2\mu_w \langle e_{ij} \rangle_w - 2\mu_w^\alpha \langle \alpha_{ij} \rangle_w, \quad \langle \sigma_{pp} \rangle_w = 3K_w \langle \varepsilon_{pp} \rangle_w. \quad (1.7)$$

Здесь

$$\mu_w = \mu_m \left[1 + \frac{\frac{c_v}{c_w} (m-1)}{1 + \alpha_m \left(1 - \frac{c_v}{c_w}\right) (m-1)} \right],$$

$$K_w = K_m \left[1 + \frac{\frac{c_v}{c_w}(q-1)}{1 + \gamma_m \left(1 - \frac{c_v}{c_w}\right)(q-1)} \right], \quad \mu_w^\alpha = 1 + \frac{\mu_m}{1 + \alpha_m \left(1 - \frac{c_v}{c_w}\right)(m-1)}.$$

Совершенно аналогично рассчитываются формулы для эффективных модулей упругости всего композита, образованного матрицей W_m и скоплениями W_f . Макроскопический закон Гука в этом случае имеет вид

$$\langle s_{ij} \rangle = 2\mu^* \langle e_{ij} \rangle - 2\mu^\alpha \langle \alpha_{ij} \rangle, \quad \langle \sigma_{pp} \rangle = 3K^* \langle \varepsilon_{pp} \rangle. \quad (1.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu^* &= \mu_m \left[1 + \frac{c_w(\mu_w - \mu_m)}{\mu_m + \alpha_m(1 - c_w)(\mu_w - \mu_m)} \right], \\ K^* &= K_m \left[1 + \frac{c_w(K_w - K_m)}{K_m + \gamma_m(1 - c_w)(K_w - K_m)} \right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для определения макроскопических условий прямого и обратного фазовых превращений в рассматриваемой среде и закона ее деформирования необходимо усреднить соотношения (2) по объему новой фазы V_2

$$\langle s_{ij} - 2n_{+,-}(\alpha)\alpha_{ij} \rangle_f \langle s_{ij} - 2n_{+,-}(\alpha)\alpha_{ij} \rangle_f = k_{+,-}^2 \langle \alpha \rangle_f. \quad (1.10)$$

Постановка в условие (1.10) локального закона Гука (1.3) и применение правила механического смешивания дают макроскопические поверхности нагружения

$$\begin{aligned} \left[\langle s_{ij} \rangle - 2n_{+,-}^* \langle \alpha \rangle_f \langle \alpha_{ij} \rangle_f \right] \left[\langle s_{ij} \rangle - 2n_{+,-}^* \langle \alpha \rangle_f \langle \alpha_{ij} \rangle_f \right] = \\ = k_{+,-}^{*2} \langle \alpha \rangle_f \end{aligned} \quad (1.11)$$

и ассоциированный с ней закон деформирования

$$\langle s_{ij} \rangle = k_{+,-}^* \langle \alpha \rangle_f v_{ij} + 2n_{+,-}^* \langle \alpha \rangle_f \langle \alpha_{ij} \rangle_f, \quad v_{ij} = \frac{\langle \alpha_{ij}^\bullet \rangle}{\sqrt{\langle \alpha_{kl}^\bullet \rangle \langle \alpha_{kl}^\bullet \rangle}}. \quad (1.12)$$

Здесь

$$k_{+,-}^* = \frac{k_{+,-} \langle \alpha \rangle_f}{m} \left(1 + \left(\alpha_m \left(1 - \frac{c_v}{c_w} \right) + \frac{c_v}{c_w} \right) (m-1) \right)$$

— эффективный начальный предел фазового перехода,

$$n_{+,-}^* = n_{+,-} \langle \alpha \rangle_f + \mu^* \left(\frac{k_{+,-}^* \langle \alpha \rangle_f}{k_{+,-} \langle \alpha \rangle_f c_v} \left(1 - \left(1 - \frac{c_v}{c_w} \right) \alpha_m \right) - 1 \right)$$

— эффективный коэффициент упрочнения, характеризующий скорость перемещения поверхности (1.9) в шестимерном пространстве макронапряжений.

Структурные средние деформации $\langle \alpha_{ij} \rangle_f$ необходимо выразить через объемное содержание новой фазы c_v и величину α_{\max} .

Процесс фазового перехода может быть описан кинетическим уравнением [2]

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dc_v} &= h(1-\alpha)^\lambda c_v \quad (0 \leq \lambda \leq 1), \\ c_v|_{\alpha=0} &= 0, \quad c_v|_{\alpha=\alpha_{\max}} = c_w. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Из уравнения (1.13) находим зависимость роста уровня структурных деформаций от концентрации новой фазы

$$\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} = 1 - (1 - c_v^2)^{\frac{1}{1-\lambda}} \quad (1.14)$$

или

$$c_v = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} - 1 \right)^{1-\lambda}}. \quad (1.15)$$

Параметр роста λ остается постоянным на протяжении всего процесса фазового перехода, и его значение может быть измерено на границе упругого поведения и нелинейного упрочнения нестабильной среды. Затем это значение λ используется в уравнениях (1.12) во всем диапазоне развития структурных деформаций $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$.

Соотношение (1.10) принимает вид

$$\langle s_{ij} \rangle = \left(k_{+,-}^* + 2n_{+,-}^* \alpha_{\max} \left(1 - (1 - c_v)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right) \right) v_{ij}. \quad (1.16)$$

2. Эффективные свойства среды со скоплениями зародышей фаз в виде взаимопроникающих объемов

Пусть теперь фазовая структура представляет собой двухкомпонентную среду, в которой матрица и объемы скоплений образуют взаимопроникающие каркасы, а каждый элемент скоплений включений в свою очередь представляет собой двухкомпонентный композит с равномерным распределением зародышей новой фазы.

В этом случае описанная выше процедура расчета эффективных характеристик приводит к макроскопическому закону Гука вида (1.8), в котором

$$\begin{aligned} \mu^* &= \langle \mu \rangle \left(1 + \frac{\alpha c_w c_m (\mu_w - \mu_m)^2}{\langle \mu \rangle - \alpha (c_w - c_m) (\mu_w - \mu_m)} \right), \\ K^* &= \langle K \rangle \left(1 + \frac{\gamma c_w c_m (K_w - K_m)^2}{\langle K \rangle - \gamma (c_w - c_m) (K_w - K_m)} \right), \\ \langle \mu \rangle &= c_w \mu_w + c_m \mu_m, \quad \alpha = \frac{2}{15} \frac{4 - 5 \langle v \rangle}{1 - \langle v \rangle}, \\ \langle K \rangle &= c_w K_w + c_m K_m, \quad \gamma = \frac{1}{15} \frac{1 + \langle v \rangle}{1 - \langle v \rangle}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Макроскопические условия прямого и обратного фазовых переходов имеют вид (1.12), в которых

$$k_{+,-}^* = k_{+,-} (\langle \alpha \rangle_f) \frac{\mu^*}{\mu^\alpha} \quad (2.2)$$

— эффективный начальный предел фазового перехода,

$$n_{+,-}^* = n_{+,-} (\langle \alpha \rangle_f) \frac{k_{+,-}^* (\langle \alpha \rangle_f)}{k_{+,-} (\langle \alpha \rangle_f)} \times \left(\mu_m + n_{+,-} (\langle \alpha \rangle_f) + \mu_m \frac{\alpha c_w \mu_m}{\langle \mu \rangle - \alpha (\mu_w - \mu_m) (c_m - c_w)} \right) - \mu_w^\alpha c_m \quad (2.3)$$

— эффективный коэффициент упрочнения.

Связь структурных средних деформаций $\langle \alpha_{ij} \rangle_f$ с объемным содержанием новой фазы c_v и величиной α_{\max} выражается соотношением (1.15), а макроскопический закон упрочнения рассматриваемой среды имеет вид (1.12) с эффективными параметрами (2.2), (2.3).

Литература

- [1] Сараев, Л.А. Неупругие свойства многокомпонентных композитов со случайной структурой / Л.А. Сараев, В.С. Глуценков. — Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. — 164 с.
- [2] Мантуленко, А.В. К теории нелинейного упрочнения нестабильных неравномерно распределенных фазовых структур / А.В. Мантуленко, А.Л. Сараев, Л.А. Сараев // Труды XI международного симпозиума "Упорядочение в минералах и сплавах", 10–15 сентября 2008 г., Ростов-на-Дону. — Ростов н/Д., 2008. — Т. 2. — С. 160–163.

Поступила в редакцию 9/II/2009;
в окончательном варианте — 9/II/2009.

NONLINEAR HARDENING OF NON-UNIFORMLY DISTRIBUTED UNSTABLE PHASE STRUCTURES

© 2009 V.O. Levchenko, A.V. Mantulenko, A.L. Saraev²

In the article mathematical models of process of the phase changes in unstable elastic medium, the elements of phase structure of which are formed and distributed in space non-uniformly are constructed. Two types of structures are considered. In the first case new phase forms accumulations in the form of separate inclusions. In the second case new and old phases form accumulations in the form of interpenetrating skeletons. Statistical averaging of nonlinear systems of equilibrium equations of nonuniformly distributed micro heterogeneity environments with unstable components allows to establish their macroscopically determining equations and calculate appropriate effective characteristics.

Key words and phrases: determining equations, phase changes, effective characteristics, micro structure, statistical averaging.

Paper received 9/II/2009.

Paper accepted 9/II/2009.

²Levchenko Vadim Olegovich (ssumonk@yandex.ru), Mantulenko Alexey Vyacheslavovich (mantulenko83@mail.ru), Saraev Alexander Leonidovich (alex_saraev@mail.ru), Dept. of Mathematics, Computer Science and Mathematical Methods in the Economy, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТОВ С НЕРАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СОСТАВЛЯЮЩИХ КОМПОНЕНТОВ

© 2009 Н.А. Сизова, Л.А. Сараев¹

В настоящей работе представлены модели композитов, компоненты которых образуют случайно неоднородную двухуровневую структуру. Рассмотрены два типа структур. В первом случае композит образован упругой матрицей и упругими сферическими включениями. При этом включения в матрице расположены не равномерно, а образуют скопления сферической формы. Во втором случае включения в матрице также расположены неравномерно, но образуют скопления в виде взаимопроникающих каркасов.

Ключевые слова: определяющие уравнения, эффективные модули упругости, матрица, включения, взаимопроникающие каркасы, статистическое осреднение.

Пусть рассматриваемая упругая среда занимает объем V , ограниченный поверхностью S . Объем связующей матрицы обозначим V_m , объем включений — V_f .

Кроме того, обозначим объем, занимаемый скоплениями включений, W_f , а объем оставшейся части матрицы — W_m . Таким образом, весь композиционный материал представляет собой двухкомпонентную среду, в которой включениями являются объемы скоплений, а каждый элемент скоплений включений в свою очередь представляет собой двухкомпонентный композит с равномерным распределением микросфер. При этом выполняются элементарные соотношения

$$V_m + V_m = V, \quad W_m + W_f = V \quad (V_m > W_m, V_f < W_f).$$

Закон Гука микронеоднородной среды скоплений имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu_m \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda_m \varepsilon_{pp}, & \mathbf{r} \in W_f - V_f, \\ \sigma_{ij} &= 2\mu_f \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda_f \varepsilon_{pp}, & \mathbf{r} \in V_f. \end{aligned} \quad (1)$$

¹Сизова Наталья Александровна (nalsi@mail.ru), Сараев Леонид Александрович (saraev@ssu.samara.ru), кафедра математики, информатики и математических методов в экономике Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Здесь σ_{ij} , ε_{ij} — тензоры напряжений и полных деформаций, $\mu_{m,f}$, $\lambda_{m,f}$ — параметры Ламе компонентов.

Геометрическая структура такого двухкомпонентного материала описывается случайной изотропной индикаторной функцией координат $\kappa(\mathbf{r})$, равной нулю в точках первого компонента и единице в точках второго. С помощью этой функции локальный закон Гука для среды записывается в виде

$$\begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{r}) &= 2(\mu_m + (\mu_f - \mu_m)\kappa(\mathbf{r}))e_{ij}(\mathbf{r}), \\ \sigma_{pp}(\mathbf{r}) &= 3(K_1 + (K_f - K_m)\kappa(\mathbf{r}))\varepsilon_{pp}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$s_{ij} = \sigma_{pp} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \cdot \sigma_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ij}\varepsilon_{pp}, \quad K_{m,f} = \frac{2}{3}\mu_{m,f} + \lambda_{m,f}.$$

Индикаторная функция $\kappa(\mathbf{r})$, напряжения и деформации предполагаются статистически однородными и эргодическими полями, поэтому их математические ожидания совпадают со средними значениями по полному объему V и объемам фаз $V_{m,f}$ [1]

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \langle f \rangle_w = \frac{1}{W_f} \int_{W_f} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \langle f \rangle_{m,f} = \frac{1}{V_{m,f}} \int_{V_{m,f}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

угловыми скобками обозначена операция осреднения.

Для установления макроскопических определяющих уравнений рассматриваемой среды и вычисления ее эффективных характеристик необходимо установить связь между макроскопическими напряжениями и макроскопическими деформациями. С этой целью необходимо усреднить локальный закон Гука (2) по объему W_f

$$\begin{aligned} \langle s_{ij} \rangle_w &= 2\mu_m \langle e_{ij} \rangle_w + 2(\mu_f - \mu_m) \frac{c_v}{c_w} \langle e_{ij} \rangle_f, \\ \langle \sigma_{pp} \rangle_w &= 3K_m \langle \varepsilon_{pp} \rangle_w + 3(K_f - K_m) \frac{c_v}{c_w} \langle \varepsilon_{pp} \rangle_f. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $c_v = \frac{V_f}{V}$ — объемное содержание микросфер, $c_w = \frac{W_f}{V}$ — объемное содержание скоплений включений.

Соотношения (3) показывают, что для установления эффективного закона Гука необходимо выразить величины $\langle e_{ij} \rangle_f$, $\langle \varepsilon_{pp} \rangle_f$ через макроскопические деформации.

Это достигается статистическим осреднением системы деформирования среды, состоящей из локальных уравнений (2), уравнений равновесия

$$\sigma_{ip,p}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4)$$

и соотношений Коши, связывающих компоненты тензора деформаций с компонентами вектора перемещений $u_i(\mathbf{r})$. Граничными условиями такой системы являются условия отсутствия флуктуаций величин на поверхности скоплений, а сама система сводится к эквивалентной системе интегральных

уравнений, ядрами которой являются вторые производные тензора Грина [1, 2]

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) = \int_{W_f} \mathbf{G}_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tau'_{kl}(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r}_1. \quad (5)$$

Здесь штрихами обозначены флуктуации величин в объеме скоплений.

Умножая уравнения (5) на $\kappa'(\mathbf{r})$, усредняя их затем по объему скоплений и используя изотропность функции $\kappa'(\mathbf{r})$, находим

$$\begin{aligned} \langle e_{ij} \rangle_f &= \frac{1}{1 + \alpha_m \left(1 - \frac{c_w}{c_w}\right) (\mu_f - \mu_m)} \langle e_{ij} \rangle_w, \\ \langle \varepsilon_{pp} \rangle_f &= \frac{1}{1 + \gamma_m \left(1 - \frac{c_w}{c_w}\right) (K_f - K_m)} \langle \varepsilon_{pp} \rangle_w. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\alpha_m = \frac{2}{15} \frac{4 - 5v_m}{1 - v_m}, \quad \gamma_m = \frac{1}{3} \frac{1 + v_m}{1 - v_m}, \quad v_m = \frac{1}{2} \frac{3K_m - 2\mu_m}{3K_m + 2\mu_m}.$$

Подстановка формул (6) в соотношения (3) дает макроскопический закон Гука рассматриваемой микронеоднородной среды

$$\langle s_{ij} \rangle_w = 2\mu_w \langle e_{ij} \rangle, \quad \langle \sigma_{pp} \rangle_w = 3K_w \langle \varepsilon_{pp} \rangle. \quad (7)$$

Здесь

$$\mu_w = \mu_m \left(1 + \frac{\frac{c_w}{c_w} (\mu_f - \mu_m)}{1 + \alpha_m \left(1 - \frac{c_w}{c_w}\right) (\mu_f - \mu_m)} \right), \quad (8)$$

$$K_w = K_m \left(1 + \frac{\frac{c_w}{c_w} (K_f - K_m)}{1 + \gamma_m \left(1 - \frac{c_w}{c_w}\right) (K_f - K_m)} \right). \quad (9)$$

Совершенно аналогично рассчитываются формулы для эффективных модулей упругости всего композита, образованного матрицей W_m и скоплениями W_f . Макроскопический закон Гука в этом случае имеет вид

$$\langle s_{ij} \rangle = 2\mu^* \langle e_{ij} \rangle, \quad \langle \sigma_{pp} \rangle = 3K^* \langle \varepsilon_{pp} \rangle. \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu^* &= \mu_m \left(1 + \frac{c_w (\mu_w - \mu_m)}{1 + \alpha_m (1 - c_w) (\mu_w - \mu_m)} \right), \\ K^* &= K_m \left(1 + \frac{c_w (K_w - K_m)}{1 + \gamma_m (1 - c_w) (K_w - K_m)} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

звездочкой обозначены эффективные модули упругости микронеоднородной среды.

На рис. 1 приведены кривые расчета эффективного модуля упругости сдвига. Нижняя кривая рассчитана при условии, что скопления включений занимают семьдесят процентов объема матрицы — $c_w = 0,7$. Верхняя кривая соответствует классической модели, когда микросферы в объеме

композита V распределены равномерно. Построенная модель описывает известный механический факт ухудшения свойств смесей при неравномерном перемешивании составляющих компонентов.

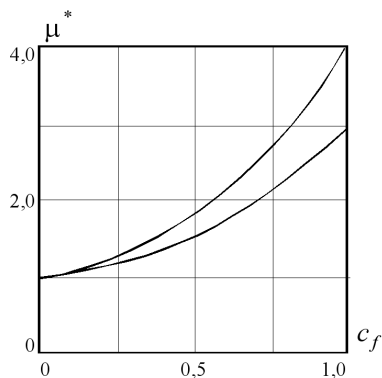


Рис. 1

Если в композиционном материале матрица и объемы скоплений образуют взаимопроникающие каркасы, то выражения для эффективных модулей упругости соответствуют модели матричной смеси и рассчитываются по формулам [1]

$$\begin{aligned} \mu^* &= \langle \mu \rangle \left(1 + \frac{\alpha c_w c_m (\mu_w - \mu_m)^2}{\langle \mu \rangle - \alpha (c_w - c_m) (\mu_w - \mu_m)} \right), \\ K^* &= \langle K \rangle \left(1 + \frac{\gamma c_w c_m (K_w - K_m)^2}{\langle K \rangle - \gamma (c_w - c_m) (K_w - K_m)} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\langle \mu \rangle = c_w \mu_w + c_m \mu_m, \quad \alpha = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\langle v \rangle}{1 - \langle v \rangle},$$

$$\langle K \rangle = c_w K_w + c_m K_m, \quad \gamma = \frac{1}{15} \frac{1 + \langle v \rangle}{1 - \langle v \rangle}.$$

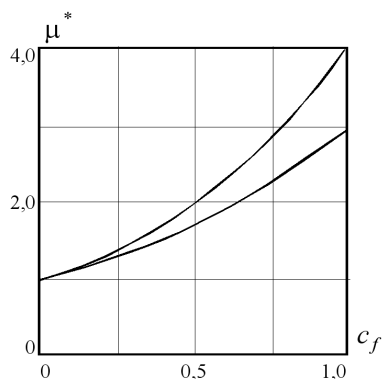


Рис. 2

На рис. 2 приведены кривые расчета эффективного модуля упругости сдвига. Нижняя кривая рассчитана при условии, что скопления включе-

ний занимают семьдесят процентов объема матрицы — $c_w = 0,7$. Верхняя кривая соответствует классической модели, когда микросферы в объеме композита V распределены равномерно. Построенная модель описывает известный механический факт ухудшения свойств смесей при неравномерном перемешивании составляющих компонентов.

Литература

- [1] Сараев, Л.А. Моделирование макроскопических пластических свойств многокомпонентных композиционных материалов / Л.А. Сараев. — Самара: Изд-во "Самар. ун-т", 2000. — 282 с.
- [2] Сараев, Л.А. Неупругие свойства многокомпонентных композитов со случайной структурой / Л.А. Сараев, В.С. Глуценков. — Самара: Изд-во "Самар. ун-т", 2004. — 164 с.

Поступила в редакцию 9/II/2009;
в окончательном варианте — 9/II/2009.

ABOUT THE CALCULATION OF EFFECTIVE MODULUS OF ELASTICITY OF COMPOSITES WITH NON-UNIFORM DISTRIBUTION OF COMPONENTS

© 2009 N.A. Sizova, A.L. Saraev²

In the work models of composites, the components of which form accidentally non-uniform two-level structure are presented. Two types of structures are considered. In the first case, composite is formed by elastic matrix and elastic spherical inclusions. At the same time, inclusions are located in matrix unevenly, and they form congestions of spherical form. In the second case inclusions are also located in matrix unevenly, but they form congestions in the form of interpenetrating skeletons.

Key words and phrases: determining equations, effective modulus of elasticity, matrix, inclusions, interpenetrating skeletons, statistical averaging.

Paper received 9/II/2009.
Paper accepted 9/II/2009.

²Sizova Natalya Alexandrovna (nalsi@mail.ru), Saraev Leonid Alexandrovich (saraev@ssu.samara.ru), Dept. of Mathematics, Computer Science and Mathematical Methods in the Economy, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

УДК 539.42

СМЕШАННОЕ НАГРУЖЕНИЕ (НОРМАЛЬНЫЙ ОТРЫВ И ПОПЕРЕЧНЫЙ СДВИГ) ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ С ТРЕЩИНОЙ В МАТЕРИАЛЕ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2009 Л.В. Степанова, Т.Б. Элекина¹

Получено приближенное решение задачи о трещине, находящейся под одновременным действием растягивающей и сдвигающей нагрузки, в материале, подчиняющемся дробно-линейному закону теории установившейся ползучести в предположении реализации плоского деформированного состояния. Найдено аналитическое решение задачи определения напряженно-деформированного состояния в непосредственной окрестности вершины трещины в образце, находящемся под действием растягивающей и сдвиговой нагрузки для различных значений коэффициента смешанности нагружения, определяющего вид нагружения. Показано, что поле напряжений состоит из шести областей (секторов), внутри которых компоненты тензора напряжений определяются различными функциональными зависимостями. Границы введенных секторов находятся численно из решения системы трансцендентных уравнений. Приведено сравнение приближенного аналитического решения с численным решением задачи для материала, следующего степенному закону Бейли – Нортонa теории установившейся ползучести в предельном случае, когда показатель нелинейности материала неограниченно возрастает.

Ключевые слова: смешанное нагружение, коэффициент смешанности нагружения, напряженно-деформированное состояние у вершины трещины, дробно-линейный закон теории установившейся ползучести.

1. О дробно-линейном законе ползучести

В рамках теории установившейся ползучести предполагается, что при заданной температуре между скоростью деформации ползучести и напряжением существует определенная зависимость. В большинстве случаев для описания этой функциональной зависимости используется либо степенной

¹Степанова Лариса Валентиновна, Элекина Татьяна Борисовна (xlst@ssu.samara.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Россия, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

закон Бейли – Нортонa, либо экспоненциальный закон. Когда применяются соотношения такого типа, оказывается, что даже для постоянной температуры невозможно подобрать единые константы для всего диапазона напряжений, где необходимо учитывать ползучесть. В [1] указывается, что сначала необходимо определить диапазон напряжений для каждого конкретного случая и для выделенного интервала изменения напряжений подобрать значения показателя степени n степенного закона теории установившейся ползучести. Таким образом, оказывается, что $n = n(\sigma)$, и все преимущества, связанные с применением степенной зависимости, исчезают. Для преодоления указанных сложностей были предложены принципиально другие функциональные зависимости скоростей деформаций ползучести от напряжений, в которых материальные параметры имеют четкий физический смысл [2,3]. Опираясь на анализ экспериментальных данных для ряда металлов, С.А. Шестериков и М.А. Юмашева показали [2], что если для установившейся ползучести записать соотношение вида

$$\dot{\epsilon} = B \frac{\sigma - \sigma_a}{\sigma_b - \sigma}, \quad (1.1)$$

где σ_a – напряжение, ниже которого нет ползучести, σ_b – напряжение типа предела прочности, то удастся достаточно хорошо единой зависимостью (1.1) описать весь диапазон изменения напряжений. Следует также отметить, что, в отличие от степенной и экспоненциальной зависимостей, использование соотношения (1.1) позволяет описать и мгновенные пластические деформации. Действительно, условие предельного состояния $\sigma = \sigma_b$ аналогично условию наступления пластического течения. Таким образом, в предельном случае получается задача для идеально пластического материала. Следовательно, данная модель физически более обоснована по сравнению со степенной моделью Бейли – Нортонa и имеет перед ней неоспоримые преимущества. Дробная модель [2] учитывает максимальное предельное напряжение, характеризующее мгновенное разрушение металла при температуре испытаний, она также может описывать линейную ползучесть при малых напряжениях и различие характеристик длительной прочности при растяжении и сжатии. Более того, дробная модель может учитывать наличие ненулевого предела ползучести, ограничивающего снизу диапазон напряжений, при котором развивается процесс ползучести. В настоящее время дробная модель установившейся ползучести и длительной прочности является предметом многочисленных исследований [4–10]. Для каждого типа определяющих уравнений необходимо разработать методы решения краевых задач при расчете элементов конструкций. Наиболее изученными являются степенной и экспоненциальный определяющие законы [11]. Поэтому интерес представляет зависимость (1.1). В данной работе изучаются поля напряжений и скоростей деформаций ползучести вблизи вершины трещины в условиях смешанного нагружения для частного случая аппрок-

симаии (1.1) – для дробно-линейного закона ползучести

$$\dot{\epsilon} = B \frac{\sigma}{\sigma_b - \sigma}. \quad (1.2)$$

В последнее время смешанное нагружение элемента конструкции с трещиной, находящегося под действием сложной системы нагрузок, в условиях пластического деформирования, ползучести, циклической нагрузки вызывает особый интерес [12, 13]. В настоящем исследовании получено приближенное решение задачи о трещине, находящейся под одновременным действием растягивающей и сдвигающей нагрузки, в материале, подчиняющемся дробно-линейному закону теории установившейся ползучести в предположении реализации плоского деформированного состояния. Вид нагружения характеризуется параметром [14]:

$$M^p = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right\}, \quad (1.3)$$

принимая нулевое значение для трещины поперечного сдвига; значение, равное единице, для чистого растяжения и значение $0 < M^p < 1$ для смешанного нагружения образца с трещиной.

2. Постановка задачи

Анализ полей напряжений и скоростей деформации ползучести вблизи вершины трещины в условиях смешанного нагружения в материале, подчиняющемся дробно-линейному закону теории установившейся ползучести:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e} s_{ij}, \quad f(\sigma_e) = B \frac{\sigma_e}{\sigma_b - \sigma_e}, \quad (2.1)$$

где B, σ_b – материальные константы, s_{ij} – девиатор тензора напряжений, $\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ – интенсивность напряжений, приводит к необходимости исследования системы уравнений, состоящей из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2.2)$$

и условия совместности деформаций, сформулированного для скоростей деформаций ползучести,

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{\epsilon}_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \dot{\epsilon}_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \dot{\epsilon}_{\theta\theta})}{\partial r^2} \quad (2.3)$$

в полярной системе координат с полюсом в вершине трещины.

Определяющие соотношения, связывающие скорости деформаций ползучести и напряжения, замыкают сформулированную систему уравнений и в рамках предположения о реализации плоского деформированного состояния имеют вид

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{3}{4} B \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\sigma_b - \sigma_e}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{3}{4} B \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{\sigma_b - \sigma_e}, \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = \frac{3}{2} B \frac{\sigma_{r\theta}}{\sigma_b - \sigma_e}, \quad (2.4)$$

где

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2}.$$

Граничные условия задачи есть условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0. \quad (2.5)$$

По мере удаления от вершины трещины уровень напряжений снижается и, следовательно, определяющие уравнения (2.4) постулируют линейную зависимость между скоростями деформаций ползучести и напряжениями. Поэтому граничные условия в бесконечно удаленной точке представляют собой условия асимптотического сближения искомого решения с решением задачи для линейно вязкого материала:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[C_I \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + C_{II} \left(-5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[C_I \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) + C_{II} \left(-3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[C_I \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) + C_{II} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вид смешанного нагружения может быть охарактеризован параметром M^{lv} , определяемым формулой

$$M^{lv} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right| = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{C_I}{C_{II}} \right|, \quad (2.7)$$

введенным по аналогии с упругим параметром смешанности нагружения [15].

Введение безразмерных переменных согласно равенствам

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{y} = \frac{y}{L}, \quad \hat{r} = \frac{r}{L}, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{3}\sigma_b/2}, \quad \hat{\dot{\epsilon}}_{ij} = \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{3B/4}, \quad L = \frac{C^*}{B\sqrt{3}\sigma_b/2} \quad (2.8)$$

позволяет сформулировать систему уравнений в безразмерной форме. При этом уравнения равновесия (2.2) и условие совместности (2.3) сохраняют свою форму. Определяющие уравнения задачи после перехода к безразмерным величинам примут вид

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\hat{\sigma}_{rr} - \hat{\sigma}_{\theta\theta}}{1 - \hat{\sigma}_e}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{\hat{\sigma}_{\theta\theta} - \hat{\sigma}_{rr}}{1 - \hat{\sigma}_e}, \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = \frac{2\hat{\sigma}_{r\theta}}{1 - \hat{\sigma}_e}. \quad (2.9)$$

В дальнейшем для краткости знак $\hat{}$ опускается.

3. Асимптотическое решение

Для материала, следующего дробно-линейному закону ползучести, вновь можно искать поле напряжений вблизи устья трещины в виде асимптотического разложения

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_{ij}^{(0)}(\theta) + r^\alpha \sigma_{ij}^{(1)}(\theta) + \dots, \quad \sigma_e(r, \theta) = 1 - r^\alpha \sigma^{(1)}(\theta) + \dots \quad (3.1)$$

Тогда для определения функций $\sigma_{ij}^{(0)}(\theta)$ имеется система уравнений, следующая из двух уравнений равновесия и условия предельного состояния. Для функций $\sigma_{ij}^{(0)}(\theta)$ формулируется, таким образом, краевая задача, аналогичная статически определимой задаче теории идеальной пластичности. Приведем точные формулы, задающие поле напряжений в окрестности вершины трещины смешанного типа в предположении реализации плоского деформированного состояния для характерных значений параметра M^p .

Для значения $M^p = 1/4$ распределение напряжений в окрестности вершины трещины определяется выражениями:

$$\begin{cases} -\pi = \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 = -3\pi/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \\ \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3 = -120.89^\circ, \quad \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4 = -30.89^\circ, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2 \left(\theta - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right), \end{array} \right. \quad (3.2) \\ \left\{ \begin{array}{l} \theta_4 \leq \theta \leq \theta_5 = 42.75^\circ, \quad \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \theta_5 \leq \theta \leq \theta_6 = 133.87^\circ, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -\theta_5 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta_5 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2 \left(\theta - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right). \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \theta_6 \leq \theta \leq \theta_7 = \pi \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \end{array} \right. \end{cases}$$

Видно, что поле напряжений состоит из семи областей (секторов), внутри которых компоненты тензора напряжений определяются различными функциональными зависимостями. Границы введенных секторов находятся численно из решения системы трансцендентных уравнений, выражающих условия непрерывности компонент $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ через линии раздела секторов. Можно провести сравнение приближенного аналитического решения с численным решением задачи для материала, следующего степенному закону

Бейли – Нортон теория установившейся ползучести в предельном случае, когда показатель нелинейности материала неограниченно возрастает. Поле напряжений (3.2) иллюстрирует рис. 3.1, где сплошные линии показывают точное аналитическое решение, в то время как крестики соответствуют численному решению задачи для степенного закона теории установившейся ползучести в предельном случае, когда показатель нелинейности стремится к бесконечности. В ходе численного счета полагалось, что $n = 300$.

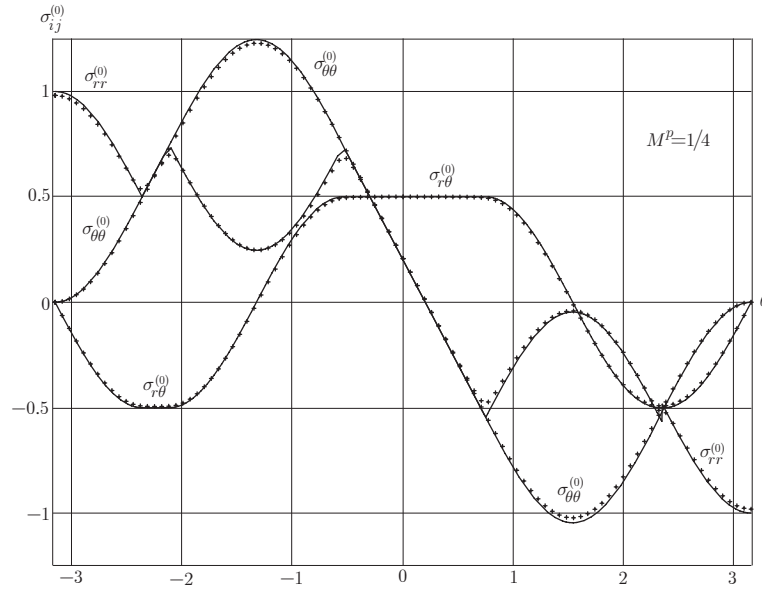


Рис. 3.1. Угловое распределение компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины для значения $M^p = 1/4$

Для значения $M^p = 1/2$ распределение напряжений в окрестности вершины трещины определяется выражениями:

$$\begin{cases} -\pi = \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 = -3\pi/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \\ \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3 = -\frac{5\pi}{8}, \quad \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2}, \\ \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4 = -\frac{\pi}{8}, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2 \left(\theta - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right), \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_4 \leq \theta \leq \theta_5 = 51.15^\circ, \quad \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta + \frac{1}{2}, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2}, \\ \theta_5 \leq \theta \leq \theta_6 = 138.07^\circ, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -\theta_5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right), \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta_5 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2 \left(\theta - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right), \\ \theta_6 \leq \theta \leq \theta_7 = \pi, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \end{array} \right.$$

Поле напряжений (3.3) иллюстрирует рис. 3.2, где сплошные линии показывают точное аналитическое решение, в то время как крестики соответствуют численному решению задачи для степенного закона теории установившейся ползучести в предельном случае, когда показатель нелинейности стремится к бесконечности. В ходе численного счета полагалось, что $n = 300$.

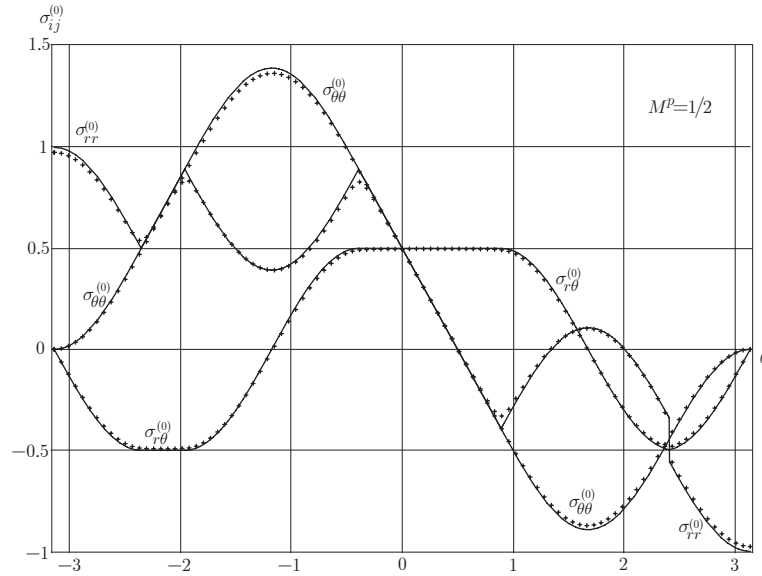


Рис. 3.2. Угловое распределение компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины для значения $M^p = 1/2$

Для значения $M^p = 3/4$ распределение напряжений в окрестности вершины трещины определяется выражениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\pi = \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 = -3\pi/4, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \\ \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3 = -92.24^\circ, \quad \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_3 \leq \theta \leq \theta_4 = -2.24^\circ, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2 \left(\theta - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right), \end{array} \right. \quad (3.4)$$

$$\left\{ \theta_4 \leq \theta \leq \theta_5 = 71.89^\circ, \quad \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2}, \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_5 \leq \theta \leq \theta_6 = 148.44^\circ, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -\theta_5 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta_5 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2 \left(\theta - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_6 \leq \theta \leq \theta_7 = \pi, \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \end{array} \right.$$

Поле напряжений (3.6) изображено на рис. 3.3.

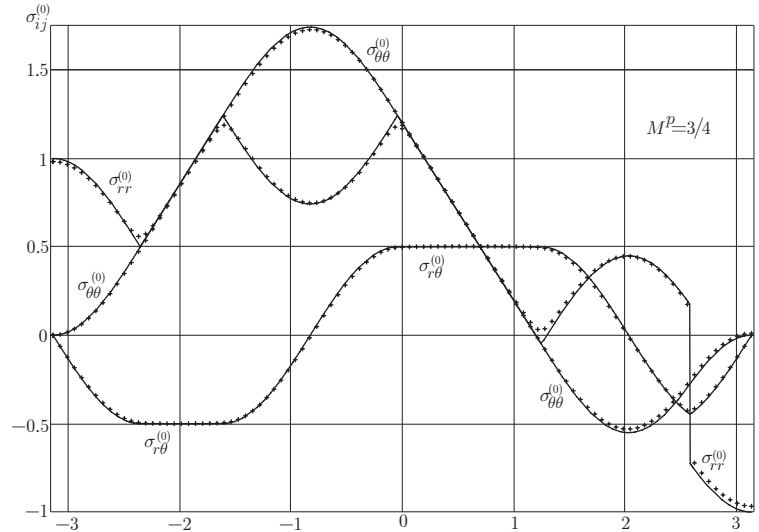


Рис. 3.3. Угловое распределение компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины для значения $M^P = 3/4$

Анализ полученных распределений напряжений позволяет заключить, что поле напряжений имеет в каждом из трех случаев одинаковую струк-

туру и, обобщая результаты, можно представить напряженное состояние в окрестности вершины трещины для любого значения параметра M^p :

$$\begin{cases}
-\pi = \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 = -3\pi/4, \\
\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \\
\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3, \quad \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2}, \\
\begin{cases}
\theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, \\
\sigma_{rr}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right), \\
\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right), \\
\sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2 \left(\theta - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right),
\end{cases} \\
\theta_4 \leq \theta \leq \theta_5, \quad \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} M^p \right), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2}, \\
\begin{cases}
\theta_5 \leq \theta \leq \theta_6, \\
\sigma_{rr}^{(0)} = -\theta_5 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} M^p \right) + \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right), \\
\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\theta_5 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} M^p \right) - \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right), \\
\sigma_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} \sin 2 \left(\theta - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right),
\end{cases} \\
\theta_6 \leq \theta \leq \theta_7 = \pi, \\
\sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta,
\end{cases} \tag{3.6}$$

где углы $\theta_3, \theta_4, \theta_5$ и θ_6 определяются из решения следующих двух систем трансцендентных уравнений:

$$\begin{cases}
-\theta_4 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} M^p \right) = \theta_3 + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta_4 - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right), \\
\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin 2 \left(\theta_4 - \theta_3 + \frac{3\pi}{4} \right)
\end{cases} \tag{3.7}$$

и

$$\begin{cases}
-\theta_5 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} M^p \right) - \frac{1}{2} \cos 2 \left(\theta_6 - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_6, \\
-\frac{1}{2} \sin 2 \left(\theta_6 - \theta_5 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \sin 2\theta_6.
\end{cases} \tag{3.8}$$

Легко проверить, что в случае, когда $M^p = 1/4$, решение системы уравнений (3.7) имеет вид (в радианах)

$$\theta_3 = -2.109942018, \quad \theta_4 = -0.5391456909;$$

решение системы (3.8) –

$$\theta_5 = 0.7462474719, \quad \theta_6 = 2.33661944.$$

При $M^p = 3/4$ решение системы уравнений (3.7) имеет вид (в радианах)

$$\theta_3 = -1.609942018, \quad \theta_4 = -0.03914569101;$$

решение системы (3.8) –

$$\theta_5 = 1.254775622, \quad \theta_6 = 2.590883219.$$

Сравним полученное решение с полем напряжений в окрестности вершины для материала, подчиняющегося степенному закону, связывающему деформации и напряжения $\dot{\epsilon}_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2$, где B, n – постоянные материала, в предельном случае, когда $n \rightarrow \infty$, что соответствует идеально пластическому материалу. В соответствии с подходом, реализованным в [16–19] решение разыскивается в виде $\sigma_{ij}(r, \theta) = Kr^{-1/(n+1)}f_{ij}(\theta)$, и для получения угловых распределений компонент тензора напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений (или одно нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, если использовать функцию напряжений Эри). Устремляя n к бесконечности (в ходе численного счета обычно полагают $n = 100, 300, 500$), можно получить уже другим способом угловые распределения компонент тензора напряжений (на рис. 3.1 – 3.3 точки, полученные в результате численного анализа, показаны знаком ”плюс”). Сравнение полученных угловых распределений компонент тензора напряжений показывает, что две схемы построения поля напряжений приводят к одному и тому же результату, что служит подтверждением достоверности найденного поля напряжений (3.6).

4. Поле скоростей деформаций

В силу определяющих уравнений задачи и найденного распределения напряжений (3.5) поле скоростей деформаций ползучести задается асимптотическими выражениями

$$\begin{aligned} -\pi = \theta_1 < \theta < \theta_2, & \quad \dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\cos 2\theta}{r^\alpha \sigma_1^{(1)}}, & \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = -\frac{\sin 2\theta}{r^\alpha \sigma_1^{(1)}}, \\ \theta_2 < \theta < \theta_3, & \quad \dot{\epsilon}_{rr} = 0, & \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = -\frac{1}{r^\alpha \sigma_2^{(1)}}, \\ \theta_3 < \theta < \theta_4, & \quad \dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\cos 2\vartheta}{r^\alpha \sigma_3^{(1)}}, \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = -\frac{\sin 2\vartheta}{r^\alpha \sigma_3^{(1)}}, & \quad \vartheta = \theta - \theta_3 + \pi/4, \\ \theta_4 < \theta < \theta_5, & \quad \dot{\epsilon}_{rr} = 0, & \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = \frac{1}{r^\alpha \sigma_4^{(1)}}, \\ \theta_5 < \theta < \theta_6, & \quad \dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\cos 2\vartheta}{r^\alpha \sigma_5^{(1)}}, \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = -\frac{\sin 2\vartheta}{r^\alpha \sigma_5^{(1)}}, & \quad \vartheta = \theta - \theta_5 - \pi/4, \end{aligned}$$

$$\theta_6 < \theta < \pi, \quad \dot{\epsilon}_{rr} = -\frac{\cos 2\theta}{r^\alpha \sigma_6^{(1)}}, \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = \frac{\sin 2\theta}{r^\alpha \sigma_6^{(1)}}.$$

Для определения неизвестного показателя α можно, во-первых, обратиться к известным решениям задач исследования напряженно-деформированного состояния вблизи вершин трещин нормального отрыва и поперечного сдвига в материале с дробно-линейной моделью ползучести, в ходе решения которых установлено, что в секторах, где $\dot{\epsilon}_{rr} = 0$, условие совместности деформаций выполняется при любой функции $\sigma_k^{(1)}$, если $\alpha = 1$. В силу этого хотя бы в одном из двух секторов в рассматриваемом решении, где удовлетворяется данное условие, показатель сингулярности скоростей деформаций ползучести α должен быть равен единице. Во-вторых, угловые распределения компонент тензора скоростей деформаций ползучести, полученные для степенного закона ползучести, приведенные на рис. 4.1–4.3, ясно указывают на то, что в двух секторах: $\theta_2 < \theta < \theta_3$ и $\theta_4 < \theta < \theta_5$ показатель сингулярности равен единице, тогда как в остальных областях сингулярности поля скоростей деформаций меньше единицы. Проводя аналогию с ранее полученными решениями для чистого растяжения и чистого сдвига образца с трещиной, можно заключить, что при $-\pi < \theta < \theta_2$, $\theta_3 < \theta < \theta_4$, и $\theta_5 < \theta < \pi$ показатель сингулярности поля скоростей деформаций равен $1/2$.

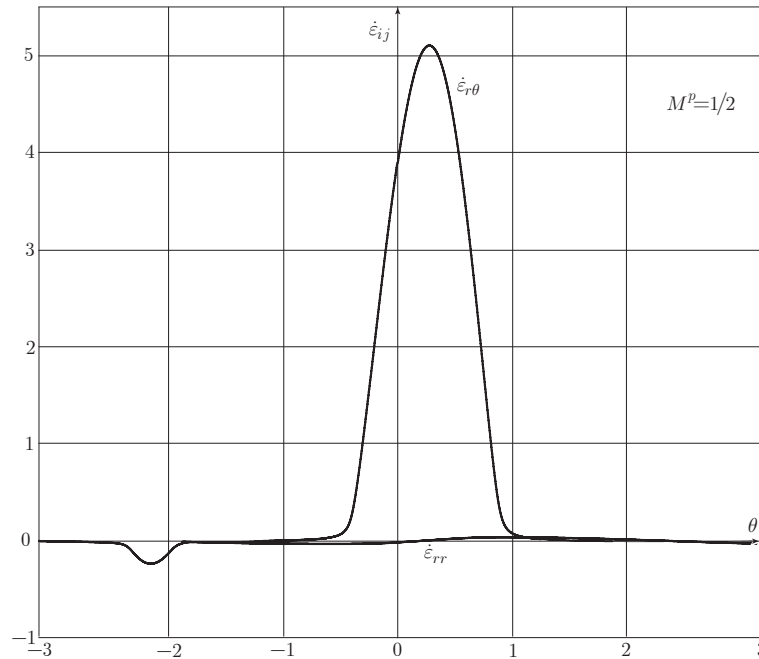


Рис. 4.1. Угловое распределение компонент тензора скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины для $M^p = 1/2$

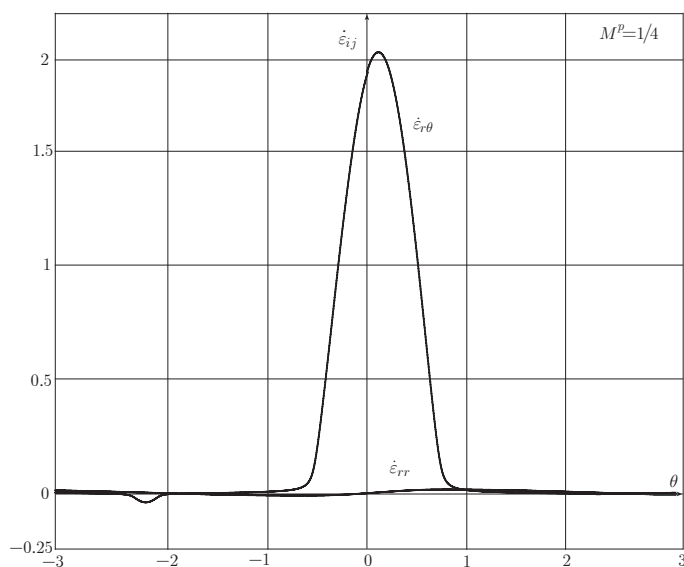


Рис. 4.2. Угловое распределение компонент тензора скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины для $M^p = 1/4$

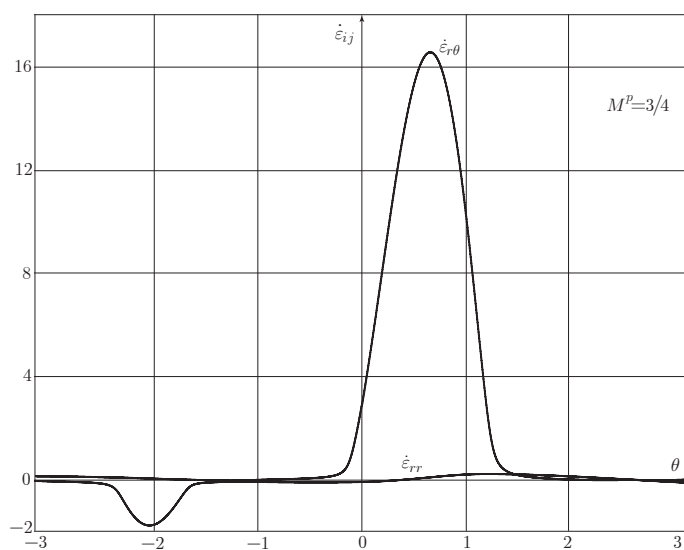


Рис. 4.3. Угловое распределение компонент тензора скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины для $M^p = 3/4$

Итоговое поле скоростей деформаций ползучести вблизи вершины трещины в условиях смешанного нагружения имеет вид

$$\begin{aligned}
 -\pi = \theta_1 < \theta < \theta_2, & \quad \dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\cos 2\theta}{r^{1/2}\sigma_1^{(1)}}, & \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = -\frac{\sin 2\theta}{r^{1/2}\sigma_1^{(1)}}, \\
 \theta_2 < \theta < \theta_3, & \quad \dot{\epsilon}_{rr} = 0, & \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = \frac{f_1(\theta)}{r},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3 < \theta < \theta_4, \quad \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\cos 2\vartheta}{r^{1/2}\sigma_3^{(1)}}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = -\frac{\sin 2\vartheta}{r^{1/2}\sigma_3^{(1)}}, \quad \vartheta = \theta - \theta_3 + \pi/4, \\
\theta_4 < \theta < \theta_5, \quad \dot{\varepsilon}_{rr} &= 0, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{f_2(\theta)}{r}, \\
\theta_5 < \theta < \theta_6, \quad \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\cos 2\vartheta}{r^{1/2}\sigma_5^{(1)}}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = -\frac{\sin 2\vartheta}{r^{1/2}\sigma_5^{(1)}}, \quad \vartheta = \theta - \theta_5 - \pi/4, \\
\theta_6 < \theta < \pi, \quad \dot{\varepsilon}_{rr} &= -\frac{\cos 2\theta}{r^{1/2}\sigma_6^{(1)}}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{\sin 2\theta}{r^{1/2}\sigma_6^{(1)}}.
\end{aligned}$$

Полученное решение позволяет пролить свет на поле деформаций у устья трещины в идеально пластическом материале, поскольку условие наступления предельного состояния аналогично условию наступления пластического течения Мизеса. В отличие от задач теории идеальной пластичности при определении кинематики пластического течения в окрестности вершины трещины, когда можно отыскать лишь некоторые характерные особенности поля деформаций, в рамках настоящего подхода удастся определить поле скоростей в каждом из секторов.

5. Сращивание ближнего и дальнего полей напряжений с помощью инвариантного интеграла

Для сращивания решения, описывающего поля напряжений и скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины, и дальних полей напряжений и скоростей деформаций можно воспользоваться инвариантным C^* -интегралом [18]:

$$C^* = \int_{\Gamma} W^* dx_2 - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial x_1} ds. \quad (5.1)$$

Выбирая в качестве контура интегрирования окружность радиуса r , охватывающую вершину трещины, можно получить

$$C^* = r \int_{-\pi}^{\pi} \left[W \cos \theta - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \right] d\theta. \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
C^* = r \int_{-\pi}^{\pi} \{ & W^* \cos \theta - \sigma_{rr} [\dot{\varepsilon}_{rr} \cos \theta - (\dot{\varepsilon}_{r\theta} - \dot{\omega}) \sin \theta] - \\
& - \sigma_{r\theta} [(\dot{\varepsilon}_{r\theta} + \dot{\omega}) \cos \theta - \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} \sin \theta] \} d\theta, \quad (5.3)
\end{aligned}$$

где

$$\dot{\omega} = (1/r)v_{\theta} + (\partial v_{\theta}/\partial r) - (1/r)(\partial v_r/\partial \theta), \quad W^* = \dot{\varepsilon} - \ln(1 + \dot{\varepsilon}).$$

При $r \rightarrow 0$, $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$ в соответствии с найденным решением C^* -интеграл определяется равенством

$$\begin{aligned}
 C^* &= r \int_{\theta_2}^{\theta_3} [W^* \cos \theta + \sigma_{rr} \dot{\varepsilon}_{r\theta} \sin \theta] d\theta + r \int_{\theta_4}^{\theta_5} [W^* \cos \theta + \sigma_{rr} \dot{\varepsilon}_{r\theta} \sin \theta] d\theta = \\
 &= r \int_{\theta_2}^{\theta_3} [\dot{\varepsilon} \cos \theta + \sigma_{rr} \dot{\varepsilon}_{r\theta} \sin \theta] d\theta + r \int_{\theta_2}^{\theta_3} [\dot{\varepsilon} \cos \theta + \sigma_{rr} \dot{\varepsilon}_{r\theta} \sin \theta] d\theta = \\
 &= \int_{\theta_2}^{\theta_3} f_1(\theta) (\cos \theta + \sigma_{rr} \sin \theta) d\theta + \int_{\theta_4}^{\theta_5} f_2(\theta) (\cos \theta + \sigma_{rr} \sin \theta) d\theta = \quad (5.4) \\
 &= \int_{\theta_2}^{\theta_3} f_1(\theta) \left[\cos \theta + \left(\theta + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \right) \sin \theta \right] d\theta + \\
 &+ \int_{\theta_4}^{\theta_5} f_2(\theta) \left[\cos \theta + \left(-\theta + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(M^p \frac{\pi}{2} \right) \right) \sin \theta \right] d\theta.
 \end{aligned}$$

Проведенная операция сращивания позволяет построить зоны ползучести у вершины трещины (рис. 5.1).

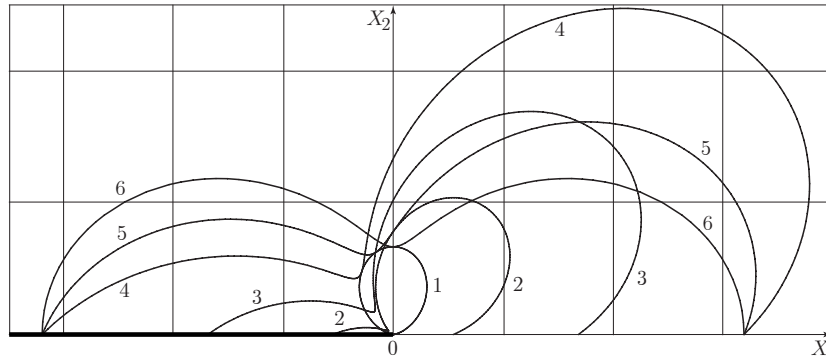


Рис. 5.1. Конфигурации областей ползучести. Кривая 1 соответствует области ползучести в условиях нормального растяжения, кривая 2 построена для $M^{lv} = 3/4$, кривая 3 - $M^{lv} = 0.6$, 4 - $M^{lv} = 0.5$, 5 - $M^{lv} = 1/4$, кривая, обозначенная цифрой 6, отвечает чистому сдвигу

Выводы

В настоящем исследовании получено приближенное аналитическое решение задачи о трещине, находящейся под действием растяжения и поперечного сдвига, в материале, подчиняющемся дробно-линейному закону теории установившейся ползучести в условиях плоской деформации. Найдены поля

напряжений и скоростей деформаций ползучести у вершины трещины в образце, подвергнутом смешанному нагружению (отрыв и поперечный сдвиг) при различных значениях коэффициента смешанности нагружения, определяющего вид нагружения. Показано, что поле напряжений состоит из семи клинообразных областей, внутри которых компоненты тензора напряжений определяются различными функциональными зависимостями. Границы секторов находятся численно из решения системы трансцендентных уравнений. Приведено сравнение приближенного аналитического решения с численным решением задачи для материала, следующего степенному закону ползучести в предельном случае, когда показатель нелинейности материала неограниченно возрастает. Для сравнения построены угловые распределения компонент тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести в материале со степенным законом для различных значений показателя нелинейности материала. Аналитическое и численное решения совпадают, что подтверждает достоверность результатов. В отличие от задач теории идеальной пластичности при определении кинематики пластического течения у вершины трещины, когда можно отыскать лишь некоторые характерные особенности поля деформаций, в рамках настоящего подхода удастся определить поле скоростей деформаций в каждом из секторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-99023).

Литература

- [1] Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
- [2] Шестериков, С.А. Конкретизация уравнений состояния в теории ползучести / С.А. Шестериков, М.А. Юмашева // Изв. АН СССР. МТТ. — 1984. — №1. — С. 86-92.
- [3] Шестериков, С.А. О длительной прочности / С.А. Шестериков, С.Ю. Лебедев, М.А. Юмашева // Проблемы механики сплошной среды. К 60-летию со дня рождения В.П. Мясникова. Владивосток: Изд-во ИАПУ ДВО РАН. — 1996. — С. 80-85.
- [4] Аршакуни, А.Л. Прогнозирование длительной прочности жаропрочных металлических материалов / А.Л. Аршакуни, С.А. Шестериков // Изв. РАН. МТТ. — 1994. — №3. — С. 126-141.
- [5] Аршакуни, А.Л. Прогнозирование длительной прочности металлов / А.Л. Аршакуни // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — №6. — С. 126-135.
- [6] Локощенко, А.М. Анализ критериев длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии / А.М. Локощенко, В.В. Назаров, Д.О. Платонов [и др.] // Изв. РАН. МТТ. — 2003. — №2. — С. 139-149.

- [7] Кашелкин, В.В. Метод прогнозирования длительной прочности хромоникелевых аустенитных сталей / В.В. Кашелкин, И.А. Кузнецова, С.А. Шестериков // Изв. РАН. МТТ. — 2004. — №1. — С. 182-187.
- [8] Шестериков, С.А. Анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях ползучести / С.А. Шестериков, Л.В. Степанова // Изв. РАН. МТТ. — 1995. — №1. — С. 96-103.
- [9] Астафьев, В.И. Асимптотика напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях ползучести / В.И. Астафьев, Л.В. Степанова, С.А. Шестериков // Вестник СамГУ. Спец. выпуск. — 1995. — С. 59-64.
- [10] Астафьев, В.И. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины для мелко-линейного закона ползучести / В.И. Астафьев, Л.В. Степанова // Вестник СамГУ. — 1997. — №2. — С. 135-141.
- [11] Бойл, Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Дж. Бойл, Дж. Спенс. — М.: Мир, 1986.
- [12] Pan, J. Analytical solutions for crack-tip sectors in perfectly plastic Mises materials under mixed in-plane and out-of-plane shear loading conditions / J. Pan, P. C. Lin // Engng. Fracture Mechanics. — 2006. — V. 73. — P. 1797-1813.
- [13] Rahman, M. Elastic perfectly-plastic asymptotic mixed mode crack tip fields in plane stress / M. Rahman, J.W. Hancock // Int. J. Solids and Structures. — 2006. — V. 43. — P. 3692-3704.
- [14] Suresh, S. B. Fatigue of material / S.B. Suresh. — Cambridge: Cambridge University Press, 1991. — 573 p.
- [15] Shih, C.F. Small-scale yielding analysis of mixed-mode plane strain crack problems / C. F. Shih // Fracture Analysis. — 1974. — 560. — P. 187-210.
- [16] Rice, J.R. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material / J.R. Rice, G.F. Rosengren // J. Mech. Phys. Solids. — 1968. — V. 16. — №1. — P.1-12.
- [17] Hutchinson, J.W. Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material / J.W. Hutchinson // J. Mech. Phys. Solids. — 1968. — V. 16. — P. 13-31.
- [18] Астафьев, В.И. Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова. — Самара: Изд-во "Самарский университет", 2001. — 632 с.
- [19] Степанова, Л.В. Математические методы механики разрушения / Л.В. Степанова. — Самара: Изд-во "Самарский университет", 2006. — 232 с.

Поступила в редакцию 9/II/2009;
в окончательном варианте — 9/II/2009.

**COMBINED MODE LOADING (NORMAL TRACTURE
MODEL AND IN-PLANE SHEAR)
OF THE ELEMENT OF CONSTRUCTION WITH IN A
MATERIAL WITH THE LINEAR-FRACTIONAL CREEP
PRINCIPLE**

© 2009 L.V. Stepanova, T.B. Elekina ²

Approximate solution of the task about the crack, under synchronizing action of tensile and shearing loading, in the material, submitting to linear-fractional creep principle in the supposition of realization of plane deformation state is presented. Analytical solution of the task of defining strained deformation state in close proximity to the tip of the crack in the specimen under synchronizing action of tensile and shearing loading for different in value of the coefficient of the heterogeneity of loading, defining the sort of loading is found. It is shown that the stress field consists of six sectors inside of which the components of stress tensor are defined by different functional dependency. The boundaries of the sectors introduced are found numerically from the solution of the system of transcendental equations. The comparison of the approximate analytical solution with the numerical solution of the task for the material, sequent to the staid law of Bail Norton of the linear-fractional creep principle in the extreme case in the extreme case, when the index of non-linearity of the material ultimately grows is given.

Key words and phrases: combined mode loading, coefficient of the heterogeneity of loading, strained deformation state in close proximity to the tip of the crack, linear — fractional creep principle.

Paper received 9/II/2009.

Paper accepted 9/II/2009.

²Stepanova Larisa Valentinovna, Elekina Tatjana Borisovna (1st@ssu.samara.ru), Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, 443011, Russia.

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2008 Л.В. Яхно¹

Для системы плоской идеальной пластичности среды Мизеса рассматривается принцип суперпозиции решений. Для этой системы выписано новое точное решение как суперпозиция известных решений Прандтля для сжимаемого слоя и решения для равномерно нагруженного кругового отверстия. Обсуждается механический смысл полученного решения.

Ключевые слова: принцип суперпозиций, среда Мизеса.

1. Принцип суперпозиции решений

Известно [1], что система квазилинейных однородных уравнений двух функций от двух независимых переменных:

$$\begin{aligned} a_{11}(u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12}(u_1, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + b_{11}(u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial y} + b_{12}(u_1, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0, \\ a_{21}(u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22}(u_1, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + b_{21}(u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial y} + b_{22}(u_1, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

может быть линеаризована преобразованием годографа

$$T : x = x(u_1, u_2), \quad y = y(u_1, u_2),$$

в области, где якобиан соответствующего преобразования

$$\Delta = \partial(u_1, u_2) / \partial(x, y)$$

отличен от нуля. Это преобразование меняет ролью неизвестные функции и независимые переменные. В результате система (1.1) сводится к линейной системе:

$$\begin{aligned} b_{12} \frac{\partial x}{\partial u_1} - b_{11} \frac{\partial x}{\partial u_2} - a_{12} \frac{\partial y}{\partial u_1} + a_{11} \frac{\partial y}{\partial u_2} &= 0, \\ b_{22} \frac{\partial x}{\partial u_1} - b_{21} \frac{\partial x}{\partial u_2} - a_{22} \frac{\partial y}{\partial u_1} + a_{21} \frac{\partial y}{\partial u_2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Назовем любое решение системы (1.1)

$$U = (u_1(x, y), u_2(x, y))$$

¹Яхно Лилия Владимировна (iakhno@kgtei.ru), Сибирский государственный аэрокосмический университет, 660014, Россия, г. Красноярск, пр. газ. Красноярский рабочий, 31.

неособым, если его преобразование в соответствующее решение

$$\chi = T(U) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2))$$

линейной системы (1.2) является невырожденным.

Линейная система (1.2) допускает бесконечномерную группу симметрий в силу принципа суперпозиции решений для линейных систем. Соответствующий оператор имеет следующий вид:

$$X = \xi(u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1.3)$$

где (ξ, η) — произвольное решение системы (1.2). Этот оператор порождает однопараметрическую группу точечных преобразований:

$$x' = x + a\xi, \quad y' = y + a\eta, \quad (1.4)$$

где $a \in \mathbb{R}$ — групповой параметр.

Пусть $\chi_1 = (x_1(u_1, u_2), y_1(u_1, u_2))$ и $\chi_2 = (x_2(u_1, u_2), y_2(u_1, u_2))$ два решения линейной системы (1.2), которые определяют соответственно два решения U^1 и U^2 квазилинейной системы (1.1).

Возьмем коэффициенты оператора (1.3) как разницу двух решений χ_1 и χ_2 :

$$\xi = x_1 - x_2, \quad \eta = y_1 - y_2,$$

тогда в силу (1.4) имеем:

$$\begin{aligned} x &= x'(u_1, u_2) = x_2 + a\xi = ax_1(u_1, u_2) + (1-a)x_2(u_1, u_2), \\ y &= y'(u_1, u_2) = y_2 + a\eta = ay_1(u_1, u_2) + (1-a)y_2(u_1, u_2), \end{aligned} \quad (1.5)$$

что также является решением системы (1.2) как линейной комбинации двух решений. С другой стороны, формулы (1.5) неявно определяют семейство решений вида $(u_1(x, y, a), u_2(x, y, a))$ для системы (1.1). Заметим, что при $a = 1$ решение (1.5) совпадает с решением U^1 ; при $a = 0$ — с U^2 .

Система (1.1) автоморфна относительно группы (1.4). Это означает, что любое неособое решение системы (1.1) может быть преобразовано в другое неособое решение этой же системы посредством допускаемой группы точечных преобразований. Этот факт позволяет связать между собой любые два решения U^1, U^2 квазилинейной системы (1.1), которые могут быть представлены в виде χ_1, χ_2 .

2. Плоская пластичность

Теперь построим семейство новых аналитических решений для системы уравнений плоской идеальной пластичности среды Мизеса [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где σ – гидростатическое давление, $\theta + \pi/4$ – угол между главным направлением тензора напряжений и осью ox .

Данная система является гиперболической и имеет два семейства характеристик, удовлетворяющие уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{\sigma}{2k} - \theta = \operatorname{const} = \alpha, \\ \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{ctg} \theta, \quad \frac{\sigma}{2k} + \theta = \operatorname{const} = \beta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В математической теории пластичности характеристические кривые известны как линии скольжения. Вдоль первого семейства линий скольжения значение переменной α постоянно. Вдоль линий второго семейства постоянно значение β .

Соответствующая линеаризованная система (1.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \theta} - 2k \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \cos 2\theta + \frac{\partial y}{\partial \sigma} \sin 2\theta \right) &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} - 2k \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma} \sin 2\theta - \frac{\partial y}{\partial \sigma} \cos 2\theta \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Оператор (1.3) имеет вид [3]

$$X = \xi(\sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(\sigma, \theta) \frac{\partial}{\partial y},$$

где (ξ, η) – произвольное решение системы (2.3).

Рассмотрим хорошо известное решение Прандтля [4], описывающее напряженное состояние тонкого слоя, сжимаемого параллельными шероховатыми плитами. В терминах функций σ , θ это решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma &= -p_1 - k \frac{x}{h} + k \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}, \\ y &= h \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $2h$ – постоянная толщина слоя. Прямые $y = \pm h$ являются границами плит, p_1 – постоянное значение гидростатического давления на границе слоя при $x = 0$.

Другое известное точное решение [2] описывает пластическое состояние вокруг кругового отверстия радиуса R , нагруженного равномерно распределенным давлением $p_2 = \operatorname{const}$ в отсутствие касательного напряжения:

$$\begin{aligned} \theta &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{\pi}{4} = \phi + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma &= -p_2 + k + k \ln \frac{x^2 + y^2}{R^2} = -p_2 + k + k \ln \frac{r^2}{R^2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

здесь r , ϕ – полярные координаты.

Соответствующие решения χ_1 , χ_2 линейной системы (2.3) будут равны:

$$\begin{aligned} x_1(\sigma, \theta) &= -\sigma \frac{h}{k} - p_1 \frac{h}{k} - h \sin 2\theta, \\ y_1(\sigma, \theta) &= h \cos 2\theta \end{aligned}$$

для решения Прандтля и

$$\begin{aligned} x_2(\sigma, \theta) &= \operatorname{Re} e^{\frac{p_2 - k}{2k}} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) e^{\frac{\sigma}{2k}}, \\ y_2(\sigma, \theta) &= \operatorname{Re} e^{\frac{p_2 - k}{2k}} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) e^{\frac{\sigma}{2k}} \end{aligned}$$

для кругового отверстия.

Используя соотношение (1.5), получим решение:

$$\begin{aligned} x &= a \left(-\sigma \frac{h}{k} - p_1 \frac{h}{k} - h \sin 2\theta \right) + (1-a) Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) e^{\frac{\sigma}{2k}}, \\ y &= ah \cos 2\theta + (1-a) Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) e^{\frac{\sigma}{2k}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Можно заметить, что при $a = 0$ в (2.6) имеем решение (2.5) с граничным условием

$$\begin{aligned} \theta|_{r=R} &= \phi + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma|_{r=R} &= -p_2 + k, \end{aligned}$$

поэтому будем искать граничную линию для решения (2.6), полагая

$$\sigma = -p_1 + k, \quad \theta = \phi + \pi/4 \quad (2.7)$$

и переходя в полярные координаты. Тогда из второго соотношения (2.6) имеем:

$$r = -2ah \cos \phi + (1-a) Re^{\frac{p_2-p_1}{2k}}, \quad (2.8)$$

в то время как первое соотношение в (2.6) удовлетворяется тождественно. Следовательно, решение (2.6) удовлетворяет граничным условиям (2.7) вдоль границы (2.8), которая является улиткой Паскаля. Заметим, что, для того чтобы решение имело механическую интерпретацию, значение параметра a должно быть таким, чтобы улитка оставалась выпуклой.

Если в формулах (2.6) использовать α и β из (2.2), беря θ в качестве параметра, то получим уравнения характеристик. Так, полагая $\sigma = 2k(\alpha + \theta)$, получим первое семейство характеристик, заданное параметрическим уравнением:

$$\begin{aligned} x &= -ah \left(2(\alpha + \theta) + \frac{p_1}{k} + \sin 2\theta \right) + (1-a) Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) e^{\alpha+\theta}, \\ y &= ah \cos 2\theta + (1-a) Re^{\frac{p_2-k}{2k}} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) e^{\alpha+\theta}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Придавая различные значения постоянной α , получим различные характеристики первого семейства.

На рис. 2.1 изображены два семейства характеристик

$$\phi = \theta - \frac{\pi}{4}, \quad r = R \exp \left(\pm \theta + \frac{p_2 - k}{2k} + C_i \right),$$

для решения (2.5) при $p_2 = k$ для круглого отверстия радиуса $R = 2$. Деформированные линии скольжения (2.9) представлены на рис. 2.2 для улитки Паскаля ($h = 1, p_1 = p_2$).

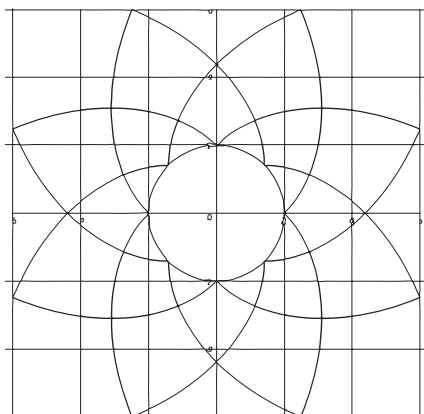


Рис. 2.1. Начальные линии скольжения (логарифмические спирали) решения для кругового отверстия

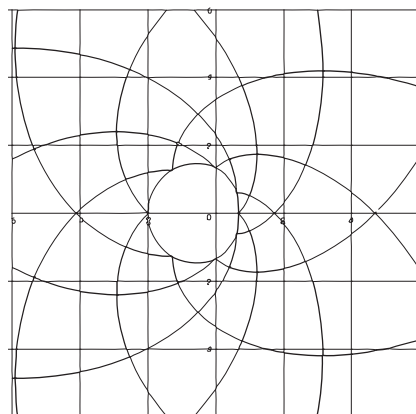


Рис. 2.2. Преобразованные линии скольжения решения для улитки Паскаля

Заключение

Принцип суперпозиции решений системы плоской идеальной пластичности среды Мизеса (2.1) формулируется с использованием допускаемого оператора симметрии. Для двух известных решений — решения Прандтля и решения для кругового отверстия — выписывается семейство новых аналитических решений. Основным результатом состоит в использовании допускаемой точечной симметрии для преобразования характеристик. Это позволяет эффективно определить подходящие граничные условия для полученного семейства решений.

Автор выражает глубокую благодарность С.И. Сенашову за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Литература

- [1] Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. — М.: Наука, 1968. — 687 с.
- [2] Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
- [3] Senashov, S.I. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity / S.I. Senashov, A.M. Vinogradov // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1988. (2). — V. 3. — №3. — P. 415–439.
- [4] Hill, R. The mathematical theory of plasticity / R. Hill. — Oxford: Calderon press, 1950.

Поступила в редакцию 25/XII/2008;
в окончательном варианте — 25/XII/2008.

PRINCIPLE OF SUPERPOSITION OF SOLUTIONS FOR THE PROBLEM OF PLANE PLASTICITY

© 2009 L.V. Yakhno²

The principle of superposition of solutions for the system of plane ideal plasticity of Mises media is considered. A new exact solution as a superposition of foregone Prandtl conclusions for collapsed strata and the solution for uniformly loaded circular aperture is issued. The mechanical sense of the obtained solution is discussed.

Key words and phrases: principle of superposition, Mezis medium.

Paper received 25/*XII*/2008.

Paper accepted 25/*XII*/2008.

²Yakhno Liliya Vladimirovna (iakhno@kgtei.ru), Siberian Aerospace State University, Krasnoyarsk, 660014, Russia.