МАТЕМАТИКА

УДК 511.29

О МАКСИМАЛЬНОМ МНОЖЕСТВЕ БЕЗ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ[1]

© 2009 Е.П. Давлетярова,[2] А.А. Жукова,[3] А.А. Юдин[4]

В работе найдены верхняя и нижняя границы для мощности подмножества дискретного тора над полем из трех элементов, никакие четыре различные точки которого не образуют невырожденного параллелограмма.

Ключевые слова: конечные поля, дискретный тор, тригонометрические суммы.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим n-мерное векторное пространство над полем из трех элементов $\mathbb{F}_3^n$. Одной из задач аддитивной теории чисел является изучение подмножеств этого пространства, не содержащих нетривиальных решений некоторого линейного уравнения. Этой задаче посвящены, например, работы [1–6]. Филдсовский лауреат Т. Тао в своей книге [7] отметил главную нерешенную проблему, связанную с такими задачами: огромный разрыв между верхними и нижними оценками мощности изучаемого множества.

В настоящей работе рассматривается множество $P \subset \mathbb{F}_3^n$, не содержащее нетривиальных решений уравнения $a_1 - a_2 = a_3 - a_4$. Геометрический смысл данного уравнения заключается в том, что соответствующие 4 точки являются вершинами невырожденного параллелограмма. Для мощности множества P описанной структуры найдена следующая оценка: для любого

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №07-01-00118-а

[2]Давлетярова Елена Петровна (dep@vladggu.ru), кафедра информатики и вычислительной техники Владимирского государственного гуманитарного университета, 600024, Россия, г. Владимир, пр. Строителей, 11.

[3]Жукова Алла Адольфовна (alla@vladggu.ru), кафедра математического анализа Владимирского государственного гуманитарного университета.

[4]Юдин Александр Александрович (aayudin@vladggu.ru), кафедра геометрии и методики преподавания математики Владимирского государственного гуманитарного университета.

$\varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon)$ такое, что

$$\sqrt[3]{2} \cdot 3^{n/3} \leqslant P(n) \leqslant \sqrt[3]{2+\varepsilon} \cdot 3^{n/3},$$

где $P(n) = \max\limits_{P \subset \mathbb{F}_3^n} card(P)$. Таким образом, впервые найден точный порядок роста для подобного класса множеств.

2. Некоторые факты геометрии пространства $\mathbb{F}_3^n$

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — произвольные элементы пространства $\mathbb{F}_3^n$. Будем говорить, что $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ образуют параллелограмм, если при подходящей перестановке σ на множестве из четырех элементов $\{1,2,3,4\}$ выполнено равенство $a_{\sigma 1} - a_{\sigma 2} = a_{\sigma 3} - a_{\sigma 4}$.

Параллелограмм будем называть невырожденным, если a_1, a_2, a_3, a_4 различны.

Пусть a_1, a_2, a_3 – произвольные элементы пространства $\mathbb{F}_3^n$. Будем говорить, что они образуют прямую, заданную уравнением $x_i = a_1 + (a_3 - a_2)t$, где $i = 1,2,3$, $t = 0,1,2$, если $a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$.

Две прямые l_1, l_2 пространства $\mathbb{F}_3^n$ назовем параллельными, если для образующих их точек a_1, a_2, $a_3 \in l_1$; b_1, b_2, $b_3 \in l_2$ при подходящем выборе α_1, $\alpha_2 \in \{1,2,3\}$, β_1, $\beta_2 \in \{1,2,3\}$ выполнено соотношение $a_{\alpha_1} - a_{\alpha_2} \equiv b_{\beta_1} - b_{\beta_2} (\mathrm{mod}\, 3)$.

Пусть a_1, a_2 – произвольные элементы пространства $\mathbb{F}_3^n$. Разность $a_1 - a_2$ будем называть направлением. Заметим, что две разности $a_1 - a_2$ и $a_3 - a_4$ задают одно и то же направление, если $a_1 - a_2 \equiv a_3 - a_4 (\mathrm{mod}\, 3)$, где $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{F}_3^n$. Направление $a_2 - a_1$ будем считать противоположным для направления $a_1 - a_2$.

Лемма 1. *Любые четыре различные точки пространства $\mathbb{F}_3^n$, лежащие на двух параллельных прямых, образуют невырожденный параллелограмм.*

Доказательство. Пусть прямые l_1 и l_2, $l_1 \| l_2$ заданы уравнениями:

$$l_1 : x_i = a_i + p_i t,$$

$$l_2 : y_i = b_i + p_i t,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, $t = 0,1,2$. На прямой l_1 лежат две точки, координаты которых могут быть записаны так:

$$A_1\left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\right), \text{ где } x_i^1 = a_i + p_i t,$$

$$A_2\left(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2\right), \text{ где } x_i^2 = a_i + p_i (t+1).$$

Две точки на прямой l_2 можно выбрать тремя способами.

I способ:

$$B_1\left(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1\right), \text{ где } y_i^1 = b_i + p_i t,$$

$$B_2\left(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2\right), \text{ где } y_i^2 = b_i + p_i (t+1).$$

В этом случае мы получим четыре вектора: $\overrightarrow{A_1A_2}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $\overrightarrow{B_1B_2}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $\overrightarrow{A_1B_1}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$, $\overrightarrow{A_2B_2}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$, т. е. точки A_1, A_2, B_1, B_2 образуют невырожденный параллелограмм.

II способ:

$$B_1\left(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1\right), \text{ где } y_i^1 = b_i + p_i(t+1),$$

$$B_2\left(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2\right), \text{ где } y_i^2 = b_i + p_i(t+2).$$

В этом случае мы получим четыре вектора: $\overrightarrow{A_1A_2}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $\overrightarrow{B_1B_2}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $\overrightarrow{A_1B_1}(b_1 - a_1 + p_1, b_2 - a_2 + p_2, \ldots, b_n - a_n + p_n)$, $\overrightarrow{A_2B_2}(b_1 - a_1 + p_1, b_2 - a_2 + p_2, \ldots, b_n - a_n + p_n)$, т. е. точки A_1, A_2, B_1, B_2 образуют невырожденный параллелограмм.

III способ:

$$B_1\left(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1\right), \text{ где } y_i^1 = b_i + p_i t,$$

$$B_2\left(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2\right), \text{ где } y_i^2 = b_i + p_i(t+2).$$

В этом случае мы получим четыре вектора: $\overrightarrow{A_1A_2}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $\overrightarrow{B_2B_1}(-2p_1, -2p_2, \ldots, -2p_n)$ или $\overrightarrow{B_2B_1}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $\overrightarrow{A_1B_2}(b_1 - a_1 + 2p_1, b_2 - a_2 + 2p_2, \ldots, b_n - a_n + 2p_n)$, $\overrightarrow{A_2B_1}(b_1 - a_1 - p_1, b_2 - a_2 - p_2, \ldots, b_n - a_n - p_n)$ или $\overrightarrow{A_2B_1}(b_1 - a_1 + 2p_1, b_2 - a_2 + 2p_2, \ldots, b_n - a_n + 2p_n)$, т. е. точки A_1, A_2, B_2, B_1 образуют невырожденный параллелограмм.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Любые четыре различные точки, лежащие на двух пересекающихся прямых пространства $\mathbb{F}_3^n$, образуют невырожденный параллелограмм.*

Доказательство. Пусть прямые l_1 и l_2, $l_1 \cap l_2$ заданы уравнениями:

$$l_1 : x_i = a_i + p_i t,$$

$$l_2 : y_i = a_i + q_i t,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, $t = 0, 1, 2$.

Прямая l_1 состоит из трех точек: $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B(a_1 + p_1, a_2 + p_2, \ldots, a_n + p_n)$, $C(a_1 + 2p_1, a_2 + 2p_2, \ldots, a_n + 2p_n)$. Прямая l_2 состоит из точек: $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $D(a_1 + q_1, a_2 + q_2, \ldots, a_n + q_n)$, $E(a_1 + 2q_1, a_2 + 2q_2, \ldots, a_n + 2q_n)$.

В этом случае мы получим четыре вектора: $\overrightarrow{BD}(q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_n - p_n)$, $\overrightarrow{EC}(2p_1 - 2q_1, 2p_2 - 2q_2, \ldots, 2p_n - 2q_n)$ или $\overrightarrow{EC}(q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_n - p_n)$, $\overrightarrow{BE}(2q_1 - p_1, 2q_2 - p_2, \ldots, 2q_n - p_n)$, $\overrightarrow{DC}(2p_1 - q_1, 2p_2 - q_2, \ldots, 2p_n - q_n)$ или $\overrightarrow{DC}(2q_1 - p_1, 2q_2 - p_2, \ldots, 2q_n - p_n)$, т. е. точки B, D, E, C образуют невырожденный параллелограмм.

Лемма доказана.

3. Точное решение задачи для торов малой размерности

Пусть $\mathbb{F}_3$ — поле вычетов по модулю 3, $\mathbb{F}_3^n$ — n–мерное пространство над этим полем, P — подмножество $\mathbb{F}_3^n$, состоящее из различных точек a_j с координатами $(a_{j1}; a_{j2}; \ldots; a_{jn})$, таких, что, если a_1, a_2, a_3, $a_4 \in P$, то $a_{1t} - a_{2t} \equiv a_{3t} - a_{4t} (\bmod 3)$ тогда и только тогда, когда $a_{1t} = a_{3t}$, $a_{2t} = a_{4t}$ или $a_{2t} = a_{3t}$, где $t = 1, 2, \ldots, n$, $P(n) = |P|$ — мощность множества P.

Теорема 1. *Пусть P — подмножество двумерного векторного пространства $\mathbb{F}_3^2$, для любых четырех различных точек которого уравнение $a_1 - a_2 = a_3 - a_4$, $a_1, a_2, a_3, a_4 \in P$ имеет лишь тривиальные решения. Тогда для мощности множества P справедливо равенство $P(2) = 4$.*

Доказательство. Покажем, что $P(2) < 6$. Предположим, что $|P| = 6$. Тогда найдутся образующие параллелограмм 4 точки, лежащие на двух параллельных прямых. А значит, по лемме 1 в множестве P есть невырожденный параллелограмм. Получили противоречие с определением множества P.

Предположим, что $|P| = 5$. Возможны два случая:

1) найдутся 4 точки, лежащие по две на двух параллельных прямых;

2) найдутся 4 точки, лежащие на двух пересекающихся прямых.

Первый случай невозможен, т. к. по лемме 1 четыре точки, лежащие по две на двух параллельных прямых, образуют невырожденный параллелограмм, который не может содержаться в множестве P. Второй случай невозможен, т. к. по лемме 2 четыре различные точки, лежащие на двух пересекающихся прямых, образуют невырожденный параллелограмм, что также противоречит определению множества P. Таким образом, $|P| < 5$.

Покажем, что $|P| = 4$. Три точки, лежащие на одной прямой и одна точка ей не принадлежащая, образуют множество P, т. к. у невырожденного параллелограмма любые три точки линейно независимы и не могут лежать на одной прямой. Приведем пример множества P пространства $\mathbb{F}_3^2$ мощности 4: $P = \{(0;0),\ (0;1), (0;2), (1;0)\}$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть P — подмножество трехмерного векторного пространства $\mathbb{F}_3^3$, для любых четырех различных точек которого уравнение $a_1 - a_2 = a_3 - a_4$, $a_1, a_2, a_3, a_4 \in P$ имеет лишь тривиальные решения. Тогда для мощности множества P справедливо равенство $P(3) = 6$.*

Доказательство. $\mathbb{F}_3^3$ можно интерпретировать как трехмерный куб, состоящий их трех параллельных плоскостей π_1, π_2, π_3, где π_i изоморфны $\mathbb{F}_3^2$, $i = 1, 2, 3$. Максимальное количество точек множества P в π_1 равно 4, причем три из этих точек лежат на одной прямой. Эти 4 точки задают 4 различных направления. Заметим, что в пространстве $\mathbb{F}_3^n$ количество различных прямых $\frac{3^{2n} - 3^n}{6}$ (см. [8]), т. е. в пространстве $\mathbb{F}_3^2$ существует 12 различных прямых, образующих 4 тройки параллельных прямых. Таким образом, если в плоскости π_2 взять прямую l, то в плоскости π_1 найдется прямая l', $l' \| l$, и на прямой l' уже лежит две точки, т. е. по лемме 1 на прямой l может быть только одна точка, принадлежащая множеству P. Те же рассуждения, очевидно, справедливы и для плоскости π_3. А значит, $|P| \leqslant 6$.

Приведем схему построения множества P в $\mathbb{F}_3^3$. Возьмем в плоскости π_1 точки T_1, T_2, T_3, T_4, причем $\{T_1, T_2, T_3\} = l$, $T_4 \notin l$. Тогда в плоскости π_2 в качестве $T_5 \in P$ можно взять любую точку, т. к. не существует параллелограмма, у которого три вершины лежат в плоскости, которой не принадлежит четвертая вершина. Точка T_5 и прямая l задают плоскость α, которая пересекает плоскость π_3 по прямой l_1, $l_1 \| l$. Так как T_1, T_2, T_3, $T_5 \in P$ и T_1, T_2, T_3, $T_5 \in \alpha$, то в плоскости α не может существовать еще одной точки, принадлежащей множеству P, и, следовательно, на прямой l_1 нет точек, принадлежащих P. Через точку T_4 проведем плоскость β, $\beta \| \alpha$, $\beta \cap \pi_3 = l_2$. Так как в плоскости α уже есть 4 точки, принадлежащие множеству P, то по доказанному ранее в плоскости $\beta \| \alpha$ может быть только одна точка, принадлежащая множеству P, это точка T_4. Следовательно, на прямой l_2 нет точек, принадлежащих множеству P. В качестве шестой точки $T_6 \in P$ можно взять любую точку прямой l_3, $l_3 \in \pi_3$, $l_3 \| l_1$, $l_3 \| l_2$. Примером такого множества является $P = \{(0;0;0),\ (0;0;1), (0;0;2), (0;1;0), (1;0;0), (2;2;0)\}$.

Теорема доказана.

Вычисления на компьютере дали возможность получить примеры разностных множеств P для торов размерностей 4 и 5. Так, в пространстве $\mathbb{F}_3^4$ $P(4) = 9$, например, $P = \{(0;0;0;0),\ (0;0;0;1),\ (0;0;0;2),\ (0;0;1;0),\ (0;1;0;0),\ (0;2;2;0),\ (1;0;0;0),\ (1;1;2;1),\ (1;2;1;2)\}$. Для $\mathbb{F}_3^5$ $P(5) = 14$, например, $P = \{(0;0;0;0;0),\ (0;0;0;0;2),\ (0;0;0;1;1),\ (0;0;0;2;0),\ (0;0;1;0;0),\ (0;0;2;0;0),\ (0;1;0;0;0),\ (0;1;1;1;2),\ (0;1;2;2;1),\ (1;0;0;0;0),\ (1;0;1;2;1),\ (1;0;2;1;2),\ (1;1;0;0;2),\ (1;2;0;2;2)\}$.

4. Доказательство основного результата

Теорема 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $n = n(\varepsilon)$ такое, что*

$$\sqrt[3]{2} \cdot 3^{n/3} \leqslant P(n) \leqslant \sqrt[3]{2+\varepsilon} \cdot 3^{n/3}.$$

Доказательство. Пусть $P(n) = k$, $a_j = (a_{j1}; a_{j2}; \ldots; a_{jn})$, $a_j \in \mathbb{F}_3^n$ и $(a_j, a_m) = a_{j1}a_{m1} + \ldots + a_{jn}a_{mn}$. Определим комплекснозначную функцию

$$S_P(x) = \sum_{j=1}^{k} e^{2\pi i \frac{(a_j, x)}{3}},$$

где $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $x \in \mathbb{F}_3^n$, $a_j \in P$.

Представим $\sum\limits_{x\in\mathbb{F}_3^n} |S_P(x)|^4$ в виде суммы

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_3^n} |S_P(x)|^4 = \sum_{x\in\mathbb{F}_3^n} \sum_{\substack{j,l,m,p=1,\\ a_j+a_l-a_m-a_p\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)}}^{k} e^{2\pi i\frac{(a_j+a_l-a_m-a_p,x)}{3}} +$$

$$+\sum_{x\in\mathbb{F}_3^n} \sum_{\substack{j,l,m,p=1,\\ a_j+a_l-a_m-a_p\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)}}^{k} e^{2\pi i\frac{(a_j+a_l-a_m-a_p,x)}{3}} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

Вычислим второе слагаемое, изменив в нем порядок суммирования.

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{\substack{j,l,m,p=1,\\ a_j+a_l-a_m-a_p\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)}}^{k} \sum_{x\in\mathbb{F}_3^n} e^{2\pi i\frac{(a_j+a_l-a_m-a_p,x)}{3}}$$

Рассмотрим внутреннюю сумму $\sum_2$.

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_3^n} e^{2\pi i\frac{(a_j+a_l-a_m-a_p,x)}{3}} =$$

$$= \sum_{x_1,\dots,x_{n-1}\in\mathbb{F}_3^n} e^{2\pi i\sum_{d=1}^{n-1}\frac{(a_{jd}+a_{ld}-a_{md}-a_{pd})x_d}{3}} \sum_{x_n=0}^{2} e^{2\pi i\frac{(a_{jn}+a_{ln}-a_{mn}-a_{pn})x_n}{3}} = 0,$$

т. к.

$$\sum_{x_n=0}^{2} e^{2\pi i\frac{ax_n}{3}} = 1 + e^{2\pi i\frac{a}{3}} + e^{2\pi i\frac{2a}{3}} = 0$$

при $a\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$.

Итак, $\sum_2 = 0$.

Разобъем $\sum_1$ на 4 части $\sum_1 = \sum_3+\sum_4+\sum_5+\sum_6$. В $\sum_3$ отнесем слагаемые, соответствующие тем точкам пространства $\mathbb{F}_3^n$, которые образуют невырожденные параллелограммы, в оставшиеся части войдут слагаемые, определяемые точками, образующими вырожденные параллелограммы: в $\sum_4$ – параллелограммы, состоящие из одной точки, в $\sum_5$ – параллелограммы, состоящие из двух точек, в $\sum_6$ – параллелограммы, состоящие из трех точек.

В силу определения множества P будем иметь $\sum_3 = 0$, $\sum_4 = 3^n k$, $\sum_5 = 3^n k(k-1)$.

Очевидно, что

$$\sum\nolimits_6 = 6N3^n,$$

где N – количество прямых в множестве P.

Найдем оценку сверху для N. Для этого заметим, что по лемме 2 в множестве P нет пересекающихся прямых, и $N\leqslant \frac{k}{3}$.

Таким образом,

$$\sum\nolimits_6 \leqslant 2k\cdot 3^n$$

и

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_3^n}|S_P(x)|^4\leqslant 3^n(k^2+2k). \tag{4.1}$$

Представим $\sum\limits_{x\in\mathbb{F}_3^n}|S_P(x)|^4$ в виде суммы двух слагаемых

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_3^n}|S_P(x)|^4=|S_P(0)|^4+\sum_{\substack{x\neq 0,\\ x\in\mathbb{F}_3^n}}|S_P(x)|^4=k^4+\sum_{\substack{x\neq 0,\\ x\in\mathbb{F}_3^n}}|S_P(x)|^4. \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1), будем иметь

$$\sum_{\substack{x\neq 0,\\ x\in\mathbb{F}_3^n}}|S_P(x)|^4\leqslant 3^n(k^2+2k)-k^4. \tag{4.3}$$

Найдем оценку снизу для $\sum\limits_{x\in\mathbb{F}_3^n}|S_P(x)|^4$. Для этого представим $\sum\limits_{x\in\mathbb{F}_3^n}|S_P(x)|^2$ в виде суммы двух слагаемых:

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_3^n}|S_P(x)|^2=|S_P(0)|^2+\sum_{\substack{x\neq 0,\\ x\in\mathbb{F}_3^n}}|S_P(x)|^2=k^2+\sum_{\substack{x\neq 0,\\ x\in\mathbb{F}_3^n}}|S_P(x)|^2. \tag{4.4}$$

С другой стороны,

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_3^n}|S_P(x)|^2=\sum_{x\in\mathbb{F}_3^n}\sum_{j,m=1}^{k}e^{2\pi i\frac{(a_j-a_m,x)}{3}}=\sum_{x\in\mathbb{F}_3^n}\sum_{\substack{j,m=1\\ j=m}}^{k}e^{2\pi i\frac{(a_j-a_m,x)}{3}}+$$

$$+\sum_{x\in\mathbb{F}_3^n}\sum_{\substack{j,m=1\\ j\neq m}}^{k}e^{2\pi i\frac{(a_j-a_m,x)}{3}}=3^nk+0=3^nk. \tag{4.5}$$

Объединяя равенства (4.4) и (4.5), получим

$$\sum_{\substack{x\neq 0,\\ x\in\mathbb{F}_3^n}}|S_P(x)|^2=3^nk-k^2. \tag{4.6}$$

Согласно неравенству Коши,

$$\sum_{\substack{x\neq 0,\\ x\in\mathbb{F}_3^n}}|S_P(x)|^2\leqslant\left(\sum_{\substack{x\neq 0,\\ x\in\mathbb{F}_3^n}}1\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{x\neq 0,\\ x\in\mathbb{F}_3^n}}|S_P(x)|^4\right)^{1/2}. \tag{4.7}$$

Из (4.6), (4.7) следует, что

$$3^nk-k^2\leqslant\sqrt{3^n-1}\left(\sum_{\substack{x\neq 0,\\ x\in\mathbb{F}_3^n}}|S_P(x)|^4\right)^{1/2}. \tag{4.8}$$

Обе части неравенства неотрицательны, т. к. если бы выполнялось неравенство $3^n k - k^2 < 0$, то $k > 3^n$, чего не может быть. Поэтому, возведя обе части неравенства (4.8) в квадрат, имеем:

$$\left(3^n k - k^2\right)^2 \leqslant (3^n - 1) \sum_{\substack{x \neq 0, \\ x \in \mathbb{F}_3^n}} |S_P(x)|^4.$$

Откуда

$$\sum_{\substack{x \neq 0, \\ x \in \mathbb{F}_3^n}} |S_P(x)|^4 \geqslant \frac{3^{2n} k^2 - 2 \cdot 3^n k^3 + k^4}{3^n - 1}. \tag{4.9}$$

Объединяя неравенства (4.9), (4.3), будем иметь

$$\frac{3^{2n} k^2 - 2 \cdot 3^n k^3 + k^4}{3^n - 1} \leqslant 3^n (k^2 + 2k) - k^4$$

или

$$k^3 - 2k^2 + k - 2 \cdot 3^n + 2 \leqslant 0.$$

Исследуем на отрезке $[0; 3^n]$ поведение непрерывной функции $f(t) = t^3 - 2t^2 + t - 2 \cdot 3^n + 2$. На данном отрезке функция $f(t)$ обращается в ноль в одной, двух или трех точках, т. к. $f(0) = 2(1 - 3^n) < 0$, $f(3^n) = 3^{3n} - 2 \cdot 3^{2n} + 3^n + 2(1 - 3^n) > 0$. Экстремумами функции $f(t)$ на этом отрезке являются точки $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{3}$, и $f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$, $f(1) < 0$. Следовательно, уравнение $f(t) = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[1; 3^n]$. Вычисляя значения функции $f(t)$ в различных точках данного отрезка, приходим к выводу, что корень уравнения $f(t) = 0$ находится на отрезке $[3^{n/3}; \sqrt[3]{3} \cdot 3^{n/3}]$, т. е. $k < \sqrt[3]{3} \cdot 3^{n/3}$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер $n(\varepsilon)$ такой, что корень уравнения $f(t) = 0$ будет находиться на отрезке $[3^{n/3}; \sqrt[3]{2 + \varepsilon} \cdot 3^{n/3}]$.

Итак, получена оценка сверху для мощности множества P, являющегося подмножеством n-мерного пространства над полем $\mathbb{F}_3$. Причем множество P такое, что если a_1, a_2, $a_3, a_4 \in P$ и a_1, a_2, a_3, a_4 попарно различны, то $a_1 + a_2 - a_3 - a_4 \not\equiv 0 (\operatorname{mod} 3)$.

Теперь найдем оценку снизу для мощности множества P, $P \subset \mathbb{F}_3^n$.

Пусть множество P мощности k экстремально, следовательно, непополняемо, т. е. в него нельзя добавить ни одной новой точки из пространства $\mathbb{F}_3^n$ так, чтобы в множестве P не появился невырожденный параллелограмм.

Выясним, когда мы сможем пополнить множество P. Множество P будет пополняемым, если в пространстве $\mathbb{F}_3^n$ найдется такая точка x, что для любых a_1, a_2, $a_3 \in P$, где a_1, a_2, a_3 — различны, $a_1 - a_2 \not\equiv a_3 - x (\operatorname{mod} 3)$ или $x \not\equiv a_3 + (a_2 - a_1) (\operatorname{mod} 3)$. Количество различных (без учета противоположных) направлений в множестве P мощности k равно $\frac{k(k-1)}{2}$, а следовательно, количество точек, которыми нельзя дополнить множество P равно $\frac{k^2(k-1)}{2}$. Значит, множество P можно пополнить, если $\frac{k^2(k-1)}{2} < 3^n$. Но мы в качестве множества P взяли экстремальное множество, следовательно, его нельзя пополнить. Итак, $\frac{k^2(k-1)}{2} \geqslant 3^n$. Найдем, при каких k выполняется данное неравенство.

Как было доказано выше $k < \sqrt[3]{2+\varepsilon}\cdot 3^{n/3}$, где $\varepsilon > 0$. Рассмотрим поведение непрерывной функции $f(t) = t^3 - t^2 - 2\cdot 3^n$ на отрезке $[0; \sqrt[3]{2+\varepsilon}\cdot 3^{n/3}]$. На данном отрезке функция $f(t)$ обращается в ноль в одной, двух или трех точках, т. к. $f(0) < 0$, $f(\sqrt[3]{2+\varepsilon}\cdot 3^{n/3}) > 0$ при $n = n(\varepsilon)$. Экстремумами функции $f(t)$ на этом отрезке являются точки $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{2}{3}$, и $f\left(\frac{2}{3}\right) < 0$, $f(0) < 0$. Значит, уравнение $f(t) = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[\frac{2}{3}; \sqrt[3]{2+\varepsilon}\cdot 3^{n/3}]$. Находя значения функции $f(t)$ в различных точках этого отрезка, заключаем, что корень уравнения $f(t) = 0$ принадлежит отрезку $[\sqrt[3]{2}\cdot 3^{n/3}; \sqrt[3]{2+\varepsilon}\cdot 3^{n/3}]$, т. е. $k > \sqrt[3]{2}\cdot 3^{n/3}$.

Нами получена оценка снизу для мощности множества P, $P \subset \mathbb{F}_3^n$. Причем множество P такое, что если a_1, a_2, $a_3, a_4 \in P$ и a_1, a_2, a_3, a_4 попарно различны, то $a_1 + a_2 - a_3 - a_4 \not\equiv 0 (\bmod 3)$.

Литература

[1] Babai L., Sos V. Sidon sets in groups and indeced subgraphs of Cayley graphs // Europ. J. Comb. 6 (1985). P. 101–114.

[2] Chaimovich M. Subset sum problem with different summands // Computations, Discrete Applied Mathematics. 27 (1990). P. 277–282.

[3] Folkman J. On the representation of integers as sums of distinct terms from a fixed sequence // Canad. J. Math. 18 (1966). P. 643–655.

[4] Freiman G.A. Subset-sum problem with different summands // Congressus Numerantium. 70 (1990). P. 207–215.

[5] Hamidoune Y.O. Subsets with small sums in abelian groups // I. European J. Combin. 18 (1997). № 5. P. 541–556.

[6] Meshulam R. On subsets of finite abelian groups with no 3-term arithmetic progresions // J. Combin. Theory Ser. A. 71 (1995). P. 168–172.

[7] Tao T. Structure and Randomness: page from year one of a mathematical blog. N.-Y.: AMS, 2008. 270 p.

[8] Артин Э. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969. 284 с.

Поступила в редакцию 8/*VII*/2009;
в окончательном варианте — 8/*VII*/2009.

ON MAXIMAL SET WITHOUT PARALLELOGRAMS

© 2009 E.P. Davletyarova[5], A.A. Zhukova[6], $\boxed{\text{A.A. Yudin}^7}$

We find upper and lower bounds for the cardinality of the subset in a discrete torus over the field of three elements such that no four different points of it form a nonsingular parallelogram

Key words: finite fields, discrete torus, trigonometric sums.

Paper received 8/ *VII*/2009.
Paper accepted 8/ *VII*/2009.

[5]Davletyarova Elena Petrovna (dep@vladggu.ru), Dept. of Informatics and Computing Machinery, Vladimir State Humanities University, Vladimir, 600024, Russia.

[6]Zhukova Alla Adolfovna (alla@vladggu.ru), Dept. of Mathematycal Analysis, Vladimir State Humanities University, Vladimir, 600024, Russia

[7]Yudin Alexander Alexanderovich (aayudin@vladggu.ru), Dept. of Geometries and Methodology of Teaching Mathematics, Vladimir State Humanities University.