УДК 517.95

ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2009 И.П. Егорова[1]

Для уравнения смешанного типа

$$u_{xx} + sgny \cdot |y|^m u_{yy} = 0,\ 0 < m < 1,$$

в прямоугольной области $\{(x, y)|\ \ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где m, α, β — заданные положительные числа, методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с граничными условиями: $u(0, y) = u(1, y)$, $u_x(0, y) = u_x(1, y)$, $-\alpha \leqslant y \leqslant \beta$; $u(x, \beta) = f(x)$, $u(x, -\alpha) = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Ключевые слова: собственные функции, спектральный анализ.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$L(u) \equiv u_{xx} + sgny \cdot |y|^m u_{yy} = 0,\ 0 < m < 1, \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y)|0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где m, α, β — заданные положительные числа.

Задача. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$u(x, \beta) = f(x), \quad u(x, -\alpha) = g(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

[1]Егорова Ирина Петровна (`ira.egorova81@yandex.ru`), кафедра высшей математики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 196.

где $f(x), g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $f(0) = f(1)$, $g(0) = g(1)$, $f'(0) = f'(1)$, $g'(0) = g'(1)$.

Для вырождающихся эллиптических уравнений нелокальные задачи изучались в работах [1–3], в которых условие (4) имело вид: $u(0, y) = u(1, y)$ и $u_x(0, y) = 0$ при $y \geqslant 0$. В работах [4, 5] исследованы задачи с условиями периодичности (4) для дифференциальных уравнений различных типов с вырождением первого рода.

В данной работе, следуя [6, 7] установлен критерий единственности решения задачи (2)–(5). Существование решения доказано на основании теории рядов по системе собственных функций соответствующей задачи на собственные значения.

2. Единственность решения нелокальной задачи

Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (2)–(5). Рассмотрим функции

$$u_k(y) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \cos \lambda_k x \, dx, \quad \lambda_k = 2\pi k, \ k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

$$u_0(y) = \int_0^1 u(x, y) \, dx, \tag{7}$$

$$v_k(y) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \sin \lambda_k x \, dx. \tag{8}$$

На основании (6)–(8) введем функции

$$u_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) \cos \lambda_k x \, dx, \ k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

$$u_{0,\varepsilon}(y) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) \, dx, \tag{10}$$

$$v_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) \sin \lambda_k x \, dx. \tag{11}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Дифференцируя равенство (9) по y дважды при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ и учитывая уравнение (1), а затем интегрируя по частям два раза, имеем

$$u''_{k,\varepsilon}(y) - sgny \cdot |y|^{-m} \left[-\sqrt{2} \left(u_x(x, y) \cos \lambda_k x \, \Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda_k u(x, y) \sin \lambda_k x \Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon} \right) - \lambda_k^2 u_{k,\varepsilon}(y) \right] = 0.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (4), получим, что $u_k(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u''_k(y) - sgny \cdot |y|^{-m} \lambda_k^2 u_k(y) = 0, \ y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta). \tag{12}$$

В уравнении (12), следуя [7], произведя замену $u_k(y) = W(p_k|y|^q)\sqrt{|y|}$, где $p_k^2 = (2\pi k/q)^2$, $q = (2-m)/2$, относительно функции W при $y < 0$ получим обычное уравнение Бесселя, а при $y > 0$ – модифицированное уравнение Бесселя. Тогда, используя представление общих решений этих уравнений, найдем общее решение уравнения (12):

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k\sqrt{y}I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) + b_k\sqrt{y}K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q), & y > 0, \\ c_k\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) + d_k\sqrt{-y}\ Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q), & y < 0, \end{cases} \tag{13}$$

где $J_{\frac{1}{2q}}\left(p_q\left(-y\right)^q\right)$ и $Y_{\frac{1}{2q}}\left(p_q\left(-y\right)^q\right)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно, $I_{\frac{1}{2q}}\left(p_q y^q\right)$ и $K_{\frac{1}{2q}}\left(p_q y^q\right)$ — модифицированные функции Бесселя, a_k, b_k, c_k d_k — произвольные постоянные.

В силу (2) постоянные a_k, b_k, c_k, d_k подберем так, чтобы выполнялись условия сопряжения:

$$u_k(0+0) = u_k(0-0),\ u_k'(0+0) = u_k'(0-0). \tag{14}$$

Первое из равенств (14) выполнено, если $d_k = -\dfrac{\pi b_k}{2}$ и любых a_k и c_k, а второе равенство при $c_k = \pi b_k ctg(\dfrac{\pi}{4q})/2 - a_k$ и $d_k = -\dfrac{\pi b_k}{2}$. Тогда функции (13) примут вид

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k\sqrt{y}I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) + b_k\sqrt{y}K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q), & y > 0, \\ -a_k\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) + b_k\sqrt{-y}\ \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q), & y < 0, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y^q)) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2q}}[J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q + J_{-\frac{1}{2q}}(p_k)(-y)^q)]. \tag{16}$$

Для нахождения постоянных a_k и b_k воспользуемся граничным условием (5) и формулой (6):

$$u_k(\beta) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,\beta)\cos\lambda_k x\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\cos\lambda_k x\,dx = f_k, \tag{17}$$

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,-\alpha)\cos\lambda_k x\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 g(x)\cos\lambda_k x\,dx = g_k. \tag{18}$$

Теперь на основании (15), (17) и (18) получим систему для нахождения a_k и b_k:

$$\begin{cases} a_k I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) + b_k K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) = f_k\beta^{-\frac{1}{2}}, \\ -a_k J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) + b_k\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) = g_k\alpha^{-\frac{1}{2}},\ k = 1, 2, \ldots \quad . \end{cases} \tag{19}$$

Если при всех $k \in N$ определитель данной системы

$$\delta_k(\alpha,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) + \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) \neq 0, \tag{20}$$

то система (19) имеет единственное решение

$$a_k = \frac{f_k\sqrt{\alpha}\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) - 2g_k\sqrt{\beta}K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}{2\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, \tag{21}$$

$$b_k = \frac{f_k\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) - 2g_k\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}. \tag{22}$$

Таким образом, функции $u_k(y)$ однозначно построены и имеют следующий вид

$$u_k(y) = \begin{cases} \dfrac{f_k\sqrt{\alpha y}\delta_k(\alpha,y) + g_k\sqrt{\beta y}E_k(y,\beta)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y > 0, \\ \dfrac{f_k\sqrt{-\alpha y}F_k(\alpha,-y) + g_k\sqrt{-\beta y}\delta_k(-y,\beta)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y < 0, \end{cases} \tag{23}$$

где

$$\delta_k(\alpha,y) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) + \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q), \tag{24}$$

$$E_k(y,\beta) = I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) - I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q), \tag{25}$$

$$F_k(\alpha,-y) = \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) - \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q), \tag{26}$$

$$\delta_k(-y,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) + \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q). \tag{27}$$

Аналогично получим краевую задачу для функции $v_k(y)$:

$$v_k''(y) - sgny\cdot|y|^m\lambda_k^2 v_k(y) = 0, \;\; y \in (-\alpha,0)\cup(0,\beta), \tag{28}$$

$$v_k(0+0) = v_k(0-0),\; v_k'(0+0) = v_k'(0-0),\; k \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

$$v_k(\beta) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,\beta)\sin\lambda_k x\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\sin\lambda_k x\,dx = \widetilde{f}_k, \tag{30}$$

$$v_k(-\alpha) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,-\alpha)\sin\lambda_k x\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 g(x)\sin\lambda_k x\,dx = \widetilde{g}_k. \tag{31}$$

Однозначное решение задачи (28)–(31) определяется по формуле

$$v_k(y) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{f}_k\sqrt{\alpha y}\,\delta_k(\alpha,y) + \widetilde{g}_k\sqrt{\beta y}E_k(y,\beta)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y > 0, \\ \dfrac{\widetilde{f}_k\sqrt{-\alpha y}F_k(\alpha,-y) + \widetilde{g}_k\sqrt{-\beta y}\delta_k(-y,\beta)}{\delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y < 0, \end{cases} \tag{32}$$

где $\delta_k(\alpha, y), E_k(y, \beta), F_k(\alpha, -y), \delta_k(-y, \beta)$ определяются соответственно по формулам (24)–(27).

Найдем теперь $u_0(y)$. Дифференцируя равенство (10) дважды, учитывая уравнение (1) и нелокальные граничные условия (4), получим, что функция $u_0(y)$ является решением следующей задачи:

$$u''_0(y) = 0,\ y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \tag{33}$$

$$u_0(0+0) = u_0(0-0),\ u'_0(0+0) = u'_0(0-0), \tag{34}$$

$$u_0(\beta) = \int_0^1 u(x, \beta)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx = f_0, \tag{35}$$

$$u_0(-\alpha) = \int_0^1 u(x, -\alpha)\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx = g_0. \tag{36}$$

Однозначное решение задачи (33)–(36) имеет вид

$$u_0(y) = \frac{f_0 - g_0}{\alpha + \beta} y + \frac{\alpha f_0 + \beta g_0}{\alpha + \beta}, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta. \tag{37}$$

Из формул (23), (32) и (37) следует единственность решения задачи (2)–(5), так как если $f(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$, то $u_k(y) \equiv 0$, $u_0(y) \equiv 0$, $v_k(y) \equiv 0$ для $k = 1, 2, ...$ на $[-\alpha, \beta]$. Тогда из (6)–(8) имеем

$$\sqrt{2}\int_0^1 u(x, y)\cos\lambda_k x\, dx = 0,\ \int_0^1 u(x, y)\, dx = 0,\ \sqrt{2}\int_0^1 u(x, y)\sin\lambda_k x\, dx = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы функций $\{1, \sqrt{2}\cos(2\pi kx), \sqrt{2}\sin(2\pi kx)\}$ в пространстве $L_2[0, 1]$ следует, что $u(x, y) = 0$ почти для всех $x \in [0, 1]$ и при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. В силу (2) функция $u(x, y) \in C(\overline{D})$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β и $k = l \in \mathbb{N}$ нарушено условие (20), т. е. $\delta_l(\alpha, \beta) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(5) (где $f(x) = g(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_l(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\delta_l(\alpha, y)\sqrt{y}}{J_{\frac{1}{2q}}(p_l\alpha^q)} X_l(x), & y > 0, \\ \dfrac{\delta_l(-y, \beta)\sqrt{-y}}{I_{\frac{1}{2q}}(p_l\beta^q)} X_l(x), & y < 0, \end{cases} \tag{38}$$

где $X_l(x) = C_1\cos(2\pi lx) + C_2\sin(2\pi lx) + C_3$, C_i — произвольные постоянные, $i = \overline{1, 3}$. Следовательно, нами установлен следующий критерий единственности решения задачи (2)–(5).

Теорема 1. Если существует решение $u(x, y)$ задачи (2)–(5), то оно единственно тогда и только тогда, когда $\delta_k(\alpha, \beta) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

3. Существование решения задачи

Выражение $\delta_k(\alpha,\beta)$ представим в следующем виде:

$$\delta_k(\alpha,\beta) = I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\gamma_k(\alpha,\beta), \tag{39}$$

где

$$\gamma_k(\alpha,\beta) = \frac{K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)} + \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q).$$

Поскольку при больших k и любом $\beta > 0$ выражение $\dfrac{K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)} = O(e^{-2p_k\beta^q})$, то нули $\gamma_k(\alpha,\beta)$ при больших k определяются как нули $\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)$. Существование нулей функции $\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k z)$ следует из того факта, что функции $\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k z)$ и $J_{\frac{1}{2q}}(p_k z)$ являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя

$$z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}y(z)\right) + \left(p_k^2 z^2 - \left(\frac{1}{2q}\right)^2\right)y(z) = 0. \tag{40}$$

Из общей теории линейных дифференциальных уравнений [8, с. 135] известно, что нули двух линейно независимых решений уравнения (40) строго чередуются, т. е. на интервале между любыми последовательными нулями любого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения. Функция $J_{\frac{1}{2q}}(p_k z)$ имеет счетное множество положительных нулей. Тогда функция $\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k z)$ также имеет счетное множество положительных нулей относительно $z = \alpha^q$. Следовательно, $\gamma_k(\alpha,\beta)$ может иметь счетное множество нулей относительно α независимо от $\beta > 0$. Поскольку α — любое положительное число, то оно может принимать значения, близкие к нулям $\gamma_k(\alpha,\beta)$. Поэтому при больших k выражение $\sqrt{k}\gamma_k(\alpha,\beta)$ может стать достаточно малым.

Лемма 1. Существуют α и постоянная $C_0 > 0$ такие, что при всех $\beta > 0$ и больших k справедлива оценка

$$|\sqrt{k}\gamma_k(\alpha,\beta)| \geqslant C_0 > 0. \tag{41}$$

Доказательство данного утверждения проводится аналогично доказательству леммы 1 работы [9].

Если $\delta_k(\alpha,\beta) \neq 0$ и выполнено условие (41), то решение задачи (2)–(5) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,y) = u_0(y) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y)\cos\lambda_k x + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} v_k(y)\sin\lambda_k x. \tag{42}$$

Покажем, что при определенных условиях относительно функций $f(x)$ и $g(x)$ ряд (42) и ряды, полученные из него путем почленного дифференцирования по x и y первого порядка, равномерно сходятся на замкнутой области $\overline{D}$, а также существует возможность двукратного дифференцирования по x и y в замкнутой области $\overline{D}_\varepsilon = \overline{D} \cap \{|y| \geqslant \varepsilon > 0\}$, где ε – достаточно малое число.

Рассмотрим следующие соотношения:

$$A_k(y) = \frac{\sqrt{y}\delta_k(\alpha, y)}{\delta_k(\alpha, \beta)}, B_k(y) = \frac{\sqrt{y}E_k(\alpha, y)}{\delta_k(\alpha, \beta)},\ y \in [0, \beta], \tag{43}$$

$$C_k(y) = \frac{\sqrt{-y}F_k(\alpha, -y)}{\delta_k(\alpha, \beta)}, D_k(y) = \frac{\sqrt{-y}\delta_k(-y, \beta)}{\delta_k(\alpha, \beta)},\ y \in [-\alpha, 0]. \tag{44}$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия (20) и (41). Тогда для достаточно больших k и при любом $y \in [-\alpha, \beta]$ справедливы следующие оценки:

$$|A_k(y)| \leqslant C_4,\ |A'_k(y)| \leqslant C_4 k, \quad 0 \leqslant y \leqslant \beta;$$

$$|B_k(y)| \leqslant C_5,\ |B'_k(y)| \leqslant C_5 k^{1+\lambda}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \beta;$$

$$|C_k(y)| \leqslant C_6 k^{1+\lambda} e^{-kd},\ |C'_k(y)| \leqslant C_6 k^{2-\lambda} e^{-kd}, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant 0;$$

$$|D_k(y)| \leqslant C_7 k^{1+\lambda},\ |D'_k(y)| \leqslant C_7 k^{2-\lambda}, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant 0;$$

$$|A''_k(y)| \leqslant C_8 k^2,\ |B''_k(y)| \leqslant C_9 k^2, \quad \varepsilon \leqslant y \leqslant \beta;$$

$$|C''_k(y)| \leqslant C_{10} k^2 e^{-kd},\ |D''_k(y)| \leqslant C_{11} k^2, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant -\varepsilon,$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные, $\lambda = 1/2q - 1/2$, $d = 2\pi\beta^q/q$.

Доказательство. Используя асимптотические формулы для цилиндрических функций в нуле и на бесконечности:

$$\begin{gathered} J_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \quad I_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \\ K_\nu(z) \sim \frac{\Gamma|\nu|}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-|\nu|}, \quad \nu \neq 0, \quad \text{при} \quad z \to 0; \end{gathered} \tag{45}$$

$$\begin{gathered} I_\nu(z) \sim \left(\frac{1}{2\pi z}\right)^{1/2} e^z, \quad J_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \\ K_\nu(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}, \quad \overline{Y}_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \frac{\cos(z - \frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\nu\pi}{2})} \quad \text{при} \quad z \to \infty \end{gathered} \tag{46}$$

на основании (24) с учетом (39), (41) при $y \in [0,\beta]$ и достаточно больших k, оценим

$$|A_k(y)| \leqslant \left| \frac{\sqrt{k} J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right) \sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}\left(p_k y^q\right)}{I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right) C_0} \right| + \left| \frac{\sqrt{k}\ \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right) \sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k y^q\right)}{I_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\beta^q\right) C_0} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_1 \left| \sqrt{k}\ \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right) \right| \leqslant \widetilde{C}_2. \tag{47}$$

На основании формул дифференцирования цилиндрических функций

$$\frac{d}{dz}\left[z^\nu I_\nu(z)\right] = z^\nu I_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz}\left[z^\nu K_\nu(z)\right] = -z^\nu K_{\nu-1}(z) \tag{48}$$

найдем

$$A'_k(y) = p_k q y^{q-1/2} \left(\frac{-J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right) K_{\frac{1}{2q}-1}\left(p_k y^q\right)}{\delta_k(\alpha,\beta)} + \frac{\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right) I_{\frac{1}{2q}-1}\left(p_k y^q\right)}{\delta_k(\alpha,\beta)} \right).$$

Отсюда при $y \in [0,\beta]$ и больших k имеем

$$|A'_k(y)| \leqslant \sqrt{k} p_k q \left(\frac{|J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) y^{q-1/2} K_{\frac{1}{2q}-1}(p_k y^q)|}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) C_0} + \frac{|\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) y^{q-1/2} I_{\frac{1}{2q}-1}(p_k y^q)|}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) C_0} \right) \leqslant$$

$$\leqslant k\widetilde{C}_3 |\sqrt{k}\ \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)| \leqslant \widetilde{C}_4 k.$$

Нетрудно показать, что для $A_k(y)$ имеет место представление

$$|A''_k(y)| = (p_k q)^2 y^{2q-2} A_k(y). \tag{49}$$

Тогда с учетом оценки (47) из равенства (49) имеем $|A''_k(y)| \leqslant \widetilde{C}_5 k^2$.

Аналогично на основании формул (25), (39), (41) и асимптотических формул (45) и (46) оценим функцию $B_k(y)$. При $\varepsilon \leqslant y \leqslant \beta$ и больших k имеем:

$$|B_k(y)| \leqslant \left| \frac{\sqrt{k}\sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) C_0} \right| + \left| \frac{\sqrt{k}\sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) C_0} \right| \leqslant \widetilde{C}_6. \tag{50}$$

Если $0 \leqslant y < \varepsilon$, то аналогично получим

$$|B_k(y)| \leqslant \widetilde{C}_7 \sqrt{k} |\sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)| \leqslant \widetilde{C}_8 k^{-\lambda}. \tag{51}$$

Из оценок (50) и (51) следует, что $|B_k(y)| \leqslant \widetilde{C}_9$ при любом $y \in [0,\beta]$.

Используя формулы (47), найдем

$$B'_k(y) = -p_k q y^{q-1/2} \left(\frac{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) K_{\frac{1}{2q}-1}(p_k y^q)}{\delta_k(\alpha,\beta)} + \frac{K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) I_{\frac{1}{2q}-1}(p_k y^q)}{\delta_k(\alpha,\beta)} \right).$$

Тогда при любом $y \in [0,\beta]$ и больших k имеем

$$|B_k'(y)| \leqslant \widetilde{C}_{10}\sqrt{k}|p_k q y^{q-1/2} K_{\frac{1}{2q}-1}(p_k y^q)| \leqslant \widetilde{C}_{11} k^{1+\lambda}.$$

Функция $B_k(y)$ является решением уравнения $B_k''(y) = (p_k q)^2 y^{2q-2} B_k(y)$. Отсюда с учетом оценки (50) при $\varepsilon \leqslant y \leqslant \beta$ получим $B_k''(y) \leqslant \widetilde{C}_{12} k^2$.

Теперь оценим функции $C_k(y)$ и $D_k(y)$ при $y \in [-\alpha, 0]$ и достаточно больших k. На основании формул (26), (27), (39), (41) и асимптотических формул (45) при $-\varepsilon < y \leqslant 0$ получим следующие оценки для функций $C_k(y)$ и $D_k(y)$:

$$\begin{gathered}|C_k(y)| \leqslant \left|\frac{\sqrt{k}\sqrt{-y}\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)\,J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)C_0}\right| + \\ + \left|\frac{\sqrt{k}\sqrt{-y}\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\,J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)C_0}\right| \leqslant \widetilde{C}_{12} k^{1+\lambda} e^{-kd},\end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered}|D_k(y)| = \left|\frac{\sqrt{k}\sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)C_0}\right| + \\ + \left|\frac{\sqrt{k}\sqrt{-y}\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)C_0}\right| \leqslant \widetilde{C}_{13} k^{1+\lambda},\end{gathered} \tag{53}$$

так как при любом $y \in [-\alpha, 0]$: $\left|\sqrt{-y}\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)\right| \leqslant \widetilde{C}_{14} k^{\frac{1}{2q}}$.

В случае $-\alpha \leqslant y \leqslant -\varepsilon$ на основании формул (46) получим

$$|C_k(y)| \leqslant \widetilde{C}_{15} e^{-kd}, \quad |D_k(y)| \leqslant \widetilde{C}_{16}. \tag{54}$$

Из оценок (52)–(54) при любом $y \in [-\alpha, 0]$ будем иметь:

$$|C_k(y)| \leqslant \widetilde{C}_{17} k^{1+\lambda} e^{-kd}, \quad |D_k(y)| \leqslant \widetilde{C}_{18} k^{1+\lambda}.$$

Используя формулы дифференцирования $\frac{d}{dz}\left[z^\nu J_\nu(z)\right] = z^\nu J_{\nu-1}(z)$, $\frac{d}{dz}\left[z^\nu J_{-\nu}(z)\right] = -z^\nu J_{1-\nu}(z)$, вычислим

$$\begin{gathered}C_k'(y) = \frac{\pi p_k q(-y)^{q-1/2}}{2\sin\frac{\pi}{2q}\delta_k(\alpha,\beta)}\left[J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\,J_{1-\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) + \right. \\ \left. + J_{-\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\,J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k(-y)^q)\right],\end{gathered} \tag{55}$$

$$\begin{gathered}D_k'(y) = -\frac{p_k q(-y)^{q-1/2}}{\delta_k(\alpha,\beta)}\left[\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2q}} I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)(J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k(-y)^q) - J_{1-\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)) + \right. \\ \left. + K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k(-y)^q)\right].\end{gathered} \tag{56}$$

Из равенств (55) и (56) при любом $y \in [-\alpha, 0]$ следуют оценки:

$$|C_k'(y)| \leqslant \frac{\widetilde{C}_{19}\sqrt{k}p_k(-y)^{q-1/2}}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)C_0}\Big|J_{\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right)J_{1-\frac{1}{2q}}\left(p_k(-y)^q\right)+$$
$$+J_{-\frac{1}{2q}}\left(p_k\alpha^q\right)J_{\frac{1}{2q}-1}\left(p_k(-y)^q\right)\Big| \leqslant \widetilde{C}_{20}k^{2-\lambda}e^{-kd},$$

$$|D_k'(y)| \leqslant \frac{\widetilde{C}_{21}\sqrt{k}(-y)^{q-1/2}}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)C_0}\Big||I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)(J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k(-y)^q)-J_{1-\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q))|+$$
$$+|K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k(-y)^q)|\Big| \leqslant \widetilde{C}_{22}k^{2-\lambda}.$$

Поскольку $C_k''(y) = (p_kq)\,(-y)^{2q-2}C_k(y)$ и $D_k''(y) = (p_kq)\,(-y)^{2q-2}D_k(y)$, то в силу оценок (54) для функций $C_k(y)$ и $D_k(y)$ получим

$$\left|C_k''(y)\right| \leqslant \widetilde{C}_{23}k^2e^{-kd}, \qquad \left|D_k''(y)\right| \leqslant \widetilde{C}_{24}k^2.$$

Лемма 3. При любом $y \in [-\alpha, \beta]$ и условии (41) для достаточно больших k справедливы оценки:

$$|u_k(y)| \leqslant C_{12}\left(|f_k| + |g_k|\right), \qquad |v_k(y)| \leqslant C_{15}(|\widetilde{f}_k| + |\widetilde{g}_k|),$$

$$|u_k'(y)| \leqslant C_{13}\left(k|f_k| + k^{2-\lambda}|g_k|\right), \qquad |v_k'(y)| \leqslant C_{16}(k|\widetilde{f}_k| + k^{2-\lambda}|\widetilde{g}_k|),$$

$$|u_k''(y)| \leqslant C_{14}k^2\left(|f_k| + |g_k|\right), \qquad |v_k''(y)| \leqslant C_{17}k^2(|\widetilde{f}_k| + |\widetilde{g}_k|).$$

Доказательство. На основании формул (23), (32), (43) и (44) получим следующие представления для функций $u_k(y)$ и $v_k(y)$:

$$u_k(y) = \frac{f_kA_k(y)}{\sqrt{\beta}} + \frac{g_kB_k(y)}{\sqrt{\alpha}}, \quad v_k(y) = \frac{\widetilde{f}_kA_k(y)}{\sqrt{\beta}} + \frac{\widetilde{g}_kB_k(y)}{\sqrt{\alpha}}, \quad y \geqslant 0,$$

$$u_k(y) = \frac{f_kC_k(y)}{\sqrt{\beta}} + \frac{g_kD_k(y)}{\sqrt{\alpha}}, \quad v_k(y) = \frac{\widetilde{f}_kC_k(y)}{\sqrt{\beta}} + \frac{\widetilde{g}_kD_k(y)}{\sqrt{\alpha}}, \quad y < 0.$$

Исходя из этих равенств на основании леммы 2 нетрудно получить указанные оценки.

Теперь на основании леммы 3 докажем, что функция $u(x,y)$, определяемая рядом (42), удовлетворяет условиям (2) и (3) поставленной задачи. Формально из ряда (42) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_x = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_ku_k(y)\sin\lambda_kx + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_kv_k(y)\cos\lambda_kx, \tag{57}$$

$$u_y = u_0'(y) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(y)\cos\lambda_kx + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}v_k'(y)\sin\lambda_kx, \tag{58}$$

$$u_{xx} = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 u_k(y)\cos\lambda_k x - \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 v_k(y)\sin\lambda_k x, \tag{59}$$

$$u_{yy} = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}u_k''(y)\cos\lambda_k x + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}v_k''(y)\sin\lambda_k x. \tag{60}$$

Тогда на основании леммы 3 ряды (42), (57), (58) при любых $(x,y)\in\overline{D}$ мажорируются числовым рядом

$$C_{18}\sum_{k=1}^{\infty}k[|f_k| + |\widetilde{f}_k| + k^{1-\lambda}(|g_k| + |\widetilde{g}_k|)], \tag{61}$$

а ряды (59), (60) при любом $(x,y)\in\overline{D_\varepsilon}$ мажорируются рядом

$$C_{19}\sum_{k=1}^{\infty}k^2(|f_k| + |\widetilde{f}_k| + |g_k| + |\widetilde{g}_k|). \tag{62}$$

Лемма 4. Если функции $f(x)$, $g(x)\in C^2[0,1]$ на этом сегменте имеют кусочно-непрерывную производную третьего порядка и выполнены условия $f(0)=f(1)$, $f'(0)=f'(1)$, $g(0)=g(1)$, $g'(0)=g'(1)$, то для коэффициентов f_k, $\widetilde{f}_k$, g_k, $\widetilde{g}_k$ справедливы оценки:

$$f_k = -\frac{p_k}{\lambda_k^3},\ \ \widetilde{f}_k = -\frac{\widetilde{p}_k}{\lambda_k^3},\ \ g_k = -\frac{s_k}{\lambda_k^3},\ \ \widetilde{g}_k = -\frac{\widetilde{s}_k}{\lambda_k^3}, \tag{63}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}{p_k}^2 < +\infty,\ \ \sum_{k=1}^{+\infty}{\widetilde{p}_k}^2 < +\infty,\ \ \sum_{k=1}^{+\infty}{s_k}^2 < +\infty,\ \ \sum_{k=1}^{+\infty}{\widetilde{s}_k}^2 < +\infty. \tag{64}$$

Доказательство. Рассмотрим интегралы (17), (18), (30) и (31). Интегрируя их по частям три раза с учетом условий леммы, получим требуемые представления (63). Справедливость оценок (64) следует из неравенства Бесселя по тригонометрической системе.

В силу леммы 4 ряды (61) и (62) оцениваются соответственно числовыми рядами

$$C_{20}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|p_k| + |\widetilde{p}_k|}{k^2} + \frac{|s_k| + |\widetilde{s}_k|}{k^{1+\lambda}}\right) \tag{65}$$

и

$$C_{21}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(|p_k| + |\widetilde{p}_k| + |s_k| + |\widetilde{s}_k|\right). \tag{66}$$

Поскольку числовые ряды (65), (66) сходятся, то на основании признака Вейерштрасса ряды (42), (57), (58) сходятся равномерно на $\overline{D}$, а ряды (59), (60) на $\overline{D_\varepsilon}$. Поэтому функция $u(x,y)$, определяемая равенством (42), удовлетворяет условию (2). Подставляя ряды (59) и (60) в уравнение (1), убеждаемся, что функция $u(x, y)$, определяемая равенством (42), удовлетворяет и условию (3).

Таким образом доказана следующая теорема

Теорема 2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4 и выполнены условия (20) и (41). Тогда задача (2)–(5) однозначно разрешима, и это решение определяется рядом (42).

Литература

[1] Лернер М.Е., Репин О.А. О задачах типа задачи Франкля для некоторых эллиптических уравнений с вырождением разного рода // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1087–1093.

[2] Моисеев Е.И. О решении спектральным методом нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1094–1100.

[3] Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г. Об однозначной разрешимости нелокальной задачи для вырождающегося эллиптичесокго уравнения спектральным методом // Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы: труды международной конференции, посвященной юбилею академика В.А. Ильина, СФ АН РБ. Стерлитамак; Уфа: Гилем, 2003. Т. 1. С. 213–219.

[4] Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г. Существенно нелокальные задачи для вырождающегося эллиптического уравнения // Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики: материалы международного российско-казахского симпозиума. Нальчик: Эльбрус, 2004. С. 156–160.

[5] Сидоренко О.Г. Нелокальные задачи для вырождающихся уравнений различных типов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Стерлитамак: СГПА, 2007. 18 с.

[6] Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. АН РАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23–26.

[7] Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. Задача Дирихле второго рода в прямоугольной области // Известия вузов. Математика. 2007. № 4. С. 45–53.

[8] Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Иностр. лит., 1962. 351 с.

[9] Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в полуполосе // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 10. С. 1417–1422.

Поступила в редакцию 3/IX/2009;
в окончательном варианте — 3/IX/2009.

THE PROBLEM WITH PERIODICITY CONDITIONS FOR THE EQUATIONS OF MIXED TYPE WITH CHARACTERISTIC DEGENERACY

© 2009 I.P. Egorova[2]

For mixed type equation

$$Lu \equiv u_{xx} + sgny \cdot |y|^m u_{yy} = 0, \; 0 < m < 1$$

in a rectangular domain $\{(x,y)| \quad 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, where m, α, β — defined positive numbers, theorems of existence and uniqueness of the problem solvability with boundary solutions $u(0,y) = u(1,y)$, $u_x(0,y) = u_x(1,y)$, $-\alpha \leqslant y \leqslant \beta$; $u(x,\beta) = f(x)$, $u(x,-\alpha) = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ are proved by the method of spectral analysis.

Key words: eigenfunctions, spectral analysis.

Paper received 3/IX/2009.
Paper accepted 3/IX/2009.

[2]Egorova Irina Petrovna (ira.egorova81@yandex.ru), the Dept. of Higher Mathematics, Samara State Architectural and Building University, Samara, 443011, Russia.