

УДК 512.547.214, 512.743.7

## О НОСИТЕЛЯХ ХАРАКТЕРОВ УНИТРЕУГОЛЬНОЙ ГРУППЫ

© 2009 М.В. Игнатъев<sup>1</sup>

Для произвольной конечной группы  $G$  и произвольного ее неприводимого комплексного характера  $\chi$  множество  $\text{Supp}(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) \neq 0\}$  называется носителем характера  $\chi$ .

Пусть  $G = U$  — унитарная группа (группа унитарных матриц) над конечным полем достаточно большой характеристики. В работе вводится понятие  $i$ -регулярных характеров группы  $U$ , обобщающее регулярный и субрегулярный случаи, и дается описание носителей 2-регулярных характеров в терминах коэффициентов миноров характеристической матрицы.

**Ключевые слова:** унитарная группа, носитель характера,  $i$ -регулярные характеры.

### Введение

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p$  — произвольное простое число,  $q = p^r$  для некоторого  $r \geq 1$  и  $k = \mathbb{F}_q$  — конечное поле из  $q$  элементов. Обозначим через  $U = \text{UT}(n, k)$  унитарную группу — группу всех унитарных матриц с единицами на главной диагонали с элементами из поля  $k$ ; тогда  $\mathfrak{u} = \text{Lie}(U) = U - 1_n$ . Мы везде будем предполагать, что  $p \geq n$ ; в этом случае стандартные отображения  $\exp: \mathfrak{u} \rightarrow U$  и  $\ln: U \rightarrow \mathfrak{u}$  корректно определены, взаимно однозначны и взаимно обратны. Согласно методу орбит [5, 6], существует взаимно однозначное соответствие между сопряженными орбитами  $U$  и ее неприводимыми комплексными характерами. Оно устанавливается формулой  $\Omega \mapsto \chi$ , где

$$\chi(g) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{f \in \Omega} \theta(f(\ln(g))), \quad g \in U,$$

здесь  $\theta: k \rightarrow \mathbb{C}^*$  — произвольный фиксированный нетривиальный гомоморфизм.

---

<sup>1</sup>Игнатъев Михаил Викторович (mihail.ignatjev@gmail.com), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Полная классификация орбит для произвольного  $n$  неизвестна и представляется крайне сложной задачей. В то же время для отдельных серий орбит, допускающих точное описание, возникает задача получения замкнутой формулы для характера. Цель настоящей работы — определить носитель 2-регулярного характера (точные формулировки см. в § 1; основной результат сформулирован в теореме 2.4). Отметим, что соответствующие таким характеристам орбиты представляют частный случай орбит, ассоциированных с инволюциями [9].

## 1. Определение $i$ -регулярных характеров

Мы будем отождествлять  $\mathfrak{u}^*$  с  $\mathfrak{u}^t$ , используя невырожденную на  $\mathfrak{gl}_n(k)$  форму  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$ ; при этом *коприсоединенное представление* принимает простой вид  $x.f = \text{pr}(xfx^{-1})$ , где  $x \in U$ ,  $f \in \mathfrak{u}^*$ , а через  $\text{pr}$  обозначена проекция  $\mathfrak{gl}_n(k) \rightarrow \mathfrak{u}^*$  вдоль  $\mathfrak{u}$ . Положим  $\Phi^+ = \{(i, j) \mid 1 \leq j < i \leq n\}$  (назовем это множество множеством *положительных корней*). Для произвольного  $f \in \mathfrak{u}^*$  набор положительных корней вида  $\text{Supp}(f) = \{(i, j) \in \Phi^+ \mid f(e_{ij}) \neq 0\}$  будем называть *носителем* формы  $f$ .

Пусть теперь  $\sigma \in S_n$  — произвольная инволюция, то есть  $\sigma^2 = \text{id}$ . Тогда ее можно однозначно представить в виде произведения независимых 2-циклов:  $\sigma = (i_1, j_1) \cdot \dots \cdot (i_t, j_t)$  (будем считать, что  $i_l > j_l$  и  $j_1 < \dots < j_t$ ). *Носителем* инволюции  $\sigma$  мы назовем множество  $\{(i_1, j_1), \dots, (i_t, j_t)\} \subset \Phi^+$ . Для произвольного  $i$  определим инволюцию  $\sigma_i$  по правилу

$$\sigma_i = (n-1, 1)(n-2, 2) \dots (n-i, i)(n, i+1) \times \\ \times (n-i-1, i+2)(n-i-2, i+3) \dots (n-n_0+1, n_0),$$

где  $n_0 = [n/2]$ . В частности,  $\sigma_0$  — самый длинный элемент в группе  $S_n$ , рассматриваемой как группа Вейля типа  $A_{n-1}$ , и  $\sigma_i = \sigma_{n_0}$  для любого  $n_0 \leq i \leq n$ .

**Определение 1.1.** Орбиту  $\Omega = \Omega_i$  любого элемента  $f \in \mathfrak{u}^*$ , для которого  $\text{Supp}(f) = \text{Supp}(\sigma_i)$ , и соответствующий ей неприводимый характер  $\chi = \chi_i$  будем называть  *$i$ -регулярными*. Сам элемент  $f_i$  будем называть *канонической формой* на орбите  $\Omega_i$ .

Действуя, как в [4, § 3], легко показать, что на каждой  $i$ -регулярной орбите лежит ровно одна каноническая форма.

**Пример 1.2.** Согласно [7], *регулярные* орбиты (то есть орбиты максимальной размерности) — это 0-регулярные орбиты, и только они. Описание соответствующих характеров было получено не так давно К. Андре [1]. В то же время 1-регулярные орбиты относятся к *субрегулярным* (то есть имеют предмаксимальную размерность) [4]. Соответствующие характеры описаны в [3]. Заметим, что субрегулярные орбиты не исчерпываются 1-регулярными.

Для произвольного характера  $\chi$  группы  $U$  через  $\text{Supp}(\chi)$  обозначим его носитель — множество классов сопряженности, значение  $\chi$  на которых не равно нулю. Основной результат данной работы — получение явных уравнений, описывающих классы сопряженности, попадающие в носитель произвольного 2-регулярного характера.

## 2. Основная теорема

Нам понадобится несколько предварительных определений и обозначений.

**Определение 2.1.** Для произвольных  $1 \leq i, j \leq n$  будем называть  $\mathcal{R}_i = \{(i, b) \mid 1 \leq b < i\}$  и  $\mathcal{C}_j = \{(a, j) \mid j < a \leq n\}$  соответственно  $i$ -й строчкой и  $j$ -м столбиком  $\Phi^+$ . Следуя [1], подмножество  $D \subset \Phi^+$  назовем базисным, если  $D$  имеет не более одного общего элемента с каждым  $\mathcal{R}_i$  и  $\mathcal{C}_j$ .

Отметим, что для любого  $i$  носитель  $\sigma_i$  является базисным подмножеством. В то же время  $\Omega_i$  не совпадает с базисным подмножеством  $\mathfrak{u}^*$ , определенным в [2]. Для любого подмножества  $D \subset \Phi^+$  обозначим для краткости  $R_D(i, j) = \{(i, j)\} \cup \{(a, b) \in D \mid b > j \text{ и } a < i\}$ .

**Обозначение 2.2.** Пусть  $x = (x_{ij}) \in \text{Mat}(n, k)$ . Через  $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^{j_1, \dots, j_l}(g)$  обозначим минор матрицы  $x$ , натянутый на строки  $i_1, \dots, i_l$  и столбцы  $j_1, \dots, j_l$  для любых  $1 \leq l \leq n$ ,  $1 \leq i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l \leq n$  (строки и столбцы берутся в указанном порядке). Мы будем использовать обозначение  $\Delta^Y(x) = \Delta_{\sigma(i_1, \dots, i_l)}^{\tau(j_1, \dots, j_l)}(x)$ , где  $Y$  есть множество пар вида  $\{(i_1, j_1), \dots, (i_l, j_l)\}$ , а  $\sigma, \tau$  — перестановки, располагающие каждый из наборов индексов в неубывающем порядке. Если  $D \subset \Phi^+$ ,  $(i, j) \in \Phi^+$ , то для краткости будем писать  $d_{i,j}(x)$  вместо  $\Delta^{R_D(i,j)}(x)$ .

**Определение 2.3.** Пусть  $D$  — произвольное подмножество  $\Phi(n)$ . Корень  $(i, j) \in \Phi(n)$  называется  $D$ -регулярным, если  $(i, l) \notin D$  и  $(l, j) \notin D$  для любого  $i > l > j$ . Обозначим через  $R(D)$  объединение  $D$  с множеством всех  $D$ -регулярных корней (см. [1]).

Для произвольных  $2 \leq j \leq n_0$  и  $n_0 \leq i \leq n - 3$  рассмотрим следующие многочлены (их можно считать функциями на  $U$  или же элементами  $k[\mathfrak{u}]$ ):

$$\alpha_j(x) = \sum_{t=n-n_0+1}^{n-1} x_{n,t}x_{t,j}, \quad \beta_i^r(x) = \sum_{t=r+1}^{n_0} x_{i,t}x_{t,r}, \quad r = 1, 2, \quad x = (x_{ij}) \in U.$$

Пусть теперь  $\chi = \chi_2$  — произвольный 2-регулярный характер группы  $U$  и  $D \subset S = \text{Supp}(\sigma_2) \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{R}_n)$  (подмножество  $D$  обязательно является базисным). Введем следующие обозначения:

$$D_1 = D \cup (n-1, 1), D_2 = D_1 \cup (n-2, 2), D_3 = D_1 \cup (n, 3), D_0 = D_2 \cup (n, 3),$$

$$D_\alpha^1 = D \cup (n, n-1) \cup (3, 1), D_\alpha^2 = D_1 \cup (n, n-1) \cup (3, 2) \cup (n-2, 2), D_\beta = D_1 \cup (3, 2)$$

(отметим, что  $D_\alpha^1$  и  $D_\alpha^2$  уже не будут базисными подмножествами).

Наконец, для любого отображения  $\varphi: D \rightarrow k^*$  определим следующие подмножества в  $U$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_r &= \{x \in U \mid \alpha_i(x) = \beta_j^r(x), (i, j) \in D\}, \quad r = 1, 2, \\ \mathcal{L}_a^b &= \{x \in U \mid \xi_{b,n-b}x_{3,b} = \xi_{n,3}x_{n,n-a}\}, \quad 1 \leq a, b \leq 2, \\ \mathcal{K}_D^s(\varphi) &= \{x \in U \mid d_{i,j}(x-1) = 0, (i, j) \in R(D_s)\}, \quad s = 0, 1, 2, 3, \\ \mathcal{K}_D^{\alpha,r}(\varphi) &= \{x \in U \mid d_{i,j}(x-1) = 0, (i, j) \in R(D_\alpha^r)\} \cap \mathcal{K}_r \cap \mathcal{L}_1^r(\varphi), \quad r = 1, 2, \\ \mathcal{K}_D^\beta(\varphi) &= \{x \in U \mid d_{i,j}(x-1) = 0, (i, j) \in R(D_\beta)\} \cap \mathcal{K}_2 \cap \mathcal{L}_2^2(\varphi). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $f = (\xi_{ij}) \in \Omega = \Omega_2$  — каноническая форма на 2-регулярной орбите, соответствующей характеру  $\chi$ . Теперь все готово для того, чтобы сформулировать основной результат работы.

**Теорема 2.4.** Пусть  $\chi$  — 2-регулярный характер группы  $U$ ,  $\Omega \subset \mathfrak{u}^*$  — соответствующая орбита. Элемент  $x \in U$  содержится в  $\text{Supp}(\chi)$  тогда и только тогда, когда для какого-нибудь  $D \subset S$  выполнено ровно одно из следующих условий:

1.  $x_{3,2} \neq 0, x_{n,n-1} \neq 0$  и  $x \in \mathcal{K}_D^{\alpha,2}(\varphi)$ .
2.  $x_{3,2} = 0, x_{n,n-1} \neq 0$  и  $x \in \mathcal{K}_D^{\alpha,1}(\varphi)$ .
3.  $x_{3,2} \neq 0, x_{n,n-1} = 0$  и  $x \in \mathcal{K}_D^\beta(\varphi)$ .
4.  $x_{3,2} = 0, x_{n,n-1} = 0$  и  $x \in \mathcal{K}_D^s(\varphi)$  для какого-нибудь  $0 \leq s \leq 3$ .

**Схема доказательства.** Применим к группе  $U$  метод Макки полупрямого разложения (см., например [8]). Положим

$$\begin{aligned} U_1 &= \{x \in U \mid x_{ij} = 0 \text{ при } 2 \leq j < i \leq n\}, \\ V &= \{x \in U \mid x_{i,1} = 0, 2 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Тогда  $U = U_1V$ ,  $U_1 \cap V = \{1\}$  и  $U_1 \triangleleft U$ ; другими словами,  $U = U_1 \rtimes V$  — полупрямое произведение, причем подгруппа  $U_1$  абелева. Рассмотрим неприводимый характер  $U_1$  вида

$$\psi: U_1 \rightarrow \mathbb{C}: x \rightarrow \theta(\xi_{1,n-1}x_{n-1,1}).$$

Здесь, напомним,  $\theta: k \rightarrow \mathbb{C}^*$  — произвольный нетривиальный фиксированный гомоморфизм.

Легко проверить, что централизатор характера  $\psi$  в группе  $V$  имеет вид

$$V' = \{x \in V \mid x_{n-1,j} = 0, 2 \leq j \leq n-2\}.$$

Структура этой подгруппы, в свою очередь, очень проста:  $V' = V_1 \rtimes \tilde{U}$ , где, по определению,  $V_1 = \{1_n + \lambda e_{n,n-1}, \lambda \in k\}$  и  $\tilde{U} = \{x \in V' \mid x_{n,n-1} = 0\}$ . Очевидно, что  $V_1 \cong k$  и  $\tilde{U} \cong \text{UT}(n-2, k)$ .

Согласно методу Макки, это означает, что

$$\chi = \text{Ind}_{U_1V'}^U \left( \psi \cdot \text{Ind}_{V_1\tilde{U}}^{V_1} \tau \tilde{\chi} \right),$$

где  $\tau, \tilde{\chi}$  — некоторые неприводимые характеры групп  $V_1, \tilde{U}$  соответственно. Здесь и далее если  $G = A \times B$ , то каждый элемент  $g \in G$  однозначно представляется в виде  $g = ab, a \in A, b \in B$ ; поэтому для произвольного характера  $\mu$  группы  $A$  или  $B$  мы можем писать просто  $\mu(g)$ , имея в виду  $\mu(a)$  или  $\mu(b)$  соответственно. Используя метод орбит (рассматривая поляризации), можно показать, что  $\tau = 1$ , а  $\tilde{\chi}$  — субрегулярный характер группы  $\tilde{U} \cong UT(n-2, k)$ , соответствующий орбите  $\tilde{\Omega} = \pi(\Omega)$ . Здесь через  $\pi: \mathfrak{u}^* \rightarrow (\text{Lie}(\tilde{U}))^*$  обозначено отображение, соответствующее проекции  $U \rightarrow \tilde{U}$ . Это позволяет использовать описание носителя субрегулярного характера  $\tilde{\chi}$ , полученное в [3, теорема 2.8].

Рассмотрим, например, случай  $x_{3,2} \neq 0, x_{n,n-1} \neq 0$  (на самом деле, это технически самый сложный случай). Легко видеть, что множество  $T = \{t \in U \mid t_{ij} = 0 \text{ при } j \neq n-1\}$  можно выбрать в качестве полной системы представителей  $U/U_1V'$ . Применяя стандартную технику индуцированных характеров и простые матричные вычисления, можно показать, что

$$\chi(x) = c \sum_{\{t \in T \mid x_t \in U_1V'\}} \psi(x_t) \tilde{\chi}(x_t), \quad (2)$$

где  $x_t = t^{-1}xt$ , а  $c \in k^*$  — некоторая константа. Более того,  $(x_t)_{i,j} = x_{i,j}$  при  $i \leq n-2$ , в то время как для любого  $2 \leq j \leq n-2$

$$\begin{aligned} (x_t)_{n-1,j} &= x_{n-1,j} - \sum_{i=j+1}^{n-2} t_{n-1,i} x_{i,j}, \\ (x_t)_{n,j} &= x_{n,j} + x_{n,n-1} t_{n-1,j}. \end{aligned} \quad (3)$$

Условие  $x_t \in U_1V'$  есть в точности условие совместности системы  $(x_t)_{n-1,j} = 0, 2 \leq j \leq n-2$ , которое с учетом [3, лемма 5.1] и критерия Кронекера – Капелли имеет вид  $d_{n-1,j}(x) = 0$ , если  $2 \leq j \leq n-2$  и  $(i, j) \notin D$ . Требуя, чтобы  $x_t \in \text{Supp}(\tilde{\chi})$ , мы получим, учитывая (3) и используя опять [3, лемма 5.1], что  $\alpha_j(x) = 0$ , если  $(i, j) \in D$ . Далее, для любого  $\lambda \in k^*$ , как известно,  $\sum_{\eta \in k} \theta(\eta\lambda) = 0$ . Значит, после того как мы выразим из (3) часть  $t_{n-1,j}$  и подставим их в формулу (2), нужно приравнять к нулю коэффициенты при оставшихся  $t_{n-1,j}$ . Отсюда мы получим, что  $\beta_i^r(x) = 0$ , если  $(i, j) \in D$ , и  $d_{i,1}(x) = 0$ , если  $2 \leq i \leq n-2$  и  $(i, j) \in D$ . Здесь ключевую роль играет тот факт, что, согласно [3, лемма 5.1],

$$\xi_{2,n-2} x_{3,2} = \xi_{3,n} (x_{n,n-2} + x_{n,n-1} t_{n-1,n-2}),$$

поэтому  $t_{n-1,n-2}$  однозначно выражается через  $x_{ij}$ .

То, что  $x$  удовлетворяет остальным уравнениям  $\mathcal{K}_D^{\alpha,2}(\varphi)$ , гарантируется [3, лемма 5.1]. Остальные случаи разбираются аналогично.  $\square$

Отметим, что подмногообразия (1) не являются классами сопряженности: каждое из них, вообще говоря, есть объединение классов сопряженности, уравнения которых можно получить, действуя аналогично [3, § 3]. Обратим внимание на то, что многочлены  $\alpha_j$  и  $\beta_i^r$  нельзя представить в виде миноров матриц из  $U$  (иначе говоря, для описания 2-регулярных характеров миноров недостаточно). На самом деле, эти многочлены можно

получить как некоторые коэффициенты миноров так называемой *характеристической матрицы* (см. [4]). В терминах коэффициентов таких миноров описываются субрегулярные характеры и орбиты, ассоциированные с инволюциями, а также вообще все орбиты при  $n \leq 7$  (см. [3, 4, 9]). Можно предположить, что в этих терминах описываются вообще все характеры и орбиты унитарной группы для произвольного  $n$ .

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. А.Н. Панову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

## Литература

- [1] Andre C.A.M. The basic character table of the unitriangular group // J. Algebra. 2001. V. 241. P. 437–471.
- [2] Andre C.A.M. Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group // J. Algebra. 1995. V. 176. P. 959–1000.
- [3] Игнатъев М.В. Субрегулярные характеры унитарной группы над конечным полем // Фунд. и прикл. матем. 2007. Т. 13. Вып. 5. С. 103–125 (см. также arXiv: math.RT/0603649v3).
- [4] Игнатъев М.В., Панов А.Н. Коприсоединенные орбиты группы  $UT(7, K)$  // Фунд. и прикл. матем. 2007. Т. 13. Вып. 5. С. 127–159 (см. также arXiv: math.RT/0603649).
- [5] Kazhdan D. Proof of Springer’s hypothesis // Israel J. Math. 1977. V. 28. P. 272–286.
- [6] Кириллов А.А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли // УМН. 1962. Т. 17. С. 57–110.
- [7] Кириллов А.А. Метод орбит и конечные группы. М.: МЦНМО; МК НМУ, 1998.
- [8] Lehrer G.I. Discrete series and the unipotent subgroup // Compositio Math. 1974. V. 28. No. 1. P. 9–19.
- [9] Панов А.Н. Инволюции в  $S_n$  и ассоциированные коприсоединенные орбиты // Зап. науч. семинара ПОМИ. 2007. Т. 349. С. 150–173 (см. также arXiv: math.RT/0801.3022v1).

Поступила в редакцию 2/IX/2009;  
в окончательном варианте — 2/IX/2009.

## ON SUPPORTS OF CHARACTERS OF THE UNITRIANGULAR GROUP

© 2009 M.V. Ignatev<sup>2</sup>

Let  $G$  be a finite group and  $\chi$  be its irreducible complex character. The set  $\text{Supp}(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) \neq 0\}$  is called the support of  $\chi$ .

Let  $G = U$  be the unitriangular group (i.e., the group of unipotent triangular matrices) over a finite field of sufficiently large characteristic. In the paper we introduce the notion of  $i$ -regular character and describe the support of a 2-regular character in terms of coefficients of minors of the characteristic matrix.

**Key words:** the unitriangular group, the support of a character,  $i$ -regular characters.

Paper received 2/IX/2009.

Paper accepted 2/IX/2009.

---

<sup>2</sup>Ignatev Mikhail Viktorovich (mihail\_ignatev@mail.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.