

УДК 514.772

СМЕШАННЫЕ ФОРМЫ ОБЪЕМА И КОМПЛЕКСНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА МОНЖА – АМПЕРА НА ТОРЕ¹

© 2009 В.Н. Кокарев²

Рассматривается обобщение проблемы Калаби. В аналитической трактовке оно приводит к комплексному уравнению Монжа – Ампера на кэлеровом многообразии, содержащему смешанный дискриминант данной и искомой метрик. В случае, когда кэлерово многообразие является плоским комплексным тором, получены достаточные условия разрешимости.

Ключевые слова: кэлерово многообразие, уравнение Монжа – Ампера.

1. Обобщение проблемы Калаби

Одна из эквивалентных формулировок проблемы Калаби такова [1, т. 1(2.101); т. 2(11.33)]: пусть (M, g^0) — компактное кэлерово многообразие комплексной размерности n . Любая ли $2n$ -форма μ , индуцирующая ориентацию M , является формой объема некоторой кэлеровой метрики g на M ? При этом кэлеровы формы ω_0 и ω метрик g^0 и g должны быть когомологичны.

Локально форма объема для кэлеровой метрики g^0 равняется

$$i^{n^2} \det g^0 dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n = \omega_0^n / n!.$$

Обозначим ее через dV_{g^0} . Форма μ пропорциональна с положительным коэффициентом форме объема для метрики g^0 , то есть $\mu = i^{n^2} e^F \det g^0 dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n$, а форма объема метрики g есть $i^{n^2} \det g dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n = \omega^n / n!$. Так как формы ω и ω_0 когомологичны, то на многообразии M существует такая вещественная функция φ , что $\omega = \omega_0 + \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi$. Поэтому получается уравнение $(\omega_0 + \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi)^n = e^F \omega_0^n$ с условием, что $\omega_0 + \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi$ есть кэлерова форма положительно определенной кэлеровой

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00151) и АВЦП (грант № 3341).

²Кокарев Виктор Николаевич (ko1949@yandex.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

метрики. Локально уравнение выглядит следующим образом:

$$\det(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) = e^F \det(g_{\alpha\bar{\beta}}^0).$$

Разрешимость этого уравнения относительно функции φ , эквивалентная положительному ответу в проблеме Калаби, была доказана С.Т. Яу в [2].

Пусть теперь g^1, \dots, g^n — кэлеровы метрики на кэлеровом многообразии M , $\omega_1, \dots, \omega_n$ — соответствующие кэлеровы формы. Так как формы четной степени при внешнем перемножении коммутируют, то $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n / n!$ является множителем при $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ в выражении $(\lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_n \omega_n)^n / n!$. По аналогии со смешанными дискриминантами и смешанными объемами естественно называть $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n / n!$ смешанной формой объема для метрик g_1, \dots, g_n или их кэлеровых форм $\omega_1, \dots, \omega_n$. В частности, $\omega_1^m \wedge \omega_2^{n-m} / n!$ будем называть смешанной формой объема m -го порядка для метрик g_1 и g_2 . Очевидно, локально $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n / n! = i^{n^2} D(g^1, \dots, g^n) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge \Lambda d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge \Lambda d\bar{z}^n$, где D обозначает смешанный дискриминант форм g^1, \dots, g^n .

Сформулируем **обобщение проблемы Калаби**. Пусть M, g^0 — компактное кэлерово многообразие комплексной размерности n . Любая ли $2n$ -форма μ , индуцирующая ориентацию на M , является смешанной формой объема m -го порядка некоторой кэлеровой метрики g и данной метрики g^0 ? Кэлеровы формы метрик g и g^0 также должны быть когомологичны.

Опять обозначив кэлеровы формы для метрик g и g^0 через ω и ω_0 соответственно и взяв $\mu = e^F \omega_0^n / n!$, с учетом когомологичности ω и ω_0 получаем уравнение

$$(\omega_0 + \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi)^m \wedge \omega_0^{n-m} = e^F \omega_0^n \quad (1)$$

относительно неизвестной вещественной функции φ такой, что форма $(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ положительно определена. Будем считать, что функция F и метрика g^0 принадлежат классу $C^{k,\alpha}(M)$, $k \geq 2, 0 < \alpha < 1$.

2. Необходимое условие разрешимости уравнения (1)

Пусть $\omega_0 = \frac{i}{2} g_{\alpha\bar{\beta}}^0 dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ — кэлерова форма метрики g_0 . Пусть $\rho = \frac{i}{4} (\bar{\partial} \varphi - \partial \varphi)$. Как известно, форма ω_0 замкнута, если метрика g^0 кэлерова. Кроме того, $d\rho = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi$. Значит,

$$(\omega_0 + \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi)^m \wedge \omega_0^{n-m} = (\omega_0 + d\omega_1)^m \wedge \omega_0^{n-m}. \quad (2)$$

Далее, $(\omega_0 + d\rho)^m \wedge \omega_0^{n-m} = (\omega_0 + d\rho)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m+1} + d\rho \wedge (\omega_0 + d\rho)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m} = (\omega_0 + d\rho)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m+1} + d(\rho \wedge (\omega_0 + d\rho)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m})$.

Продолжая этот процесс, получаем, что форма в (2) и форма

$$\omega_0^n = n! dV_{g_0} \quad (3)$$

когомологичны. Форма dV_{g^0} является формой объема многообразия M для метрики g^0 . Интегрируя (1), получаем с учетом когомологичности форм (2) и (3), что объем многообразия M относительно метрики g^0

$$\text{Vol}_{g^0}(M) = \int_M e^F dV_{g^0}. \quad (4)$$

Это необходимое условие разрешимости уравнения (1). Для случая $m = n$ (проблема Калаби) оно является достаточным [2]. Как мы увидим ниже, для $m < n$ это уже не так.

3. Единственность решения уравнения (1)

Здесь мы докажем, что форма ω , удовлетворяющая уравнению $\omega^m \wedge \wedge \omega_0^{n-m} = e^F \omega_0^n$, единственна при условии, что классы когомологий $[\omega]$ и $[\omega_0]$ совпадают, и ω является кэлеровой формой положительно определенной метрики.

Греческие индексы у нас будут принимать значения от 1 до n . Дифференцирование по переменным $z^\alpha, \bar{z}^\beta, \dots$ в соответствующей карте будем обозначать запятой и индексами $\alpha, \bar{\beta}, \dots$ внизу.

Пусть уравнение (1) имеет два таких решения φ и $\tilde{\varphi}$, что формы $(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}) dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ и $(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \tilde{\varphi}_{,\alpha\bar{\beta}}) dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ положительно определенные. Тогда, обозначив $\tilde{\rho} = \frac{i}{4}(\bar{\partial}\tilde{\varphi} - \partial\tilde{\varphi})$, из (2) получим

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega_0 + d\rho)^m \wedge \omega_0^{n-m} - (\omega_0 + d\tilde{\rho})^m \wedge \omega_0^{n-m} = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (\omega_0 + d\rho)^k \wedge (\omega_0 + d\tilde{\rho})^{m-k-1} \wedge \omega_0^{n-m} \wedge (d\rho - d\tilde{\rho}). \end{aligned} \quad (5)$$

В силу канонического изоморфизма $\Lambda^{n-1, n-1}(M) \simeq \Lambda^{*1,1} \otimes \Lambda^{n,n}(M)$ уравнение (5) в локальных координатах можно записать так

$$\sum_{k=0}^{m-1} M_k^{\gamma\bar{\delta}} (\varphi - \tilde{\varphi})_{,\gamma\bar{\delta}} = 0.$$

Докажем, что $(M_k^{\gamma\bar{\delta}})$ является матрицей эрмитовой положительно определенной формы для любого k .

Если $\Psi = \psi_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$, то $(\omega_0 + d\omega_1)^k \wedge (\omega_0 + d\tilde{\omega}_1)^{m-k-1} \wedge \omega_0^{n-m} \wedge \Psi = M_k^{\gamma\bar{\delta}} \psi_{\gamma\bar{\delta}} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n$, где $M_k^{\gamma\bar{\delta}} \psi_{\gamma\bar{\delta}}$ равняется смешанному дискриминанту соответствующих форм (см. п. 1). Тогда эрмитовость матрицы $(M_k^{\gamma\bar{\delta}})$ следует из того, что этот смешанный дискриминант является действительным числом для любой эрмитовой матрицы $(\psi_{\alpha\bar{\beta}})$, а положительная определенность имеет место в силу того, что он положителен для любой эрмитовой положительно определенной матрицы $(\psi_{\alpha\bar{\beta}})$.

Тогда матрица $(\sum_{k=0}^{m-1} M_k^{\alpha\bar{\beta}})$ тоже положительно определенная. Отсюда и из компактности многообразия M получаем, что эллиптическое на решении $\varphi - \tilde{\varphi}$ уравнение (5) может иметь решениями только константы, то есть $\varphi - \tilde{\varphi} = \text{const}$. Если на решение (1) наложить условие $\min_M \varphi = 0$, то $\varphi = \tilde{\varphi}$. Единственность решения уравнения (1) доказана.

4. Априорные оценки решения уравнения (1) на плоском комплексном торе

Пусть многообразие M плоское. Так как любое плоское компактное кэлерово многообразие голоморфно накрывается комплексным тором [1, форм. (2.60)], то без ограничения общности можно считать, что M комплексный тор. При доказательстве разрешимости уравнения (1) при $1 < m < n$ будет использован метод продолжения по параметру. Для применения этого метода требуется наличие априорных оценок искомого решения в метрике C^{2,α_0} с некоторым $\alpha_0 \in (0, 1)$. В этом параграфе мы найдем достаточные условия, которые будут гарантировать существование нужных оценок.

Введем на M еще одну метрику \tilde{g} (вообще говоря не кэлерову), определив координаты контравариантного метрического тензора формулой

$$\tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial D(\overbrace{g_{\alpha\bar{\beta}}, \dots, g_{\alpha\bar{\beta}}}^m, g_{\alpha\bar{\beta}}^0, \dots, g_{\alpha\bar{\beta}}^0)}{\partial g_{\beta\bar{\alpha}}} \frac{1}{D(\underbrace{g_{\alpha\bar{\beta}}, \dots, g_{\alpha\bar{\beta}}}^m, g_{\alpha\bar{\beta}}^0, \dots, g_{\alpha\bar{\beta}}^0)},$$

где в правую часть нужно подставить $g_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}$.

Введем в окрестности фиксированной точки $p \in M$ голоморфные координаты z^1, \dots, z^n так, что $g^0 = \sum_{\alpha=1}^n dz^\alpha d\bar{z}^\alpha$, а в точке p $\varphi_{,\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}}$. Тогда в точке p матрица $(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}) = \text{diag}\{1 + \varphi_{,1\bar{1}}, \dots, 1 + \varphi_{,n\bar{n}}\}$. В силу положительной определенности метрики g $1 + \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}} > 0$. Обозначим $1 + \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}} = R_\alpha$.

Уравнение (1) в точке p принимает вид

$$S_m = C_n^m e^F,$$

а матрица $(\tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}) = \text{diag}\{\frac{S_{m-1}^1}{S_m}, \dots, \frac{S_{m-1}^n}{S_m}\}$, где S_m — m -я элементарная симметрическая функция от R_1, \dots, R_n , S_{m-1}^α — $(m-1)$ -я элементарная симметрическая функция от R_1, \dots, R_n кроме R_α . Пусть Δ — оператор Лапласа — Бельтрами относительно метрики g^0 . Тогда

$$\Delta F = g^{\alpha\bar{\beta}} F_{,\alpha\bar{\beta}} = \sum_{\gamma=1}^n F_{,\gamma\bar{\gamma}}.$$

Введем лапласиан $\tilde{\Delta}$ формулой

$$\tilde{\Delta} \Phi = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} \Phi_{,\alpha\bar{\beta}}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\Delta\varphi) - \Delta F \geq & - \sum_{\gamma=1}^n \frac{S_{m-2}^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}\gamma} \varphi_{,\beta\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{S_m} + \sum_{\gamma=1}^n \frac{S_{m-1}^{\alpha} S_{m-1}^{\beta} \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}\gamma} \varphi_{,\beta\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{S_m^2} + \\ & + \frac{S_{m-2}^{\gamma\beta} \varphi_{,\beta\bar{\beta}\gamma} \varphi_{,\beta\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{S_m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}\varphi = \tilde{g}^{\gamma\bar{\gamma}} \varphi_{,\gamma\bar{\gamma}} & = \frac{S_{m-1}^{\gamma} (\varphi_{,\gamma\bar{\gamma}} + 1 - 1)}{S_m} = \frac{1}{S_m} \left(S_{m-1}^{\gamma} R_{\gamma} - \sum_{\gamma=1}^n S_{m-1}^{\gamma} \right) = \\ & = m - \frac{(n-m+1)S_{m-1}}{S_m}. \end{aligned} \quad (7)$$

Положив в неравенстве А.Д. Александрова [3]

$$D^{m-1}(\underbrace{e, f, \dots, f}_m, e, \dots, e) \geq D(\underbrace{e, \dots, e}_m, f, e, \dots, e) D^{m-2}(\underbrace{f, \dots, f}_m, e, \dots, e)$$

$f = \text{diag}\{R_1, \dots, R_n\}$, $e = \text{diag}\{1, \dots, 1\}$, получим для средних $p_{m-1} \geq p_1^{1/m-1} p_m^{(m-2)/(m-1)}$. Тогда, учитывая, что $S_1 = n + \Delta\varphi$, получаем

$$\frac{(n-m+1)S_{m-1}}{S_m} \geq m \left(\frac{n + \Delta\varphi}{n} \right)^{1/m-1} e^{-F/m-1}.$$

Отсюда и из (7)

$$\tilde{\Delta}\varphi \leq m \left(1 - \left(\frac{n + \Delta\varphi}{n} \right)^{1/m-1} e^{-F/m-1} \right). \quad (8)$$

Используя неравенство Коши, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(n + \Delta\varphi)) & \geq -e^{-c\varphi}(n + \Delta\varphi)^{-1} \tilde{g}^{\gamma\bar{\gamma}}(\Delta\varphi)_{,\gamma}(\Delta\varphi)_{,\bar{\gamma}} - \\ & - ce^{-c\varphi} \tilde{\Delta}\varphi(n + \Delta\varphi) + e^{-c\varphi} \tilde{\Delta}(\Delta\varphi). \end{aligned}$$

Отсюда, используя (6)–(8), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(n + \Delta\varphi)) & \geq e^{-c\varphi} \left(- \sum_{\gamma=1}^n \frac{S_{m-1}^{\gamma}}{S_1 S_m} \left(\sum_{\alpha=1}^n \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}\gamma} \right) \left(\sum_{\alpha=1}^n \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \right) - \right. \\ & - c(n + \Delta\varphi)m \left(1 - \left(\frac{n + \Delta\varphi}{n} \right)^{1/m-1} e^{-F/m-1} \right) - \sum_{\gamma=1}^n \frac{S_{m-2}^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}\gamma} \varphi_{,\beta\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{S_m} + \\ & \left. + \sum_{\gamma=1}^n \frac{S_{m-1}^{\alpha} S_{m-1}^{\beta} \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}\gamma} \varphi_{,\beta\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{S_m^2} + \sum_{\beta,\gamma=1}^n \frac{S_{m-2}^{\gamma\beta} \varphi_{,\beta\bar{\beta}\gamma} \varphi_{,\beta\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{S_m} + \Delta F \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь квадратичное по третьим производным выражение в правой части неотрицательно.

В силу компактности многообразия M функция $e^{-c\varphi}(n + \Delta\varphi)$ достигает максимума в некоторой точке p_0 , в которой получаем

$$-mn \left(\frac{n + \Delta\varphi}{n} \right) \left(1 - \left(\frac{n + \Delta\varphi}{n} \right)^{1/m-1} e^{-F/m-1} \right) + \frac{\Delta F}{c} \leq 0,$$

где значения всех функций надо считать в точке p_0 . Обозначив

$$\left(\frac{n + \Delta\varphi}{n} \right)^{1/m-1} (p_0) = y, \quad (10)$$

получим

$$y^m e^{-F/m-1} - y^{m-1} + \frac{\Delta F}{mnc} \leq 0. \quad (11)$$

Обозначим

$$\varepsilon = \max \left\{ \max_M \sqrt{\frac{|\Delta F|}{mn}}, \max_M \frac{|F|}{m-1} \right\}. \quad (12)$$

Выберем $c = \varepsilon$. Будем пока считать $\varepsilon < \frac{1}{3m}$. Впоследствии на ε придется наложить более жесткие ограничения.

Из (11) получаем

$$(1 - \varepsilon)y^m - y^{m-1} - \varepsilon \leq 0.$$

Отсюда

$$y^{m-1} < 1 + 3(m-1)\varepsilon. \quad (13)$$

Действительно, если $y^{m-1} \geq 1 + 3(m-1)\varepsilon$, то $y^m = (y^{m-1})^{m/m-1} > 1 + 3m\varepsilon$ и $(1 - \varepsilon)y^m - y^{m-1} - \varepsilon > \varepsilon(1 - 3m\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon < \frac{1}{3m}$.

Из (13) получаем, что для любой точки $p \in M$

$$e^{-\varepsilon\varphi} \left(1 + \frac{\Delta\varphi}{n} \right) (p) \leq e^{-\varepsilon\varphi} \left(1 + \frac{\Delta\varphi}{n} \right) (p_0) \leq e^{-\varepsilon\varphi(p_0)} (1 + 3(m-1)\varepsilon).$$

Отсюда, считая, что $\min_M \varphi = 0$, получаем

$$1 + \frac{\Delta\varphi}{n} \leq (1 + 3(m-1)\varepsilon) e^{\varepsilon \max_M \varphi}. \quad (14)$$

Так как $n + \Delta\varphi = S_1$, а $\frac{S_1}{n} \geq \left(\frac{S_m}{C_n^m} \right)^{1/m} = e^{F/m}$, то

$$\Delta\varphi \geq n(e^{F/m} - 1) \geq n(e^{\varepsilon(1-m)/m} - 1) \geq \frac{\varepsilon n(1-m)}{m}. \quad (15)$$

Пусть $L_1 \leq \dots \leq L_{2n}$ — длины замкнутых геодезических $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$, пересекающихся в точке p . Хотя бы одна из них γ_k не касается поверхности $\varphi = \varphi(p)$. Построим функцию $\omega = \frac{\varepsilon n(1-m)x_k^2}{2m}$ для $0 \leq x_k \leq L_k + \varepsilon_1$, где x_k — декартова координата в направлении $\dot{\gamma}_k$. Тогда $\Delta(\varphi - \omega) \geq 0$. Следовательно, функция $\varphi - \omega$ достигает максимума на границе, заданной уравнением $\varphi = \varphi(p)$. Отсюда получаем оценку

$$\varphi \leq \frac{\varepsilon n(m-1)L_{2n}^2}{2m}. \quad (16)$$

Подставив ее в (14), получаем оценку сверху на $\Delta\varphi$.

Теперь, имея из (14), (15) оценку на $|\Delta\varphi|$ и оценку $|\varphi|$ [4, § 5.5, теорема 4], получаем оценку $|\nabla\varphi|$. Итак, получена C^2 – оценка решения уравнения (1). Но для эллиптичности уравнения (1) нужно, чтобы все R_α были положительны. Для этого достаточно, чтобы

$$S_1 < (n-1) \left(\frac{S_m}{C_n^m} \right)^{1/m} \left(\frac{n}{n-m} \right)^{1/m}. \quad (17)$$

Действительно, если $R_1 \geq \dots \geq R_n = 0$, то средние для R_1, \dots, R_{n-1} удовлетворяют неравенству $\frac{S_1}{n-1} \geq \left(\frac{S_m}{C_{n-1}^m} \right)^{1/m}$. Следовательно, $S_1 \geq (n-1) \left(\frac{S_m C_n^m}{C_n^m C_{n-1}^m} \right)^{1/m}$, что противоречит (17). Из определения ε получаем, что для выполнения (17) достаточно, чтобы

$$n + \Delta\varphi \leq (n-1) e^{\varepsilon(1-m)/m} \left(\frac{n}{n-m} \right)^{1/m}.$$

Из (14), (16) получаем, что последнее неравенство выполняется при

$$n(1 + 3(m-1)\varepsilon) e^{\varepsilon^2 n(m-1)L_{2n}^2/2m} < (n-1) e^{\varepsilon(1-m)/m} \left(\frac{n}{n-m} \right)^{1/m}.$$

Для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы

$$\varepsilon < \frac{1}{3(L_{2n} + m)^2 n^3}. \quad (18)$$

При выполнении условия (18) уравнение (1) будет эллиптическим на искомом решении. Существование C^{2,α_0} – оценки для функции φ теперь следует из [5, теорема 7.2].

5. Условие разрешимости уравнения (1)

При $1 < m < n$ разрешимость уравнения (1) будем доказывать методом продолжения по параметру. Включим уравнение (1) в семейство уравнений

$$(\omega_0 + \frac{i}{2} \partial\bar{\partial}\varphi)^m \wedge \omega_0^{n-m} = (te^F + 1 - t)\omega_0^n \quad (19)$$

$t \in [0, 1]$. При $t = 1$ уравнение (19) превращается в уравнение (1). При $t = 0$ уравнение (19) при условии $\min \varphi = 0$ имеет единственное решение $\varphi = 0$ (см. п. 3). При выполнении необходимого условия (4) на правую часть уравнения (1) такое же условие выполняется для правой части уравнения (19):

$$\text{Vol}_{g^0}(M) = \int_M (te^F + 1 - t) dV_{g^0}.$$

Пусть $e^\Phi = te^F + 1 - t$, $\Phi = \ln(te^F + 1 - t)$. Обозначим

$$\varepsilon_t = \max \left\{ \max_M \sqrt{\frac{|\Delta \ln(te^F + 1 - t)|}{mn}}, \max_M \frac{|\ln(te^F + 1 - t)|}{m-1} \right\}$$

и потребуем, чтобы для ε_t выполнялось условие (18). Тогда решения уравнения (19) при $t \in [0, 1]$ допускают C^{2,α_0} оценку, и это позволяет как, в [6, 7], гарантировать его разрешимость при $t = 1$.

Таким образом, доказана

Теорема. Пусть M — n -мерный плоский комплексный тор с кэлеровой формой ω_0 . Чтобы форма $\mu = e^F \omega_0$ являлась формой смешанного объема m -го порядка ($1 < m < n$) для единственной из того же класса, что и ω_0 кэлеровой формы ω и формы ω_0 , достаточно выполнения условий

$$1) \quad \int_M e^F \omega_0 = \int_M \omega_0,$$

$$2) \quad \varepsilon_t < \frac{1}{3(L_{2n+m})^2 n^3}, \quad t \in [0, 1],$$

$$\text{где } \varepsilon_t = \max \left\{ \max_M \sqrt{\frac{|\Delta \ln(te^F + 1 - t)|}{mn}}, \max_M \frac{|\ln(te^F + 1 - t)|}{m-1} \right\},$$

L_{2n} — длина $2n$ -й в порядке возрастания замкнутой геодезической. Если $\omega_0, F \in C^{k,\alpha}(M)$, $k \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, то $\omega \in C^{k,\alpha}$, если ω_0 и F вещественно аналитические, то форма ω вещественно аналитическая.

Литература

- [1] Бессе А. Многообразия Эйнштейна: в 2 т. М.: Мир, 1990. Т. 1, 2. 704 с.
- [2] Yau S.T. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge – Ampere equation, I // Comm. Pure Appl. Math. 1978. V. 31. P. 339–411.
- [3] Александров А.Д. Смешанные дискриминанты и смешанные объемы // Матем. сб. 1938. Т. 3. № 2. С. 227–251.
- [4] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 352 с.
- [5] Ивочкина Н.М. Решение задачи Дирихле для уравнений кривизны порядка m // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 7. С. 867–887.
- [6] Погорелов А.В. Многомерная проблема Минковского. М.: Наука, 1975. 96 с.
- [7] Миранда К. Уравнения в частных производных эллиптического типа. М.: Иностран. лит., 1957. 256 с.
- [8] Кокарев В.Н. Комплексное уравнение типа Монжа – Ампера на торе // Геометрия в Одессе — 2009: тез. докл. международной конференции. Одесса, 2009. С. 50.

Поступила в редакцию 6/VII/2009;
в окончательном варианте — 6/VII/2009.

MIXED VOLUME FORMS AND COMPLEX EQUATION OF MONGE – AMPERE TYPE ON A TORUS

© 2009 V.N. Kokarev³

In this article a generalization of a Calabi problem is considered. In the analytical treatment it leads to the complex Monge – Ampere equation on Kähler manifold containing the mixed discriminant of the given and retrieved metrics. For the case when Kähler manifold is a flat complex torus, sufficient conditions for solvability are obtained.

Key words: Kähler manifold, Monge – Ampere equation.

Paper received 6/VII/2009.

Paper accepted 6/VII/2009.

³Kokarev Viktor Nikolaevich (ko1949@yandex.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.