УДК 517.984.4

О НАПРАВЛЕННОМ ВОЗМУЩЕНИИ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2009 Е.М. Малеко[1]

Под направленно возмущенным оператором будем понимать оператор, который построен путем возмущения дискретного оператора операторами сдвига, причем таким образом, что одной из собственных функций построенного оператора является любая наперед заданная ненулевая функция из области определения исходного оператора. При решении задач теоретической физики часто используют спектр исследуемого оператора, притом во многих случаях лишь дискретную его часть, а иногда совместно с собственными (и присоединенными) функциями. Наверное, для исследователя было бы немаловажным знать, что можно, возмущая исходный оператор, получать оператор с похожим на первоначальный спектром и наперед заданной функцией, являющейся какой угодно по номеру собственной функцией возмущенного оператора.

Ключевые слова: спектр, дискретный оператор, гильбертово пространство.

1. Постановка задачи

Термины, связанные с "направлениями" операторов (функций, функционалов и т.п.) достаточно распространены и существуют давно. К примеру, хорошо известен принадлежащий М.Г. Крейну (см. [1, 2]) термин *направляющий функционал*, построенный следующим образом:
для функции $f \in \mathbb{H}'$

$$\Phi_j(f,\lambda) = \int\limits_a^b f(x) y_j(x,\lambda) dx, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{1.1}$$

где $\mathbb{H}'$ – совокупность всех функций из $L_2(a,b)$, равных нулю вне некоторого промежутка $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ (своего для каждой функции),
$y_j = y_j(x,\lambda)$, $j = 1,\ldots,2n$ — фундаментальная система решений уравнения

[1]Малеко Евгений Михайлович (emaleko@rambler.ru, mgtu@magtu.ru), кафедра математики Магнитогорского государственного технического университета, 455000, Россия, Магнитогорск, пр. Ленина, 38.

$l(y) = \lambda y$, $y_j^{[k-1]}(x_0, \lambda) = \delta_{jk}$, $x_0 \in (a, b)$, δ_{jk} — символ Кронекера, $y_j^{[\nu]}$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, — ν-я квазипроизводная функции y_j (по первому аргументу).

Линейные функционалы Φ_j, определенные в $\mathbb{H}'$ по формуле (1.1), называются *направляющими функционалами* самосопряженного дифференциального выражения $l(y)$.

Одно из основных свойств направляющих функционалов $\Phi_j(f, \lambda)$ следующее: если $f \in D_L \cap \mathbb{H}'$, то при любом вещественном λ

$$\Phi_j(Lf, \lambda) = \lambda \Phi_j(f, \lambda), \tag{1.2}$$

где L – самосопряженное расширение симметрического оператора, порожденного дифференциальным выражением $l(y)$. Никакой роли функционалы Φ_j в данной работе не играют, однако в какой-то степени оправдывают, благодаря (1.2), правильность выбранного термина *направленно возмущенный оператор*.

Итак, изучая в некотором контакте с авторами статей [3–7] приложения теории регуляризованных следов, пришлось столкнуться с тем фактом, что поправки возмущений обнулялись тогда, когда в качестве оператора возмущения рассматривался оператор сдвига

$$P_m y_j = y_{j+m},$$

где y_s $(s \in \mathbb{N})$ – собственные функции дискретного оператора A, образующие в СГП $\mathbb{H}$ ортонормированный базис (под СГП $\mathbb{H}$ будем понимать сепарабельное гильбертово пространство над полем комплексных чисел). Тогда (см. [12, с. 330–340]) справедливы системы равенств

$$\sum_{i=1}^{m} (\mu_i^n - \lambda_i^n) = 0, \quad n = \overline{1, m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Здесь λ_i – собственные числа оператора A, μ_i – собственные числа возмущенного оператора $T = A + P_m$. Автору этот факт показался небезынтересным, всвязи с чем и возникли представленные ниже соображения (см. также [9, 10]).

Пусть A — действующий в СГП $\mathbb{H}$ дискретный оператор, собственные числа λ_i, $i \in \mathbb{N}$ которого простые и занумерованы в порядке возрастания модулей, а соответствующие собственные функции φ_i образуют в $\mathbb{H}$ ортонормированный базис. Будем полагать, что оператор A удовлетворяет условию (1.3), то есть *для любого натурального числа k найдется положительное число $N(k)$ такое, что для всех $i \geqslant N(k)$ выполняется неравенство*

$$\frac{|\lambda_{i+k} - \lambda_i|}{|\lambda_i|} < 1. \tag{1.3}$$

Из изоморфизма между СГП $\mathbb{H}$ и пространством l_2 (l_2 – линейное пространство, элементами которого являются последовательности чисел $\{\xi_n\}$

таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$) следует, что если $h\in\mathbb{H}$ и $h=\sum\limits_{i=1}^{\infty}h_i\varphi_i$, где $h_i=$ $=(h,\varphi_i)$ $((\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{H}$), то оператор сдвига P_m с целым индексом m действует в l_2 так:

$$P_m(h_1,h_2,h_3,...)=\begin{cases}(\underbrace{0,0,...,0}_{m},h_1,h_2,...) & \text{при } m>0,\\ (h_1,h_2,h_3,...) & \text{при } m=0,\\ (h_{|m|+1},h_{|m|+2},...) & \text{при } m<0,\end{cases}$$

а соответствующий оператору P_m оператор сдвига $\mathbb{P}_m$ в $\mathbb{H}$ действует, очевидно, таким образом:

$$\mathbb{P}_m\varphi_i=\begin{cases}0\in\mathbb{H} & \text{при } m+i\leqslant 0,\\ \varphi_{i+m} & \text{при } m+i>0,\end{cases}$$

$$\mathbb{P}_m h=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}h_{i+|m|}\varphi_i & \text{при } m\leqslant 0,\\ \sum_{i=1}^{\infty}h_i\varphi_{i+m} & \text{при } m\geqslant 0.\end{cases}$$

2. Направленное возмущение дискретного оператора

Рассмотрим уравнение

$$\left(A+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\mathbb{P}_n\right)f=\lambda f, \tag{2.1}$$

где $f\in\mathcal{D}(A)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\alpha=(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ — набор чисел. Левую часть этого уравнения ввиду линейности операторов $\mathbb{P}_m$ и A представим в виде

$$\begin{aligned}\left(A+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\mathbb{P}_n\right)f=\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}f_i\left(A+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\mathbb{P}_n\right)\varphi_i=\\ =\sum_{i=1}^{\infty}f_i\left(\lambda_i\varphi_i+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_{i+n}\right),\quad f_i=(f,\varphi_i),\end{aligned} \tag{2.2}$$

а правую в виде

$$\lambda f=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}f_i\varphi_i. \tag{2.3}$$

Из уравнения (2.1) следует, что правые части равенств (2.2) и (2.3) равны между собой, поэтому, приравнивая в них соответствующие коэффициенты при φ_i, получим систему относительно неизвестных f_j:

$$\begin{cases}f_1(\lambda_1-\lambda)=0,\\ \alpha_1f_1+f_2(\lambda_2-\lambda)=0,\\ \alpha_2f_1+\alpha_1f_2+f_3(\lambda_3-\lambda)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_kf_1+\alpha_{k-1}f_2+...+\alpha_1f_k+f_{k+1}(\lambda_{k+1}-\lambda)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{cases}$$

Эту систему представим в более компактном виде:

$$\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_{k-j}f_{1+j}+f_{k+1}(\lambda_{k+1}-\lambda)=0,\quad k=0,1,2,..., \tag{2.4}$$

при $k=0$, полагая $\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_{k-j}f_{1+j}=0$.

Возьмем функцию $h\in\mathcal{D}(A)$, для которой $(h,\varphi_1)\neq 0$. В формуле (2.4) положим $\lambda=\lambda_1$. Тогда можно выбрать значение f_1 равным числу (h,φ_1) и из (2.4) получить все f_k, $k>1$:

$$f_k=(\lambda_1-\lambda_k)^{-1}\sum_{i=1}^{k-1}f_i\alpha_{k-i}. \tag{2.5}$$

По формуле (2.5) легко подбирается единственный набор чисел $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...)$ такой, что $(h,\varphi_i)=f_i$, $i=1,2,3,...$ Другими словами, f_i – коэффициенты Фурье в разложении h по базису $\{\varphi_i\}$. Единственность α очевидна, так как каждое α_j рекуррентно выражается через α_i с меньшими номерами $(i<j)$.

Возьмем функцию $h\in\mathcal{D}(A)$, для которой $(h,\varphi_1)=(h,\varphi_2)=...=(h,\varphi_{j-1})=0$ и $(h,\varphi_j)\neq 0$. В формуле (2.4) положим $\lambda=\lambda_j$. Тогда можно выбрать значения f_i равными числам (h,φ_i), $i=\overline{1,j}$, и из (2.4) получить все остальные f_k, $k>j$:

$$f_k=(\lambda_j-\lambda_k)^{-1}\sum_{i=j}^{k-1}f_i\alpha_{k-i}. \tag{2.6}$$

По формуле (2.6) легко подбирается единственный набор чисел $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...)$ такой, что $(h,\varphi_i)=f_i$, $i=1,2,3,...$ Единственность α очевидна, так как каждое α_j рекуррентно выражается через α_i с меньшими номерами $(i<j)$.

Из приведенного построения коэффициентов разложения функции h по базису $\{\varphi_i\}$ с помощью специального подбора чисел α_j по формуле (2.4) видим, что h – собственная функция оператора $\left(A+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\mathbb{P}_n\right)$. Отсюда и возникает термин "направленное возмущение" оператора A. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть A — дискретный оператор в СГП $\mathbb{H}$ с простым спектром $\{\lambda_i\}$; $\{\varphi_i\}$ — набор соответствующих собственных функций, образующих в $\mathbb{H}$ ортонормированный базис. Тогда для любой нетривиальной функции $h\in\mathcal{D}(A)$ найдется единственный набор чисел $\alpha=(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ такой, что справедливы равенства:

1)

$$\left(A+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\mathbb{P}_n\right)h=\lambda_1 h,$$

$$h_k=(\lambda_1-\lambda_k)^{-1}\sum_{i=1}^{k-1}h_i\alpha_{k-i},\quad k>1,$$

если $h_1 = (h, \varphi_1) \neq 0$,
2)

$$\left(A + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{P}_n\right) h = \lambda_m h,$$

$$h_k = (\lambda_m - \lambda_k)^{-1} \sum_{i=m}^{k-1} h_i \alpha_{k-i}, \quad k > m,$$

если $(h, \varphi_1) = ... = (h, \varphi_{m-1}) = 0$ и $h_m = (h, \varphi_m) \neq 0$.

Из леммы 2.1 следует, что для $h_m \neq 0$ и $h_i = 0$ при $i < m$ числа α_s вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} \alpha_1 = h_{m+1}(\lambda_m - \lambda_{m+1})/h_m, \\ \alpha_s = \left(h_{m+s}(\lambda_m - \lambda_{m+s}) - \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i h_{s-i+m}\right)/h_m, \\ s = 2, 3, 4, ... \end{gathered} \tag{2.7}$$

Поставим в соответствие каждому $h \in \mathbb{H}$ целое неотрицательное число $p = p(h, \{\varphi_i\})$, равное количеству первых нулевых компонент в разложении h по базису $\{\varphi_i\}$, то есть для функции $h \in \mathbb{H}$, у которой

$$h_1 = h_2 = ... = h_\nu = 0, \quad h_{\nu+1} \neq 0, \quad h_i = (h, \varphi_i),$$

имеем $p = \nu$. Понятно, что если $h_1 = (h, \varphi_1) \neq 0$, то $p = 0$. Применим лемму 2.1 для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2.1. Пусть A — действующий в СГП $\mathbb{H}$ дискретный оператор с простым спектром $\{\lambda_i\}$; $\{\varphi_i\}$ — набор соответствующих собственных функций, образующих в $\mathbb{H}$ ортонормированный базис. Тогда для любой нетривиальной функции $h \in \mathcal{D}(A)$ и произвольно взятого номера k, $k > p$, набор чисел $\alpha = \alpha(h, k) := \{\alpha_s\}_{s=1}^{\infty}$:

$$\begin{gathered} \alpha_1 = h_{p+2}(\lambda_k - \lambda_{k+1})/h_{p+1}, \\ \alpha_s = \left(h_{p+1+s}(\lambda_k - \lambda_{k+s}) - \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i h_{s-i+p+1}\right)/h_{p+1}, \\ s = 2, 3, 4, ..., \end{gathered} \tag{2.8}$$

обладает тем свойством, что построенный с его помощью оператор

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\alpha, k) := \left(\mathbb{P}_{p-k+1} A \mathbb{P}_{k-p-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbb{P}_i\right)$$

удовлетворяет уравнению $\mathbf{B}h = \lambda_k h$.

Доказательство. Представим равенство

$$\left(\mathbb{P}_{p-k+1} A \mathbb{P}_{k-p-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbb{P}_i\right) h = \lambda_k h$$

в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty} h_j \mathbb{P}_{p-k+1} \left(A + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbb{P}_i - \lambda_k I\right) \mathbb{P}_{k-p-1} \varphi_j = 0.$$

Выпишем условия на выбор чисел α_s и h_j, при которых для любого натурального m будут равны нулю скалярные произведения (δ, φ_m), где

$$\delta = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \mathbb{P}_{p-k+1} \left(A + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbb{P}_i - \lambda_k I \right) \mathbb{P}_{k-p-1} \varphi_j.$$

1. Пусть $1 \leqslant m \leqslant p$, тогда имеем $(\delta, \varphi_m) = 0$, так как $h_m = 0$.
2. Пусть $m = p+1$, тогда $(\delta, \varphi_m) = (\lambda_k - \lambda_k) h_{p+1} = 0$, и потому число h_{p+1} может быть отличным от нуля (а из выбора функции $h \in \mathcal{D}(A)$ как раз и следует, что $h_{p+1} \neq 0$).
3. Пусть $m = p+2$, тогда

$$(\delta, \varphi_m) = (\lambda_{k+1} - \lambda_k) h_{p+2} + \alpha_1 h_{p+1} = 0$$

и потому

$$\alpha_1 = (\lambda_k - \lambda_{k+1}) h_{p+2} / h_{p+1}.$$

4. Пусть $m = p+1+s$, $s \geqslant 2$, тогда

$$(\delta, \varphi_m) = (\lambda_{k+s} - \lambda_k) h_{p+1+s} + \sum_{t=1}^{s} \alpha_t h_{p+1+s-t} = 0$$

и потому

$$\alpha_s = \left(h_{p+1+s} (\lambda_k - \lambda_{k+s}) - \sum_{t=1}^{s-1} \alpha_t h_{s+p+1-t} \right) / h_{p+1}.$$

Теорема доказана.

Так как оператор A удовлетворяет условию (1.3), то $\mathbb{P}_{p-k+1} A \mathbb{P}_{k-p-1} h \in \mathbb{H}$. Тогда $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbb{P}_i\right) h \in \mathbb{H}$ и, следовательно, оператор $\mathbf{B}$ построен корректно.

Какой спектр у оператора $\mathbf{B}$? Если рассматривать сужение $\mathbf{B}_\gamma$ оператора $\mathbf{B}$ на конечной размерности γ собственного подпространства

$$\mathcal{L}_\gamma := L(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_\gamma)$$

оператора A, то для $\mathbf{B}_\gamma$ ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1; $h \in \mathcal{D}(A)$, λ_k $(k > p)$ и $\alpha = \alpha(h, k)$ — фиксированные функция, собственное число оператора A и набор чисел для построения оператора $\mathbf{B}(\alpha, k)$. Пусть $\gamma >> k + p$ и

$$\mathbf{B}_\gamma(\alpha, k) := \mathbb{P}(\gamma) \left(\mathbb{P}_{p-k+1} A \mathbb{P}_{k-p-1} + \sum_{i=1}^{\gamma} \alpha_i \mathbb{P}_i \right) \mathbb{P}(\gamma)$$

является сужением оператора

$$\mathbf{B}(\alpha, k) := \left(\mathbb{P}_{p-k+1} A \mathbb{P}_{k-p-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbb{P}_i \right)$$

на $\mathcal{L}_\gamma$, тогда спектр оператора $\mathbf{B}_\gamma$ составляют собственные числа λ_i оператора A с номерами $i = k-p, ..., k-p+\gamma-1$. Здесь через $\mathbb{P}(\gamma)$ обозначен оператор параллельного проектирования $\mathbb{H}$ на $\mathcal{L}_\gamma$.

Доказательство. Подействуем на функцию $f\in\mathcal{L}_\gamma$ оператором $\mathbf{B}_\gamma$ и рассмотрим условия на коэффициенты $f_j{=}(f,\varphi_j)$, при которых для всех $m=1,...,\gamma$ выполняются равенства:
A) $(\theta,\varphi_m)=0$, где

$$\theta:=\sum_{j=1}^{\gamma}f_j\mathbb{P}_{p-k+1}\left(A+\sum_{i=1}^{\gamma-j}\alpha_i\mathbb{P}_i-\lambda I\right)\mathbb{P}_{k-p-1}\varphi_j,$$
$$\lambda\neq\lambda_s,\quad s=k-p,...,k-p+\gamma-1,$$

B) $(\theta_s,\varphi_m)=0$, где

$$\theta_s:=\sum_{j=1}^{\gamma}f_j\mathbb{P}_{p-k+1}\left(A+\sum_{i=1}^{\gamma-j}\alpha_i\mathbb{P}_i-\lambda_s I\right)\mathbb{P}_{k-p-1}\varphi_j,$$
$$s=k-p,...,k-p+\gamma-1.$$

Случай A). Будем считать равными нулю все суммы $\sum_{t=1}^{\varrho-j}\alpha_t(\cdot)$ для $\varrho=$ $=j$. Рассматривая для каждого $m=1,...,\gamma$ равенства

$$(\theta,\varphi_m)=(\lambda_{m+k-p-1}-\lambda)f_m+\sum_{t=1}^{m-1}\alpha_t f_{m-t}=0,$$

замечаем, что они возможны лишь тогда, когда $f_1=f_2=...=f_\gamma=0$. То есть для $\lambda\neq\lambda_s$, $s=k-p,...,k-p+\gamma-1$, оператор $(\mathbf{B}_\gamma-\lambda I)$ обратим и потому λ — регулярное число этого оператора.

С другой стороны, матричное представление конечномерного оператора $(\mathbf{B}_\gamma-\lambda I)$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{\lambda_i\}$, $i=k-p,...,k-p+\gamma-1$, в базисе $\{\varphi_i\}$ — нижняя треугольная с ненулевыми элементами $((A-\lambda I)\varphi_i,\varphi_i)$, $i=1,...,\gamma$, на главной диагонали квадратная матрица. Поэтому $(\mathbf{B}_\gamma-\lambda I)^{-1}$ существует и, следовательно, λ принадлежит резольвентному множеству оператора $\mathbf{B}_\gamma$.

Случай B). Легко видеть, что равенства

$$(\theta_j,\varphi_m)=(\lambda_{m+k-p-1}-\lambda_j)f_m+\sum_{t=1}^{m-1}\alpha_t f_{m-t}=0$$

для каждого $j\in\{k-p,...,k-p+\gamma-1\}$ будут выполняться, если некоторые из чисел f_m, $1\leqslant m\leqslant\gamma$, отличны от нуля. Для всех $j\in\{1,...,k-p-$ $-1\}$ выражения $(\theta_j,\varphi_m)=0$, $1\leqslant m\leqslant\gamma$, справедливы только тогда, когда $f_1=...=f_\gamma=0$. Поэтому собственные числа λ_i операторов A и $\mathbf{B}_\gamma$ для номеров $i\in\{k-p,...,k-p+\gamma-1\}$ совпадают, а числа λ_i с номерами $i\in\{1,...,k-p-1\}$ принадлежат резольвентному множеству оператора $\mathbf{B}_\gamma$.

Пусть $w\neq 0$ — некоторая функция из $\mathcal{L}_\gamma$, которая будет собственной функцией оператора $\mathbf{B}_\gamma$, соответствующей собственному значению λ_j, $j\in$ $\in\{k-p,...,k-p+\gamma-1\}$, если компоненты w_m ее разложения по базису $\{\varphi_m\}$ удовлетворяют соотношениям:

$$((\mathbf{B}_\gamma-\lambda_j I)w,\varphi_m)=(\lambda_{m+k-p-1}-\lambda_j)w_m+\sum_{t=1}^{m-1}\alpha_t w_{m-t}=0,$$

$$m = 1, ..., \gamma.$$

Отсюда

$$\begin{array}{l} w_m = 0 \quad \text{для} \quad m \leqslant j - k + p, \\ w_{j-k+p+1} \in \mathbb{C} \ \text{ и } \ w_{j-k+p+1} \neq 0, \\ w_m = (\lambda_j - \lambda_{m+k-p-1})^{-1} \left(\sum_{t=1}^{m-1} \alpha_t w_{m-t} \right) \\ \text{для } \ j - k + p + 2 \leqslant m \leqslant \gamma + k - p - 1. \end{array} \tag{2.9}$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия теорем 2.1 и 2.2; $h \in \mathcal{D}(A)$, $\lambda_k (k > p)$ и α — фиксированные функция, собственное число оператора A и набор чисел для построения оператора $\mathbf{B}(\alpha, k)$. Тогда дискретную часть спектра оператора $\mathbf{B}(\alpha, k)$ составляют собственные числа λ_i оператора A для $i \geqslant k - p$, причем для любого собственного числа λ_j, $j \geqslant k - p$, компоненты w_m разложения соответствующей собственной функции w по базису $\{\varphi_m\}$ находятся по формулам (2.9) при $\gamma \to \infty$.

Доказательство. В условии теоремы 2.2 γ — произвольное, какое угодно большое натуральное число, поэтому если функция $w \neq 0$ является собственной функцией оператора $\mathbf{B}$, соответствующей собственному значению λ_j, $j \geqslant k - p$, то компоненты w_m разложения ее по базису $\{\varphi_m\}$ должны удовлетворять рекуррентным соотношениям (2.9) при $\gamma \to \infty$. Обратно, если $w \neq 0$ и w_m удовлетворяют соотношениям (2.9) при $\gamma \to \infty$, то включение $w \in \mathbb{H}$ для случая $j = k$ следует из самого построения оператора $\mathbf{B}$, а для случая $j \geqslant k - p$ $(j \neq k)$ — из условия (1.3) и того, что последовательности чисел

$$\varpi_m(j) = (\lambda_j - \lambda_{m+k-p-1})^{-1} \ \text{ и } \ \varpi_m(k) = (\lambda_k - \lambda_{m+k-p-1})^{-1}$$

стремятся к нулю с одинаковой скоростью при $m \to \infty$. Следствие доказано.

3. Пример. Направленно возмущенный оператор энергии из уравнения Шредингера в случае линейного осциллятора

Для линейного осциллятора уравнение Шредингера относительно неизвестной функции $\Psi = \Psi(t, x)$, определяющей состояние материальной точки (частицы), имеет следующий вид:

$$i\mathbf{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{h}$ — постоянная Планка,

$$H := -\frac{\mathbf{h}^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \mathbf{k} x^2 I$$

является оператором энергии, μ — масса частицы, $\mathbf{k}$ — коэффициент "упругой" силы, пропорциональной отклонению частицы от фиксированной точки прямой и направленной в сторону, противоположной отклонению (см. [11, с. 306–311]). Предполагается, что $\Psi(t,x) = \phi(t)\psi(x)$, то есть к уравнению (3.1) примени́м метод разделения переменных. Тогда

$$H\psi := -\frac{\mathbf{h}^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}\mathbf{k}x^2\psi, \tag{3.2}$$

и соответствующее уравнение Шредингера (без времени) имеет вид:

$$-\frac{\mathbf{h}^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}\mathbf{k}x^2\psi = E\psi. \tag{3.3}$$

Так как потенциальная энергия $U(x) = (\mathbf{k}x^2)/2 \to +\infty$ при $x \to \pm\infty$, а потому спектр оператора H, действующего в $\mathrm{L}_2(-\infty,+\infty)$, дискретен.

Известно (см. [8, с. 193]), что функции

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\mathbf{h}^2}{\mathbf{k}\mu}\right)^{-1/8} c_n e^{-\sqrt{\mathbf{k}\mu}x^2/(2\mathbf{h})} H_n\left(x\sqrt[4]{\frac{\mathbf{k}\mu}{\mathbf{h}^2}}\right)$$

будут собственными функциями оператора энергии H, образующими в $\mathrm{L}_2(-\infty,+\infty)$ ортонормированный базис, а соответствующими собственными числами или уровнями энергии будут числа

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\mathbf{h}\sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mu}}, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{3.4}$$

Можно представить функции $\psi_n(x)$ в более компактном виде:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\widetilde{c}_n} e^{-\sqrt{\mathbf{k}\mu}x^2/(2\mathbf{h})} H_n\left(x\sqrt[4]{\frac{\mathbf{k}\mu}{\mathbf{h}^2}}\right), \quad n = 0,1,2,..., \tag{3.5}$$

где

$$\widetilde{c}_n = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\mathbf{k}\mu}x^2/\mathbf{h}} H_n^2\left(x\sqrt[4]{\frac{\mathbf{k}\mu}{\mathbf{h}^2}}\right)dx\right)^{1/2}.$$

Пусть СГП $\mathbb{H} = \mathrm{L}_2^{\omega}(-\infty,\infty)$, $\omega = e^{-\sqrt{\mathbf{k}\mu}x^2/\mathbf{h}}$. Функции

$$\widetilde{\psi}_n(x) = \frac{1}{\widetilde{c}_n} H_n\left(x\sqrt[4]{\frac{\mathbf{k}\mu}{\mathbf{h}^2}}\right), \quad n = 0,1,2,...,$$

образуют в $\mathbb{H}$ ортонормированный базис и являются собственными функциями оператора энергии H, если он действует в $\mathbb{H}$. Из равенств (см. [8, с. 193])

$$\frac{d}{d\xi}H_n(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi), \quad H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi)$$

следуют равенства

$$H_{n+1}(\xi) = \left(-\frac{d}{d\xi} + 2\xi I\right)H_n(\xi), \quad H_{n-1}(\xi) = \frac{1}{2n}\frac{d}{d\xi}H_n(\xi).$$

Отсюда

$$\widetilde{\psi}_{n+1}(x) = \frac{\widetilde{c}_n}{\widetilde{c}_{n+1}} D_+ \widetilde{\psi}_n(x), \quad \widetilde{\psi}_{n-1}(x) = \frac{\widetilde{c}_n}{\widetilde{c}_{n-1}} D_-(n) \widetilde{\psi}_n(x),$$

где

$$D_+ = D_+^1 := -\sqrt[4]{\frac{\mathbf{h}^2}{\mathbf{k}\mu}} \frac{d}{dx} + 2x \sqrt[4]{\frac{\mathbf{k}\mu}{\mathbf{h}^2}} I,$$

$$D_-(n) = D_-^1(n) := \frac{1}{2n} \sqrt[4]{\frac{\mathbf{h}^2}{\mathbf{k}\mu}} \frac{d}{dx}.$$

Поэтому

$$\widetilde{\psi}_{n+s} = \frac{\widetilde{c}_n}{\widetilde{c}_{n+s}} D_+^s \widetilde{\psi}_n, \quad \widetilde{\psi}_{n-s} = \frac{\widetilde{c}_n}{\widetilde{c}_{n-s}} D_-^s(n) \widetilde{\psi}_n,$$

где

$$D_+^s := D_+(D_+^{s-1}),$$

$$D_-^s(n) := \frac{2^{-s}}{n(n-1)...(n-s+1)} \left(\frac{\mathbf{h}^2}{\mathbf{k}\mu}\right)^{s/4} \frac{d^s}{dx^s}, \quad 1 \leqslant s \leqslant n,$$

$D_+^0 = D_-^0(n) = I$ — единичный оператор.

Покажем, что для любой наперед заданной ненулевой функции $h \in \mathcal{D}(H)$ и любого целого k, $k \geqslant p$ (p — количество первых нулевых компонент в разложении h по базису $\{\widetilde{\psi}_i\}_{i=0}^{\infty}$) с помощью операторов сдвига D_+^s и $D_-^s(n)$ (первый относится к функциям $\widetilde{\psi}_j$ с номерами $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а второй — к функциям $\widetilde{\psi}_n$ с номерами $n \geqslant s$) можно так возмутить оператор H, что h окажется собственной функцией, соответствующей собственному числу E_k направленно возмущенного оператора $\mathbf{B}$, то есть $\mathbf{B}h = E_k h$. Другими словами, мы можем получить соответствующее уровню энергии E_k, $k \geqslant p$, какое угодно (в пределах вариации функции h во множестве $\mathcal{D}(H)$) заранее заданное состояние

$$\widetilde{\Psi}_k(\cdot, t) = e^{-a(t,(\cdot))} h(\cdot), \;\; a(t,(\cdot)) = (2iE_k t + \sqrt{\mathbf{k}\mu}(\cdot)^2)/(2\mathbf{h}),$$

где $i = \sqrt{-1}$, рассматриваемой квантовомеханической системы, находящейся в некоторых заранее заданных физических условиях, если таковые реально можно задать, причем

$$i\mathbf{h} \frac{\partial \widetilde{\Psi}_k}{\partial t} = \mathbf{B} \widetilde{\Psi}_k.$$

Предложение 3.1. Для любых ненулевой функции $h \in \mathcal{D}(H)$ и целого k, $k \geqslant p \geqslant 0$ ($h_0 = \ldots = h_{p-1} = 0$, $h_p \neq 0$; $p = 0$, если $h_0 \neq 0$; $h_j = (h, \widetilde{\psi}_j)$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{H}$), найдется единственный набор чисел $\iota = \iota(h) = \{\iota_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что

$$\begin{gathered} \iota_1 = -\mathbf{h}\sqrt{\tfrac{\mathbf{k}}{\mu}} h_{p+1}/h_p, \\ \iota_s = -\left(s\mathbf{h}\sqrt{\tfrac{\mathbf{k}}{\mu}} h_{p+s} + \sum_{i=1}^{s-1} \iota_i h_{s-i+p}\right)/h_p, \\ s = 2,3,4,..., \end{gathered} \tag{3.6}$$

h — собственная функция оператора

$$\mathbf{B}(\iota,k) := \mathbb{P}_{p-k} H \mathbb{P}_{k-p} + \sum_{i=1}^{\infty} \iota_i \mathbb{P}_i =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (\cdot, \widetilde{\psi}_j) \left(D_{-}^{k-p}(j+k-p) H D_{+}^{k-p} + \sum_{i=1}^{\infty} \iota_i \frac{\widetilde{c}_j}{\widetilde{c}_{j+i}} D_{+}^{i} \right) \widetilde{\psi}_j,$$

а $E_k = \left(k+\frac{1}{2}\right) \mathbf{h} \sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mu}}$ — соответствующее собственное число этого оператора, т. е.

$$\mathbf{B}(\iota,k) h = E_k h$$

Здесь

$$\mathbb{P}_s = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (\cdot, \widetilde{\psi}_n)(\widetilde{c}_n / \widetilde{c}_{n+s}) D_{+}^{s} \widetilde{\psi}_n, & s \geqslant 0, \\ \sum_{n=|s|}^{\infty} (\cdot, \widetilde{\psi}_n)(\widetilde{c}_n / \widetilde{c}_{n-|s|}) D_{-}^{|s|}(n) \widetilde{\psi}_n, & s < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть

$$k = \widetilde{k} - 1, \quad \widetilde{k} = p+1, p+2, ..., \quad \varphi_{j+1} = \widetilde{\psi}_j, \quad \widetilde{\lambda}_{j+1} = E_j,$$

тогда

$$\widetilde{h}_{j+1} = (h, \varphi_{j+1}) = (h, \widetilde{\psi}_j) = h_j,$$

$$\iota_1 = \frac{\widetilde{h}_{p+2}}{\widetilde{h}_{p+1}} (\widetilde{\lambda}_{\widetilde{k}} - \widetilde{\lambda}_{\widetilde{k}+1}) = \widetilde{\alpha}_1,$$

$$\iota_s = \frac{1}{\widetilde{h}_{p+1}} \left(\widetilde{h}_{p+s+1} (\widetilde{\lambda}_{\widetilde{k}} - \widetilde{\lambda}_{\widetilde{k}+s}) - \sum_{i=1}^{s-1} \iota_i \widetilde{h}_{s-i+p+1} \right) = \widetilde{\alpha}_s,$$

$$s = 2, 3, 4, ...,$$

и оператор

$$\mathbf{B}(\iota,k) = \mathbf{B}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{k}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (\cdot, \varphi_j) \left(\mathbb{P}_{p-\widetilde{k}+1} H \mathbb{P}_{\widetilde{k}-p-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{\alpha}_i \mathbb{P}_i \right) \varphi_j.$$

Числа E_k расположены равномерно, поэтому набор чисел $\iota(h)$ не зависит от номера k собственного числа E_k и, следовательно, $\iota(h) = \widetilde{\alpha}(h)$. Оператор $\mathbf{B}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{k})$ в новых обозначениях обретает вид оператора $\mathbf{B}(\alpha,k)$ из формулировки теоремы 2.1, только со знаком тильда над некоторыми компонентами оператора и оператором H вместо A, причем $\widetilde{k} > p$, т. к. $k \geqslant p$. Другими словами, операторы $\mathbf{B}(\iota,k)$ и $\mathbf{B}(\alpha,k)$ совпадают с точностью до обозначений. Поэтому дальнейшее доказательство сводится к доказательству теоремы 2.1. Предложение доказано.

Предложение 3.2. Пусть выполнены все условия предложения 3.1, $h \in \mathcal{D}(H)$, $E_k (k \geqslant p)$ и ι — фиксированные функция, собственное число оператора H и набор чисел для построения оператора $\mathbf{B}(\iota,k)$. Пусть $\gamma >> k+p$ и оператор

$$\mathbf{B}_{\gamma}(\iota,k) := \mathbb{P}(\gamma) \left(\mathbb{P}_{p-k} H \mathbb{P}_{k-p} + \sum_{i=1}^{\gamma} \iota_i \mathbb{P}_i \right) \mathbb{P}(\gamma) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\gamma}(\cdot,\widetilde{\psi}_j)\left(D_-^{k-p}(j+k-p)HD_+^{k-p}+\sum_{i=1}^{\gamma-j}\iota_i\frac{\widetilde{c}_j}{\widetilde{c}_{j+i}}D_+^i\right)\widetilde{\psi}_j$$

представляет сужение оператора $\mathbf{B}(\iota,k)$ на $\mathcal{L}_\gamma = L\{\widetilde{\psi}_0,\widetilde{\psi}_1,\ldots,\widetilde{\psi}_\gamma\}$. Здесь $\mathbb{P}(\gamma) = \sum_{i=0}^{\gamma}(\cdot,\widetilde{\psi}_i)\widetilde{\psi}_i$.

Тогда спектр оператора $\mathbf{B}_\gamma$ состоит из одних собственных чисел $E_i = (i+1/2)\,\mathbf{h}\sqrt{\mathbf{k}/\mu}$ оператора H для $i \in \{k-p,...,\gamma+k-p\}$.

Если w — собственная функция оператора $\mathbf{B}_\gamma$, соответствующая собственному значению E_j, $j \in \{k-p,...,\gamma+k-p\}$, то компоненты w_m разложения w по базису $\{\widetilde{\psi}_m\}$:

$$w_m = 0 \text{ для } m \leqslant j-k+p-1,\ w_{j-k+p}\in\mathbb{C} \text{ и } w_{j-k+p}\neq 0,$$

$$w_m = (E_j - E_{m+k-p})^{-1}\left(\textstyle\sum_{t=1}^{m}\iota_t w_{m-t}\right) \text{ для } m = \overline{j-k+p+1,\gamma}.$$

В определении оператора $\mathbf{B}_\gamma$ при $j=\gamma$ полагаем

$$\sum_{i=1}^{\gamma-j}\iota_i\frac{\widetilde{c}_j}{\widetilde{c}_{j+i}}D_+^i = \mathbb{O},$$

где $\mathbb{O}$ — аннулятор в $\mathbb{H}$.

Доказательство. Используя обозначения, введенные в доказательстве предложения 3.1, можно увидеть, что операторы данного предложения и теоремы 2.2 совпадают с точностью до обозначений, поэтому дальнейшие рассуждения сводятся к рассуждениям из доказанной теоремы 2.2. Предложение доказано.

Таким образом, возмущая оператор энергии H операторами D_+ и $D_-(n)$ в зависимости от функции h и номера k собственного числа E_k, получен новый оператор $\mathbf{B}(\iota,k)$ со следующими свойствами:
1) собственные числа оператора $\mathbf{B}(\iota,k)$ совпадают с уровнями энергии оператора H, но только оказываются сдвинутыми на $k-p$ единиц вправо по номеру, то есть имеют значения E_i, $i=k-p,k-p+1,\ldots$, где p — количество первых нулевых компонент в разложении h по базису $\{\widetilde{\psi}_i\}_{i=0}^{\infty}$ в $\mathbb{H}$,
2) функция $h \in \mathcal{D}(H)$ — собственная функция оператора $\mathbf{B}(\iota,k)$, соответствующая собственному числу E_k, $k \geqslant p$.

Свойство 1) следует из предложения 3.2 и следствия 2.1. Свойство 2) справедливо в силу построения самого оператора $\mathbf{B}(\iota,k)$.

Рассмотрим пример малых линейных колебаний протона от положения равновесия под действием силы $\overrightarrow{f} = -\mathbf{k}\overrightarrow{x}$, где $\overrightarrow{x}$ — вектор смещения протона от положения равновесия. Пусть $\gamma=10$, $k=3$, $\mathbf{k}=10^{-23}$ Н/м, $\mu = 1,6726485\cdot10^{-27}$ кг — масса покоя протона, $\mathbf{h} = 6,626176\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка.

Будем проводить вычисления в математическом пакете Maple 8 с точностью до пятидесяти значащих цифр. Тогда

$$E_3 = 0,17931997464366889611153184120642564 39\cdot10^{-30} \quad (\text{Дж})$$

представляет уровень энергии, соответствующий состоянию

$$\Psi_3(x,t) = e^{-iE_3t/\mathbf{h}}\widetilde{\psi}_3(x) =$$

$$= \frac{1}{\widetilde{c}_3} e^{-iE_3t/\mathbf{h}-\sqrt{\mathbf{k}\mu}x^2/(2\mathbf{h})} H_3\left(\sqrt[4]{\frac{\mathbf{k}\mu}{\mathbf{h}^2}}x\right) = e^{-iE_3t/\mathbf{h}-\sqrt{\mathbf{k}\mu}x^2/(2\mathbf{h})}\times$$

$$\times(279544406910992{,}1380924383134051514375766935834 5474x^3-$$

$$-2148338{,}3982453672997496412920912628378493608532783x)$$

протона, и справедливо равенство

$$i\mathbf{h}\frac{\partial\Psi_3}{\partial t} = H\Psi_3.$$

Любой многочлен $\mathcal{P}(x) = \sum_{i=0}^{10} a_i x^i$, $\sum_{i=0}^{3} a_i^2 \neq 0$, степени не выше $\gamma = 10$ будет собственной функцией оператора

$$\mathbf{B}_{10}(\iota,3) := \mathbb{P}(10)\left(\mathbb{P}_{p-3}H\mathbb{P}_{3-p} + \sum_{i=1}^{10}\iota_i\mathbb{P}_i\right)\mathbb{P}(10) =$$

$$= \sum_{j=0}^{10}(\cdot,\widetilde{\psi}_j)\left(D_-^{3-p}(j+3-p)HD_+^{3-p} + \sum_{i=1}^{10-j}\iota_i\frac{\widetilde{c}_j}{\widetilde{c}_{j+i}}D_+^i\right)\widetilde{\psi}_j,$$

соответствующей собственному числу E_3, если при этом коэффициенты ι_i выбирать по формуле (3.6) и оператор $\mathbf{B}_{10}(\iota,3)$ действует в $\mathcal{L}_{10} \subset \mathbb{H}$. В определении оператора $\mathbf{B}_{10}(\iota,3)$ полагаем:
1) $\sum_{i=1}^{10-j}\iota_i(\widetilde{c}_j/\widetilde{c}_{j+i})D_+^i = \mathbb{O}$ при $j=10$,
2) $p=\zeta$, если $a_0 = \ldots = a_{\zeta-1} = 0$ и $a_\zeta \neq 0$.

Таким образом, для действующего в $\mathcal{L}_{10}$ оператора энергии $\mathbf{B}_{10}(\iota,3)$ функция

$$\widetilde{\Psi}_3(x,t) = e^{-iE_3t/\mathbf{h}}\mathcal{P}(x)$$

выражает состояние протона, соответствующее уровню энергии E_3, причем справедливо равенство

$$i\mathbf{h}\frac{\partial\widetilde{\Psi}_3}{\partial t} = \mathbf{B}_{10}(\iota,3)\widetilde{\Psi}_3.$$

Возьмем, к примеру, многочлен

$$h(x) \equiv \mathcal{P}(x) = \sum_{k=0}^{9}(-7+k)x^k,$$

тогда $p=0$ и наборы $\{\widetilde{c}_i\}$, $\{h_i = (\mathcal{P},\widetilde{\psi}_i)\}$, $\{\iota_i\}$ имеют вид:
$\widetilde{c}_0 = 0{,}0112636105076501638287403450677479903707170 26916,$
$\widetilde{c}_1 = 0{,}0159291507412069637501613931501337691625666 34385,$
$\widetilde{c}_2 = 0{,}0318583014824139275003227863002675383251332 68770,$
$\widetilde{c}_3 = 0{,}0780365827036670327767650224494355208944060 81163,$
$\widetilde{c}_4 = 0{,}2207207872415512150346825660689566146153397 3519,$
$\widetilde{c}_5 = 0{,}6979804146287352497640351023588055668394626 3910,$

$\widetilde{c}_6 = 2,41787508164992140790460656731003649752191854 31,$
$\widetilde{c}_7 = 9,04686015955207509306634971938746012606001344 86,$
$\widetilde{c}_8 = 36,1874406382083003722653988775498405042400537 94,$
$\widetilde{c}_9 = 153,530308014376406095043746005056200130484960 56,$
$\widetilde{c}_{10} = 686,608410653252806651174091759055133210014554 54,$
$h_0 = -0,788452736978218886796997777974810531031 75 \cdot 10^{-1},$
$h_1 = -0,342053620230438141669468868326867525460 6 \cdot 10^{-5},$
$h_2 = -0,204029638096482623519154034333183251946 7 \cdot 10^{-9},$
$h_3 = -0,143089968976123771616652423165795522533 7 \cdot 10^{-13},$
$h_4 = -0,108633998003877534391000543897090243990 1 \cdot 10^{-17},$
$h_5 = -0,819643152243075045054442441621541432101 4 \cdot 10^{-22},$
$h_6 = -0,508084244315061817574843751882755271964 2 \cdot 10^{-26},$
$h_7 = 0,125491184445250560406894105641544042978 17 \cdot 10^{-36},$
$h_8 = 0,974003238934627668304909065498962225315 74 \cdot 10^{-34},$
$h_9 = 0,295785558334561544274605991530501551646 27 \cdot 10^{-37},$
$h_{10} = -0,119856863817827135368205617641535133 7 \cdot 10^{-49},$
$\iota_1 = -0,222269130520019139586498406044674602 03 \cdot 10^{-35},$
$\iota_2 = -0,168733341754699502812610109621688689 49 \cdot 10^{-39},$
$\iota_3 = -0,148224482407235806265033455093040094 86 \cdot 10^{-43},$
$\iota_4 = -0,134059492452763075139248522161970282 24 \cdot 10^{-47},$
$\iota_5 = -0,108543440062399912912630390970915367 70 \cdot 10^{-51},$
$\iota_6 = -0,430595758376844852666481433190498592 92 \cdot 10^{-56},$
$\iota_7 = 0,123384506025597629948937112393554756 089 \cdot 10^{-59},$
$\iota_8 = 0,528398476308282086141559976179383433 549 \cdot 10^{-63},$
$\iota_9 = 0,148747105250762870493999980252355423 178 \cdot 10^{-66},$
$\iota_{10} = -0,882807270102072651199253226876692251 9 \cdot 10^{-71}.$

Вычислим собственные функции $SobF_{10}(j,3)$ ($\gamma = 10,\ k = 3$) оператора $\mathbf{B}_{10}(\iota,3)$, нормы $||SobF_{10}(j,3)||_H$ и нормы функций невязки $||(\mathbf{B}_{10}(\iota,3) - E_jI)SobF_{10}(j,3)||_H$ для $j = \overline{4,13}$:

$SobF_{10}(4,3) =$
$= -0,0027234907369128904401440603708544064378790220394 +$
$+ 1754110,9512837876632335025734479944212894165408798x +$
$+ 1063151,7836876120811864168516301107250221851816148x^2 +$
$+ 723383,16325067815163913833333010408823126199330344x^3 +$
$+ 501174,55673826731912592278910733791805627180522964x^4 +$
$+ 336198,11341685982127397155207146524000587759281303x^5 +$
$+ 204603,65660136639146507056653946905038619056897841x^6 +$
$+ 94713,089793868524551585858639299181676896362096209x^7 +$
$+ 0,0019287868471129425522433000043636980864492677 51x^8 -$
$- 83529,093030163101425935273220058305944041513751062x^9 -$
$- 158485,31091804663989133822374992401723976753060120x^{10},$
$||SobF_{10}(4,3)||_H =$
$= 1,0000000009410377769135819267987378176995094804886,$

$||(\mathbf{B}_{10}(\iota,3)-E_4 I)SobF_{10}(4,3)||_H\ =$
$=0,10685325704922853927772738585108586856298495\cdot 10^{-83},$

$SobF_{10}(13,3)\ =$
$=-44,042571472768687137518343331924252552831636162552+$
$+4224620629477734888490093410181265069227 57,789796x^{10}-$
$-48700212695811511125999096794829299,618524580308428x^8+$
$+17465841811508404460649344 68,18884649232697398132 53x^6-$
$-22371245076928707908,124120005990156529439160540712x^4+$
$+85963094998,7605398266925906789814405058095714820 85x^2,$
$||SobF_{10}(13,3)||_H\ =\ 1,$
$||(\mathbf{B}_{10}(\iota,3)-E_{13}I)SobF_{10}(13,3)||_H\ =\ 0.$

Увеличивая число значащих цифр, можно добиться произвольной малости (в пределах вычислительной возможности данного математического пакета) норм функций невязки.

Осталось осмыслить полученные результаты. Из квантовой механики хорошо известны: а) *произвольное состояние* системы $\Psi=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\Psi_n,\ b_n=(\Psi,\Psi_n)$ и б) *стационарные состояния* системы $\Psi_n,\ n=\overline{1,\infty}$. Собственные значения E_n оператора энергии H являются *уровнями энергии*, соответствующими стационарным состояниям Ψ_n. Об уровне энергии произвольного состояния Ψ ничего неизвестно (по крайней мере автору), если такое понятие в современной квантовой механике вообще существует. Можно (в принципе) ввести такое понятие, однако оговорив при этом, что исходный оператор энергии должен быть каким-то образом возмущен, например, операторами сдвига. Последние практически не меняют дискретную часть спектра (уровни энергии) исходного оператора H. При таком возмущении *произвольно выбранное* из D_H состояние становится *стационарным*, соответствующим *выбранному* уровню энергии E_m оператора H. Это и было продемонстрировано на примере для подпространства $\mathcal{L}_\gamma=L\{\widetilde{\psi}_0,\widetilde{\psi}_1,\ldots,\widetilde{\psi}_\gamma\}\subset\mathbb{H},\ \gamma=10,$ и уровня энергии E_3.

То, что операторы сдвига $D_-^s(n),\ D_+^s$ имеют энергетическую меру, очевидно, однако автору не совсем понятен их физический смысл.

Литература

[1] Крейн М.Г. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // ДАН СССР. 1946. № 53. С. 3–6.

[2] Крейн М.Г. Про эрмiтовi оператори з напрямними функцiоналами // Збiрник праць iнституту математики АН УРСР. 1948. № 10. С. 83–105.

[3] Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазей-

ля в круглой трубе / В.В. Дубровский [и др.] // ДАН, 2001. Т. 380. № 2. С. 160–163.

[4] Новый метод вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической теории устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами / В. В. Дубровский [и др.] // ДАН. 2001. Т. 381. № 3. С. 320–324.

[5] Кадченко С.И., Кравченко В.Ф., Джиганчина Н.С. Устойчивость плоскопараллельного течения Кутта // Электромагнитные волны и электронные системы. 2005. Т. 10. № 1–2. С. 10—21.

[6] Кадченко С.И., Кинзина И.И. Линейные уравнения для приближенного вычисления собственных чисел возмущенных самосопряженных операторов // Электромагнитные волны и электронные системы. 2005. Т. 10. № 6. С. 4–12.

[7] Кадченко С.И., Кинзина И.И. Вычисление собственных значений возмущенных дискретных полуограниченных операторов // Вычислительная математика и математическая физика. 2006. Т. 46. № 7. С. 1265–1272.

[8] Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, функции пароболического цилиндра, ортогональные многочлены. Изд. 2-е, стер. М.: Наука, 1974. 296 с.

[9] Малеко Е.М. О восстановлении действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве операторов // Математика. Механика. Информатика: тез. докл. Всерос. науч. конф. Челябинск: ЧелГУ, 2006.

[10] Малеко Е.М. О представлении оператора с заранее заданной собственной функцией // Вестник МаГУ. Сер.: Математика. 2006. Вып. 9. 186 с.

[11] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Гостехтеоретиздат, 1954. 352 с.

[12] Садовничий В.А. Теория операторов. Изд. 2-е. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 386 с.

Поступила в редакцию 20/*VIII*/2009;
в окончательном варианте — 20/*VIII*/2009.

ABOUT THE DIRECTED DISTURBANCE OF DISCRETE OPERATORS

© 2009 E.M. Maleko[2]

Under the directed perturbed operator we will understand such an operator, which is built from the disturbance of a discrete operator by the operators of shift, in such a way that one of the eigunefunctions of the built operator is any preassigned nonvanishing function from the domain of operator. By solving problems of theoretical function we often use the spectrum of researched operator, and in many cases only its discrete part, but sometimes together with eigen (and attached) functions. Probably for the researcher it is important to know that it is possible by means of disturbing the given operator to receive an operator with resembling on the primary by the spectrum, and preassigned function which is any by number to the eigenfunction of the disturbed operator

Key words: spectrum, the discrete operator, Hilbert space.

Paper received 20/*VIII*/2009.
Paper accepted 20/*VIII*/2009.

[2]Maleko Eugene Mikhailovich (emaleko@rambler.ru, mgtu@magtu.ru), Dept. of Mathematics, Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, 455000, Russia.