УДК 515.122

ПРИМЕР РЕЗНИЧЕНКО МЕТАЛИНДЕЛЕФОВ

© 2009 О.И. Павлов[1]

Показано, что пример псевдокомпактного пространства X, построенный Е.А. Резниченко, является наследственно металинделефовым. Более того, любое (наследственно) металинделефово пространство Y можно вложить в качестве замкнутого подмножества (наследственно) в металинделефово псевдокомпактное пространство так, что дополнением к Y в этом пространстве будет служить X (при этом вес X будет определяться весом Y). Представленная конструкция намного проще, чем примеры псевдокомпактных некомпактных пространств с точечно-счетной базой, построенные С. Ватсоном и Д.Б. Шахматовым, и металинделефово псевдокомпактное некомпактное пространство, построенное Яном Три.

Ключевые слова: металинделефовость, псевдокомпактность, замкнутое вложение.

Введение

Известно, что многие свойства типа компактности и свойства Линделефа влекут компактность в присутствии псевдокомпактности. Например, паралинделефово псевдокомпактное пространство компактно (см. [1, теорема 9.7]). Ватсон и Скотт независимо показали в [2, 6], что каждое метакомпактное псевдокомпактное пространство является компактом. В.В. Успенский [8] доказал, что всякое псевдокомпактное пространство с σ-точечно конечной базой метризуемо, следовательно, является компактом. С другой стороны, металинделефово[2] псевдокомпактное некомпактное пространство было построено в [4, 6] в предположении континуум-гипотезы, и затем наивно — в [7]. Более сильные (а также весьма сложные технически) примеры принадлежат С. Ватсону и Д.Б. Шахматову. Ватсон сконструировал в [3] псевдокомпактное пространство с точечно-счетной базой (последнее

[1]Павлов Олег Иванович (matematika.atiso@gmail.com), кафедра высшей и прикладной математики Академии труда и социальных отношений, 117454, Россия, г. Москва, ул. Лобачевского, 90.

[2]Напомним, что пространство X металинделефово, если в каждое открытое покрытие X можно вписать открытое точечно-счетное покрытие.

условие автоматически влечет металинделефовость), не являющееся компактом. Шахматов усилил этот результат в [9], показав, что любое тихоновское пространство, обладающее точечно-счетной базой из открыто-замкнутых множеств, может быть вложено в качестве замкнутого подмножества в псевдокомпактное пространство с точечно-счетной базой.

Для каждого кардинала τ, такого, что $\tau^\omega = \tau$, Е.А. Резниченко описал в [5] подпространство X_τ тихоновского куба I^τ, обладающее следующими свойствами:

(*) X_τ $G-\delta$-плотно в I^τ (то есть каждое непустое подмножество I^τ типа G_δ содержит элемент X_τ). Из этого следует, что пространство X_τ псевдокомпактно, связно и плотно в I^τ.

(**) Если $H \subset X_\tau$ и $|H| < \tau$, то H дискретно и замкнуто в X_τ.

Оказывается, X_τ наследственно металинделефово. Кроме того, верен аналог теоремы Шахматова о вложении.

Теорема 1. Пусть $\tau^\omega = \tau$. Если $X_\tau \subset I^\tau$ есть пространство Резниченко веса τ, а Y является тихоновским (наследственно) металинделефовым пространством веса $\mu \leqslant \tau$, то Y может быть вложен в $I^\tau \setminus X_\tau$ так, что $X_\tau \cup Y$ является тихоновским (наследственно) металинделефовым псевдокомпактным подпространством I^τ и содержит Y в качестве замкнутого подмножества. Если, кроме того, $2^\mu \leqslant \tau$, то Y C^*-вложено в $X_\tau \cup Y$.

Следствие 1. Каждое тихоновское (наследственно) металинделефово пространство может быть вложено в качестве замкнутого подмножества в псевдокомпактное связное тихоновское (наследственно) металинделефово пространство.

Следствие 2. Пример Резниченко наследственно металинделефов.

Мы используем стандартные теоретико-множественные обозначения и терминологию. Все рассматриваемые пространства — T_1 и тихоновские. Для каждого подмножества $S \subset \tau$, π_S обозначает проекцию тихоновского куба I^τ на его грань I^S, а π_α есть проекция I^τ на координату α. Подмножество Y называется C^*-вложенным в пространство X, если каждая ограниченная непрерывная функция на Y может быть непрерывно продолжена на все X.

1. Доказательство теоремы 1

Зафиксируем τ и вместо X_τ будем писать просто X. Напомним, что в примере Резниченко индексное множество τ представлено в виде объединения непересекающихся подмножеств S_α, $0 \leqslant \alpha < \tau$, каждое из которых имеет мощность τ. Само множество X занумеровано в виде $X = \{x_\alpha : 1 \leqslant \alpha < \tau\}$, и для каждого $x_\alpha \in X$ существует счетное множество $s_\alpha \subset \tau$, такое, что $\pi_{S_\alpha \setminus s_\alpha}(x_\alpha) \equiv 1$ и $\pi_{\tau \setminus (S_\alpha \cup s_\alpha)}(x_\alpha) \equiv 0$. Таким образом, каждый элемент множества X равен нулю на косчетном, следовательно, непустом множестве S_0.

Вложим Y в I^τ таким образом, что $\pi_{S_0}(Y) \equiv 1$. Тогда $X \cap Y = \emptyset$ и Y будет замкнуто в $X \cup Y$, так как каждый элемент X равен нулю на непустом подмножестве S_0. Обозначим $X \cup Y$ через Z; мы покажем, что пространство Z металинделефово.

Пусть $\mathcal{U}$ является открытым покрытием Z, а $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ — подмножествами (не обязательно непересекающимися) $\mathcal{U}$, покрывающими X и Y соответственно. Без потери общности мы можем считать, что семейство $\mathcal{W}$ точечно-счетно в каждой точке Y. Мы укажем такие открытые измельчения $\mathcal{V}'$ и $\mathcal{W}'$ семейств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ соответственно, что $\mathcal{V}'$ покрывает X, $\mathcal{W}'$ покрывает Y, и семейство $\mathcal{V}' \cup \mathcal{W}'$ точечно-счетно в каждой точке Z. Для каждого $x_\alpha \in X$ зафиксируем элемент семейства $\mathcal{V}$, содержащий x_α, и обозначим его V_α (некоторые V_α могут совпадать). Для каждого $1 \leqslant \alpha < \tau$ пусть

$$\alpha' \in S_\alpha \setminus s_\alpha \tag{1}$$

и

$$\alpha'' \in S_0 \setminus s_\alpha. \tag{2}$$

Из (1) и (2) соответственно следует, что

$$\pi_{\alpha'}(x_\alpha) = 1 \tag{1а}$$

и

$$\pi_{\alpha''}(x_\alpha) = 0 \tag{2а}$$

для каждого $1 \leqslant \alpha < \tau$. Следовательно, $x_\alpha \in V'_\alpha$, где $V'_\alpha = V_\alpha \cap \pi^{-1}_{\alpha'}((0.5;1]) \cap \pi^{-1}_{\alpha''}([0;0.5))$. Это значит, что $\mathcal{V}' = \{V'_\alpha : 1 \leqslant \alpha < \tau\}$ является семейством открытых подмножеств пространства Z, которое измельчает $\mathcal{V}$ и покрывает X. Более того, из определения V'_α следует, что

$$\pi_{\beta'}\left(V'_\beta\right) \subseteq (0.5;1] \tag{1б}$$

и

$$\pi_{\beta''}\left(V'_\beta\right) \subseteq [0;0.5) \tag{2б}$$

для каждого $1 \leqslant \beta < \tau$. Из условий (2), (2б) и факта, что $\pi_{S_0}(Y) \equiv 1$ следует, что $V'_\beta \cap Y = \emptyset$, поэтому $(\cup\mathcal{V}') \cap Y = \emptyset$. Из условий (1), (1б) и фактов, что каждое множество s_α счетно и $\pi_{\tau \setminus (S_\alpha \cup s_\alpha)}(x_\alpha) \equiv 0$, следует, что множество $\{\beta < \tau : x_\alpha \in V'_\beta\}$ счетно для каждого $1 \leqslant \alpha < \tau$. Отсюда вытекает, что семейство $\mathcal{V}'$ точечно-счетно в каждой точке Z.

Теперь занумеруем множество $\mathcal{W}$ элементами некоторого подмножества $S \subseteq S_0$: $\mathcal{W} = \{W_\beta : \beta \in S\}$. ($W_{\beta_1} \neq W_{\beta_1}$ если $\beta_1 \neq \beta_2$). Для каждого $\beta \in S$ пусть $W'_\beta = W_\beta \cap \pi^{-1}_\beta((0.5;1])$, тогда $W'_\beta \cap Y = W_\beta \cap Y$. Семейство $\mathcal{W}' = \{W'_\beta : \beta < \nu\}$ является открытым измельчением $\mathcal{W}$ (следовательно, оно точечно-счетно в каждой точке Y), и оно покрывает Y. Для каждого $1 \leqslant \alpha < \tau$, множество $\{\beta \in S : x_\alpha \in W'_\beta\}$ счетно так как оно является подмножеством счетного множества $S_0 \cap s_\alpha \subseteq s_\alpha$. Поэтому семейство $\mathcal{W}'$ точечно-счетно в каждой точке Z. Это означает, что семейство $\mathcal{V}' \cup \mathcal{W}'$ является точечно-счетным покрытием Z, измельчающим $\mathcal{U}$, то есть, пространство Z металинделефово.

Аналогично, если некоторое семейство открытых подмножеств $\mathcal{U}$ пространства Z (не обязательно являющееся покрытием всего Z) точечно счетно в каждой точке $(\cup\mathcal{U}) \cap Y$, то $\mathcal{U}$ содержит открытое измельчение $\mathcal{U}'$, которое точечно-счетно в каждой точке $(\cup\mathcal{U}) \cap Z$ и такое, что $\cup\mathcal{U} = \cup\mathcal{U}'$. Следовательно, Z наследственно металинделефово, если таковым является Y.

Наконец, известно, что тихоновское пространство веса τ может быть C^*-вложено в I^{2^τ} (См [10]). Поэтому, мы можем считать, что наше вложение Y в I^τ является C^*-вложением если $2^\mu \leqslant \tau$. Тогда Y будет C^*-вложенным и в Z. Доказательство окончено.

2. Нульмерный случай

Пример Резниченко X_τ построен таким образом, что множество $\{0,1\}^\tau \cap X_\tau$ G_δ-плотно в $\{0,1\}^\tau$, где $\{0,1\}^\tau$ есть канторовский куб — подпространство тихоновского куба I^τ. Обозначим $\{0,1\}^\tau \cap X_\tau$ через C_τ. Пространство C_τ обладает такими же свойствами $(*)$ и $(**)$ как и X_τ, за исключением того, C_τ G_δ-плотно в $\{0,1\}^\tau$, а не в I^τ, и C_τ нульмерно, а не связно. Доказательство теоремы 1 дословно переносится на нульмерный случай.

Теорема 2. Пусть $\tau^\omega = \tau$. Если $C_\tau \subset I^\tau$ есть нульмерное пространство Резниченко веса τ, а Y является нульмерным (наследственно) металинделефовым пространством веса $\mu \leqslant \tau$, то Y может быть вложен в $\{0,1\}^\tau \setminus C_\tau$ так, что $C_\tau \cup Y$ является нульмерным (наследственно) металинделефовым псевдокомпактным подпространством $\{0,1\}^\tau$ и содержит Y в качестве замкнутого подмножества. Если, кроме того, $2^\mu \leqslant \tau$, то Y C^*-вложено в $C_\tau \cup Y$.

Следствие 3. Каждое нульмерное (наследственно) металинделефово пространство может быть вложено в качестве замкнутого подмножества в псевдокомпактное нульмерное (наследственно) металинделефово пространство.

Отметим, что в настоящее время неизвестно, можно ли вложить каждое нульмерное пространство с точечно-счетной базой в псевдокомпактное нульмерное пространство с точечно-счетной базой. Как заметил Резниченко в [5], его пример в каждой точке имеет псевдохарактер $\aleph_1$, поэтому не является пространством с первой аксиомой счетности и тем более с точечно-счетной базой.

Автор благодарен М.В. Матвееву за помощь при оформлении списка литературы.

Литература

[1] Burke D. Covering properties // Handbook of set-theoretic topology / ed. K. Kunen и J. Vaughan. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1984. P. 347–422.

[2] Watson S. Pseudocompact metacompact spaces are compact // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81. № 1. P. 151–152.

[3] Watson S. A pseudocompact meta-Lindelöf space which is not compact // Topology and its Applications. 1985. V. 20. № 3. P. 237–243.

[4] Star covering properties / van Douwen [et al.] // Topology and its Applications. 1991. V. 39. № 1. P. 71–103.

[5] Резниченко Е.А. Псевдокомпактное пространство в котором только множества полной мощности не дискретны и замкнуты // Вестник МГУ, Сер. I: Матем. Мех. 1989. Вып. 44. № 6. С. 70–71.

[6] Scott B. Pseudocompact, metacompact spaces are compact // Topology Proceedings. 1979. V. 4 № 2. P. 577–587.

[7] Tree I. Constructing regular 2-starcompact spaces that are not strongly 2-star-Lindelöf // Topology and its Applications. 1992. V. 47. № 2. P. 129–132.

[8] Успенский В.В. Pseudocompact spaces with a point-finite base are metrizable // Commenationes Math. Univ. Carolinae. 1984. V. 25. № 2. P. 261–264.

[9] Шахматов Д.Б. Псевдокомпактные пространства с точечно-счетной базой // Докл. Акад. наук СССР. 1984. Вып. 279. № 4. С. 825–829.

[10] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.

Поступила в редакцию 19/X/2009;
в окончательном варианте — 19/X/2009.

REZNICHENKO'S EXAMPLE IS METALINDELÖF

 O.I. Pavlov[3]

We note that a pseudocompact space X that was constructed by E.A. Reznichenko is hereditarily metalindelöf. Moreover, every (hereditarily) metalindelöf space Y can be attached to X (the size of X can vary to accommodate Y) so that the resulting space is a (hereditarily) metalindelöf pseudocompact space that contains Y as a closed subset. This example is much simpler than related constructions of a pseudocompact not compact space with a point-countable base that are due to S. Watson and D.B. Shakhmatov or a metalindelöf pseudocompact not compact space that is due to Ian Tree.

Key words: metalindelöf, pseudocompact, closed embedding.

Paper received 19/X/2009.
Paper accepted 19/X/2009.

[3]Pavlov Oleg Ivanovich (matematika.atiso@gmail.com), Department of Higher and Applied Mathematics, Academy of Labor and Social Relations, Moscow, 117454, Russia.