УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

© 2009 М.В. Селькин[1] Р.В. Бородич[2]

В данной работе установлено строение нормальных подгрупп в Θ-фраттиниевых расширениях, где Θ — функтор; для локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$, содержащей все нильпотентные группы, показано, что в разрешимой группе пересечение $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-радикал и не принадлежащих $\mathfrak{F}$, совпадает с пересечением $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп и принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Ключевые слова: группа, локальная формация, формация Фиттинга, m-функтор, абнормальная максимальная подгруппа.

1. Предварительные сведения

В теории конечных групп хорошо известна классическая работа Фраттини [1], получившая свое развитие в различных направлениях. В работе [2] Гашюцем исследовались пересечения абнормальных максимальных подгрупп. Дескинс [3] описал пересечения максимальных подгрупп с ограничениями на индексы. Пересечение всех ненильпотентных максимальных подгрупп изучил Л.И. Шидов [4]. В.А. Ведерников и Н.Г. Дука [5] установили строение пересечения всех абнормальных ненильпотентных максимальных подгрупп группы. В.С. Монахов [6] исследовал пересечение максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фитинга.

Следующий этап в исследовании данного направления связан с развитием теории формаций и введением понятия $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппы (Картер, Хоукс [7], Л.А. Шеметков [8]). Пересечения таких максимальных подгрупп для разрешимых групп изучил В.В. Шлык [9], а для произвольных групп — Л.А. Шеметков [8] и М.В. Селькин [10]. Далее пересечения различных $\mathfrak{F}$-абнормальных подгрупп группы были детально рас-

[1]Селькин Михаил Васильевич (`Selkin@gsu.by`), кафедра высшей математики Гомельского государственного университета им. Франциска Скорины, 246019, Беларусь, г. Гомель, ул. Советская, 104.

[2]Бородич Руслан Викторович (`Borodich@gsu.by`), начальник научно-исследовательского сектора Гомельского государственного университета им. Франциска Скорины.

смотрены Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой [11], М.В. Селькиным [10], Баллестером-Болинше и Перес-Рамош [12] и др.

Дальнейшее развитие теории пересечений максимальных подгрупп связано с применением функторного метода (М.В. Селькин [10], С.Ф. Каморников [13], А.Н. Скиба [14], А.Ф. Васильев [15]).

Данная работа посвящена объединению формационного и функторного методов в исследовании пересечений максимальных подгрупп.

Все рассматриваемые группы конечны. Мы придерживаемся терминологии, принятой в монографиях [10, 13, 14, 16], m-функтором называется функция Θ, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G. При этом предполагаем, что если $M \in \Theta(G)$, то $M^x \in \Theta(G)$ для всех $x \in G$.

Если Θ — некоторый m-функтор, то через $\bar{\Theta}$ будем обозначать дополнительный к Θ m-функтор, т. е. $M \in \bar{\Theta}(G)$ тогда и только тогда, когда максимальная подгруппа M группы G не входит в $\Theta(G)$ и всегда $G \in \bar{\Theta}(G)$.

Максимальная подгруппа, не являющаяся нормальной, называется абнормальной.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп называют нормально наследственным, если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ — формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^{\phi}) \cap f(Ker\phi)$ для любого гомоморфизма ϕ группы G;

3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p-группах, и $f(G) = \bigcap_{p\in\pi(G)} f(p)$ для любой группы G.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G — пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — формация, замкнутая относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, то наибольшую нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу называют $\mathfrak{F}$-радикалом группы G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}$-абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M.

На множестве m-функторов операция пересечения определяется следующим образом $(\Theta_1 \cap \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cap \Theta_2(G)$.

Определение 1. m-функтор может быть следующим:

1) тривиальным, если $\Theta(G)\backslash\{G\}$ — множество всех максимальных подгрупп группы G;

2) абнормально полным, если множество $\Theta(G)$ содержит все абнормальные максимальные подгруппы группы G вместе с самой группой G;

3) $\mathfrak{F}$-абнормальным, если в группе G m-функтор Θ выделяет все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы группы G вместе с самой группой G;

4) N-свободным, если в группе G m-функтор Θ выделяет все максимальные в G подгруппы, не содержащие нормальную подгруппу N группы G, вместе с самой группой G.

m-функтор Θ называется регулярным, если выполняются следующие условия:

1) из $N \triangleleft G$ и $M \in \Theta(G)$ следует $MN/N \in \Theta(G/N)$;

2) из $M/N \in \Theta(G/N)$ следует $M \in \Theta(G)$.

Если Θ — m-функтор и $M \in \Theta(G)$, то M будем называть Θ-подгруппой группы G. Обозначим через $\Phi_\Theta(G)$ и назовем Θ-подгруппой Фраттини пересечение всех Θ-подгрупп группы G. Если m-функтор Θ тривиальный, то Θ-подгруппа Фраттини совпадает с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$.

Формация Фиттинга — это нормально наследственная формация $\mathfrak{F}$, замкнутая относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Введение на множестве m-функторов операций объединения и пересечения позволяет конструировать новые примеры m-функторов и Θ-подгрупп Фраттини.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, N — нормальная подгруппа группы G, m-функтор $\Psi = \Theta \cap \Theta_1 \cap \Theta_2 \cap \Theta_3$, где Θ — произвольный m-функтор, Θ_1 — $\mathfrak{F}$-абнормальный m-функтор, Θ_2 — m-функтор, выделяющий в группе множество всех максимальных ее подгрупп, не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$, Θ_3 — N-свободный m-функтор. Тогда соответствующую Ψ-подгруппу Фраттини $\Phi_\Psi(G)$ группы G, равную пересечению $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп группы, не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$ и не содержащих нормальную подгруппу N, будем обозначать через $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{N}}}(G)$. Если $N = G_{\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{F}$ — формация, замкнутая относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, то указанное пересечение обозначим через $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G)$.

Рассмотрим частные случаи. Если вместо m-функтора Θ рассмотреть тривиальный m-функтор, то $\Phi_\Psi(G) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\overline{N}}(G)$ — пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G, не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$ и не содержащих нормальную подгруппу N. В случае, когда $\mathfrak{F}$ — формация еденичных групп, строение указанной подгруппы исследовалось в работах [10, 17]. Если вместо m-функтора Θ_2 рассмотреть тривиальный m-функтор, то $\Psi = \Theta \cap \Theta_1 \cap \Theta_3$ и $\Phi_\Psi(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{N}}}(G)$ — пересечение $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп группы, не содержащих нормальную подгруппу N. В случае, когда N совпадает с $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G, строение указанной подгруппы рассматривалось в работе [18]. Если вместо Θ_3 взять тривиальный m-функтор, то $\Phi_\Psi(G) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ — пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных Θ−подгрупп группы G, не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$ [18]. Если теперь вместо Θ_2 и Θ_3 взять тривиальные m-функторы, то $\Phi_\Psi(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ — пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных в G Θ−подгрупп [18]. Если m-функтор Θ выделяет все абнормальные максимальные подгруппы группы G, то в этом случае подгруппа $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ совпадает с пересечением максимальных подгрупп, которые одновременно являются $\mathfrak{F}$-абнормальными и $\mathfrak{N}$-абнормальными, где $\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп, которую будем обозначать $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G)$ [18]. Если вместо m-функтора Θ рассмотреть тривиальный m-функтор, то подгруппа $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ совпадает с подгруппой $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ см. [10, 13, 14] и др., а если к тому же $\mathfrak{F}$ — формация всех нильпотентных групп, то подгруппа $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ [2], равной пересечению всех абнормальных максимальных подгрупп группы G.

Всегда полагаем, что пересечение пустого множества подгрупп из G совпадает с самой группой G.

В общем случае подгруппа $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G)$ отлична от подгруппы $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$.

Пример. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация единичных групп, G — группа, в которой $\Delta(G) \neq \Phi(G)$. Тогда в группе G существуют как $\mathfrak{N}$-нормальные, так и $\mathfrak{N}$-абнормальные, а также $\mathfrak{F}$-абнормальные подгруппы группы G.

Нам понадобятся следующие результаты, которые мы сформулируем в виде лемм.

Лемма 1 [17, лемма 1]. Пусть Θ — абнормально полный m-функтор, $K \leqslant N \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, $K \leqslant \Phi_\Theta(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если N/K π-замкнута, то и N π-замкнута;

2) $O_{p'}(N/K) = O_{p'}(N)/K$.

Лемма 2 [16, лемма 4.5]. Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.

Лемма 3 [17, теорема 1]. Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$ — локальная формация и Θ — абнормально полный m-функтор. Если N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi_\Theta(G) \in \mathfrak{F}$, тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \leqslant \Phi_\Theta(G)$.

Лемма 4 [16, теорема 4.7]. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ S-замкнута (S_n-замкнута) тогда и только тогда, когда для любого простого p формация $f(p)$ S-замкнута (S_n-замкнута).

Лемма 5 [17, теорема 3]. Пусть $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая локальная формация, Θ — абнормально полный регулярный m-функтор. Тогда $\Phi_\Theta^{\mathfrak{F}}(G) = A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}$, $B \leqslant \Phi_\Theta(G)$, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$.

Лемма 6. Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация, Θ — абнормально полный регулярный m-функтор, K — некоторая нормальная подгруппа группы G. Пусть каждая максимальная Θ-подгруппа группы G, не содержащая K, является $\mathfrak{F}$-нормальной. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $K \cap G^{\mathfrak{F}} \leqslant \Phi_\Theta(G)$;

2) $K/K \cap \Phi_\Theta(G) \leqslant Z_{\mathfrak{F}}(G/(K \cap \Phi_\Theta(G)))$.

Доказательство. Очевидно, $K \cap G^{\mathfrak{F}}$ содержится во всех максимальных Θ-подгруппах, содержащих $G^{\mathfrak{F}}$ и не содержащих $G^{\mathfrak{F}}$, а следовательно, и в $\Phi_\Theta(G)$.

Пусть R/S — главный фактор группы G, причем $R \leqslant K$, $K \cap \Phi_\Theta(G) \leqslant S$. Так как
$$R \cap G^{\mathfrak{F}} \leqslant K \cap G^{\mathfrak{F}} \leqslant S,$$
то имеем G-изоморфизм
$$RG^{\mathfrak{F}}/SG^{\mathfrak{F}} \simeq R/(R \cap SG^{\mathfrak{F}}) = R/S(R \cap G^{\mathfrak{F}}) = R/S.$$
Так как $G/SG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $RG^{\mathfrak{F}}/SG^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-централен в $G/SG^{\mathfrak{F}}$, а значит, и в G. Но тогда R/S $\mathfrak{F}$-централен в G. Лемма доказана.

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная локальная формация, Θ — абнормально полный регулярный m-функтор, N — нормальная подгруппа группы G. Если $N/N \cap \Phi_\Theta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, то N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют условиям:

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \leqslant \Phi_\Theta(G)$.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Предположим, что $\Phi_\Theta(G) \neq 1$. Тогда для $G/\Phi_\Theta(G)$ теорема верна, и $N/\Phi_\Theta(G) = N_1/\Phi_\Theta(G) \times N_2/\Phi_\Theta(G)$. Остается показать, что $N_1 \in \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi(N_1)$. Так как $N_1/\Phi_\Theta(G) \in \mathfrak{F}$, то, используя лемму 1 и лемму 2, получаем
$$(N_1/\Phi_\Theta(G))/F_p(N_1/\Phi_\Theta(G)) = N_1/\Phi_\Theta(G)/F_p(N_1)/\Phi_\Theta(G) \simeq$$
$$\simeq N_1/F_p(N_1) \in f(p).$$
Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 2 подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$.

В результате индуктивных рассуждений можно считать, что $\pi(N_1) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $N_2 = 1$. Поэтому необходимо доказать, что $N = N_1 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $K = N \cap \Phi_\Theta^{\mathfrak{F}}(G)$. Каждая максимальная Θ-подгруппа, не содержащая K, содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, ввиду леммы 6 имеем

$$K/K \cap \Phi_{\Theta}(G) \leqslant Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/K \cap \Phi_{\Theta}(G)).$$

Если $K \cap \Phi_{\Theta}(G) \neq 1$, то по индукции $N/K \cap \Phi_{\Theta}(G) \in \mathfrak{F}$, а значит, согласно лемме 3 $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $K \cap \Phi_{\Theta}(G) = 1$. Тогда подгруппа K $\mathfrak{F}$-гиперцентральна в группе G. Докажем, что K $\mathfrak{F}$-гиперцентральна и в подгруппе N. Пусть L/S — G-главный pd-фактор группы K. Тогда $G/C \in f(p)$, где $C = C_G(L/S)$, f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Так как по лемме 4 формация $f(p)$ является нормально наследственной, то

$$NC/C \simeq N/C_N(L/S) \in f(p).$$

Следовательно, подгруппа N f-стабилизирует G-главный ряд группы K. Это означает, что $K \leqslant Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(N)$. Отсюда и из $N/K \in \mathfrak{F}$ вытекает, что $N \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, Θ — абнормально полный регулярный m-функтор, N — нормальная подгруппа группы G. Если $N/N \cap \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

Следствие 1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная локальная формация, N — нормальная подгруппа группы G. Если $N/N \cap \Phi_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, то N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют условиям:

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;
3) $N_2 \leqslant \Delta(G)$.

В случае, когда m-функтор является тривиальным, то из теоремы 1 следует результат работы [10].

Замечание. Условие нормальной наследственности локальной формации в теореме является существенным, и его отбросить нельзя. Действительно, если формация $\mathfrak{F}$ не является нормально наследственной, то в ней найдется такая группа G, у которой некоторая нормальная подгруппа N не входит в $\mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G) = G$. Поэтому $N/N \cap \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G) = N/N \in \mathfrak{F}$. Но отсюда не следует, что $N \in \mathfrak{F}$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, Θ — абнормально полный регулярный m-функтор. Если в группе G существуют $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные Θ-подгруппы, не принадлежащие $\mathfrak{F}$, то пересечение всех таких подгрупп совпадает с $\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Доказательство. Предположим, что пересечение $\overline{\Phi}_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)$ всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп группы G, не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$, совпадает с подгруппой $\Phi_{\Theta}(G)$. Так как

$$\Phi_{\Theta}(G) \leqslant \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G) \leqslant \overline{\Phi}_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G),$$

то $\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\Phi}_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Пусть $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ не совпадает с подгруппой $\Phi_{\Theta}(G)$. Тогда $G = M\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$, где M — некоторая максимальная Θ-подгруппа группы G. Если $M \in \mathfrak{F}$, то $G/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \in \mathfrak{F}$. Отсюда $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ содержится только в тех максимальных Θ-подгруппах, которые содержат $G^{\mathfrak{F}}$, что невозможно. Поэтому M не входит в $\mathfrak{F}$ и является максимальной Θ-подгруппой, содержащей $G^{\mathfrak{F}}$. Итак, всякая максимальная Θ-подгруппа, не содержащая $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$, содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \leqslant \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, Θ — абнормально полный регулярный m-функтор. Если в группе G существуют $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные Θ-подгруппы, не принадлежащие $\mathfrak{F}$, то пересечение всех таких подгрупп $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

В случае, когда Θ — тривиальный m-функтор из теоремы 2, получаем результат работы [10].

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, Θ — абнормально полный регулярный m-функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \leqslant G_{\mathfrak{F}}$; если G — разрешимая неединичная группа, то $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) < G_{\mathfrak{F}}$;

2) $(G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G))_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \leqslant G_{\mathfrak{F}}$. Пусть G — разрешимая неединичная группа. Тогда $G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ разрешима и неединична. Пусть $/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$. Так как $/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ — p-группа для некоторого простого p, а $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то по лемме 5 $\in \mathfrak{F}$, а это значит, что $K \leqslant G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \leqslant G_{\mathfrak{F}}$.

Если $(G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G))_{\mathfrak{F}} = /\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$, то на основании теоремы 1 $\in \mathfrak{F}$, поэтому $K \leqslant G$ и $(G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G))_{\mathfrak{F}} \leqslant G_{\mathfrak{F}}/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$. Обратное включение следует из определения $\mathfrak{F}$-радикала.

Следствие 3.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\Phi^{\mathfrak{F}}(G) \leqslant G_{\mathfrak{F}}$; если G — разрешимая неединичная группа, то $\Phi^{\mathfrak{F}}(G) < G_{\mathfrak{F}}$;

2) $(G/\Phi^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/\Phi^{\mathfrak{F}}(G)$.

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, G — разрешимая группа, Θ — абнормально полный регулярный m-функтор. Тогда справедливы следующие утверждения: $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$, а если G — не $\mathfrak{F}$-группа, то $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \in \mathfrak{F}^2$.

Доказательство. Подгруппы $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G)$ и $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ являются характеристическими в G и

$$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G).$$

Для фактор-группы $G/\Phi_{\Theta}(G)$ выполняется, что

$$(G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G))_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G).$$

Поэтому

$$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G).$$

Предположим, что $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \neq 1$. Пусть $K/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$, содержащаяся в $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$. Так как $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$, то $K/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \in \mathfrak{F}$, и по теореме 1 $K \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $K \leqslant G_{\mathfrak{F}}$. Тогда

$$K \leqslant \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$$

получили противоречие. Значит, допущение неверно, и $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) = 1$, а значит, $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$.

Пусть G — разрешимая не $\mathfrak{F}$-группа. Из того, что $G_{\mathfrak{F}} \leqslant \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)G_{\mathfrak{F}}$ и

$$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/G_{\mathfrak{F}} = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G/G_{\mathfrak{F}}),$$

следует, что подгруппа $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \in \mathfrak{F}^2$.

Следствие 4.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, Θ — абнормально полный регулярный m-функтор, G — разрешимая группа. Тогда $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G) \in \mathfrak{F}$.

Если m-функтор является тривиальным, то имеет место следующее

Следствие 4.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы. Тогда для разрешимой группы G справедливы следующие утверждения:

1) $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$;

2) если $G \notin \mathfrak{F}$, то $\Phi^{\mathfrak{F}}_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}^2$.

Следствие 4.3. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы. Тогда в разрешимой группе G подгруппа $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G)$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если m-функтор выделяет все абнормальные максимальные подгруппы группы G, а формация $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией всех нильпотентных групп, то из теоремы 4 получаем

Следствие 4.4. В разрешимой группе G пересечение абнормальных максимальных подгрупп, не содержащих $F(G)$, совпадает с $\Delta(G)$, а пересечение абнормальных максимальных подгрупп, содержащих $F(G)$, метанильпотентно.

Из следствия 4.4 вытекает соответствующий результат работы [6].

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, Θ — абнормально полный регулярный m-функтор, G — разрешимая группа. Если $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G$, то $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть G обладает $\mathfrak{F}$-абнормальными максимальными Θ-подгруппами, не принадлежащими $\mathfrak{F}$ и не содержащими $\mathfrak{F}$-радикал. Несложно заметить, что

$$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \leqslant \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \leqslant \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G),$$

и согласно теореме 2 $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$.

Пусть подгруппа $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G)$ не совпадает с подгруппой $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$. Тогда $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G)/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \neq 1$ и пусть $K/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$, содержащаяся в $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G)/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$. Так как $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$, то $K/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда из теорем 1 и 2 следует, что $K \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $K \leqslant G_{\mathfrak{F}}$. Тогда $K \leqslant \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. Получили противоречие. Значит, допущение неверно, и $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G)/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G) = 1$. Следовательно, $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\Theta}(G)$. Применяя лемму 5, получаем, что $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\Theta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}}(G) \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда Θ — тривиальный m-функтор, то из теоремы 5 получаем

Следствие 5.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, G — разрешимая группа. Если $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$, то $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.

Если m-функтор Θ выделяет все абнормальные максимальные подгруппы группы G, $\mathfrak{F}$ — формация всех нильпотентных групп, тогда из теоремы 4 получаем

Следствие 5.2. Пусть G — разрешимая группа. Если в группе G существуют ненильпотентные абнормальные максимальные подгруппы, не содержащие подгруппу Фиттинга $F(G)$, то пересечение всех таких подгрупп совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$.

Из следствия 5.2 вытекает результат В.С. Монахова из работы [6].

Литература

[1] Frattini G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni //Atti Acad. dei Lincei. 1885. V. 1. P. 281–285.

[2] Gaschütz W. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1953. Bd. 58. S. 160–170.

[3] Deskins W.E. A condition for the solvability of a finite group // Ill.J.Math. 1961. V. 5. № 2. P. 306–313.

[4] Шидов Л.И. О максимальных подгруппах конечных групп // Сиб. мат. ж. 1971. Т. 12. № 3. С. 682–683.

[5] Ведерников В.А., Дука Н.Г. Конечные группы с обобщенной подгруппой Фраттини // IX Всесоюз. алгебраич. коллоквиум: материалы. Гомель, 1968. С. 44.

[6] Монахов В.С., Селькин М.В. О строении нормальных подгрупп конечных групп // Вопросы алгебры. 1993. С. 96–100.

[7] Carter R., Hawkes T. The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group // J.Algebra. 1967. V. 5. № 2 P. 175–202.

[8] Шеметков Л.А. Ступенчатые формации групп // Матем. сб. 1974. Т. 94. № 4. С. 628–648.

[9] Шлык В.В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1973. Т. 14. № 3. С. 429–439.

[10] Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Минск: Бел. навука, 1997. 144 с.

[11] Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 253 с.

[12] Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M.D. On $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group // Glasgow Math. J. 1994. V. 36. P. 241–247.

[13] Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Бел. навука, 2003. 254 с.

[14] Скиба А.Н. Алгебра формаций. Минск: Бел. навука, 1997. 240 с.

[15] Васильев А.Ф., Каморников С.Ф., Семенчук В.Н. О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы: материалы междунар. алгебр. конф. Киев, 1993. С. 27–54.

[16] Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 267 с.

[17] Селькин М.В., Сидоров А.В. Некоторые обобщения подгруппы Фраттини // Вопросы алгебры. 1996. Вып. 9. С. 138–143.

[18] Бородич Р.В., Бородич Е.Н. О пересечении $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2007. № 3. С. 47–52.

Поступила в редакцию 21/*VII*/2009;
в окончательном варианте — 21/*VII*/2009.

ABOUT THE INTERSECTION OF THE MAXIMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

© 2009 M.V. Selkin,[3] R.V. Borodich[4]

The structure of normal subgroups in Θ-frattini expansions is established in the given work. Local Fitting $\mathfrak{F}$ formation contains all nilpotent groups. For this formations we show that in solvable group the intersection $\mathfrak{F}$-abnormal maximal Θ-subgroups, which don't contain $\mathfrak{F}$-radical and don't belong to $\mathfrak{F}$, coincides with the intersection $\mathfrak{F}$-abnormal maximal Θ-subgroups and belongs formation $\mathfrak{F}$.

Key words: group, local formation, Fitting formation, m-functor, abnormal maximal subgroup.

Paper received 21/*VII*/2009.
Paper accepted 21/*VII*/2009.

[3]Selkin Michail Vasilievich (`Selkin@gsu.by`), Dept. of Higher Mathematics, Gomel State University F. Skoriny by name, Gomel, 246019, Belarus.

[4]Borodich Ruslan Victorovich (`Borodich@gsu.by`), Research Sector, Gomel State University F. Skoriny by name, Gomel, 246019, Belarus.