УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2009 М.В. Стригун[1]

В работе исследуется смешанная задача для гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием, содержащим интеграл от искомого решения. Доказано существование единственного обобщенного решения.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральное условие.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $Q_T = \{(x,t): \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T\}$ гиперболическое уравнение

$$Lu = u_{tt} - (au_x)_x + cu = f(x,t) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{1.2}$$

граничным условием

$$u(0,t) = 0 \tag{1.3}$$

и следующим интегральным условием:

$$u(l,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l K(l,y,t,\tau)u(y,\tau)dyd\tau, \tag{1.4}$$

где функции $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ заданы в области $\overline{Q}_T$, $a(x,t) > 0 \ \forall (x,t) \in Q_T$ — условие гиперболичности уравнения (1.1), $K(x,y,t,\tau)$ задана в $\overline{Q}_T \times \times \overline{Q}_T$, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — на отрезке $[0,l]$.

[1]Стригун Мария Владимировна (marii@samaracom.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Условие (1.4) представляет собой соотношение, связывающее значение искомого решения в граничных и внутренних точках области. Такие условия называют нелокальными. Задачи с нелокальными условиями для гиперболического уравнения в последнее время вызывают значительный интерес. Заметим, что в большинстве работ, посвященных этой тематике, нелокальные условия содержат интеграл лишь по пространственной переменной [1–3]. Вид нелокального условия (1.4) позволяет применить иной, чем в отмеченных работах, метод.

2. Разрешимость поставленной задачи

Теорема. Если функции $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $K(x,y,t,\tau)$ удовлетворяют условиям: $a(x,t) \in C^1(\overline{Q}_T)$, $c(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $K(x,y,t,\tau) \in C^2([0,l] \times [0,l] \times [0,T] \times [0,T])$, кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$\varphi(l) = 0, \tag{2.1}$$

$$\psi(l) = \int\limits_0^l K(l,y,0,0)\varphi(y)dy, \tag{2.2}$$

то существует единственное решение $u(x,y) \in W_2^1(Q_T)$ задачи (1.1)–(1.4).

Доказательство проведем по следующей схеме. Сначала сведем поставленную задачу с нелокальным условием к задаче с однородными граничными условиями для нагруженного уравнения и докажем ее однозначную разрешимость. Затем покажем, что из разрешимости задачи для нагруженного уравнения вытекает разрешимость поставленной задачи.

Определим оператор B равенством

$$Bu = u(x,t) - \int\limits_0^t \int\limits_0^x K(x,y,t,\tau)u(y,\tau)dyd\tau.$$

Пусть $v \equiv Bu$, тогда

$$v(x,t) = u(x,t) - \int\limits_0^t \int\limits_0^x K(x,y,t,\tau)u(y,\tau)dyd\tau. \tag{2.3}$$

Равенство (2.3) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $u(x,t)$. Оно имеет единственное решение в классе $L_2(Q_T)$ [4] и имеет вид

$$u(x,t) = v(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^x R(x,y,t,\tau,1)v(y,\tau)dyd\tau, \tag{2.4}$$

где

$$R(x,y,t,\tau,1)=\sum_{k=1}^{\infty}K_k(x,y,t,\tau), \tag{2.5}$$

а итерированные ядра $K_k(x,y,t,\tau)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$K_1(x,y,t,\tau)=K(x,y,t,\tau),$$

$$K_k(x,y,t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{y}^{x}K(x,z,t,s)K_{k-1}(z,y,s,\tau)dzds \quad (k=2,3...). \tag{2.6}$$

Тогда

$$R_x(x,y,t,\tau,1)=\sum_{k=1}^{\infty}K_{kx}(x,y,t,\tau), \quad R_{xx}(x,y,t,\tau,1)=\sum_{k=1}^{\infty}K_{kxx}(x,y,t,\tau),$$

$$R_t(x,y,t,\tau,1)=\sum_{k=1}^{\infty}K_{kt}(x,y,t,\tau), \quad R_{tt}(x,y,t,\tau,1)=\sum_{k=1}^{\infty}K_{ktt}(x,y,t,\tau).$$

Это верно, так как ряды сходятся абсолютно, что следует из оценки

$$|K_k(x,z,t,s)|\leqslant\frac{\alpha^k(t-\tau)^{k-1}(x-y)^{k-1}}{((k-1)!)^2}.$$

Здесь и в дальнейшем α таково, что

$$|K,K_x,K_{xx},K_t,K_{tt}|\leqslant\alpha. \tag{2.7}$$

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.4). Подставив (2.4) в уравнение (1.1), учитывая, что $K_k(x,y,t,t)=0$ и $K_k(x,x,t,\tau)=0$ для $k=2,3,\ldots$, имеем:

$$\begin{gathered}
\upsilon_{tt}-(a\upsilon_x)_x+c\upsilon+\int\limits_0^t\int\limits_0^x R_{tt}(x,y,t,\tau,1)\upsilon(y,\tau)dyd\tau- \\
-\left(a\int\limits_0^t\int\limits_0^x R_x(x,y,t,\tau,1)\upsilon(y,\tau)dyd\tau\right)_x+ \\
+c\int\limits_0^t\int\limits_0^x R(x,y,t,\tau,1)\upsilon(y,\tau)dyd\tau+\int\limits_0^x K_t(x,y,t,t)\upsilon(y,t)dy+ \\
+\int\limits_0^x R_t(x,y,t,\tau,1)\big|_{\tau=t}\upsilon(y,t)dy+\int\limits_0^x K(x,y,t,t)\upsilon_t(y,t)dy- \\
-\left(a\int\limits_0^t K(x,x,t,\tau)\upsilon(x,\tau)d\tau\right)_x=f(x,t).
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Условия (1.2) примут вид

$$\upsilon(x,0)=\varphi(x), \tag{2.9}$$

$$\upsilon_t(x,0)=\psi(x)-\int\limits_0^x K(x,y,0,0)\varphi(y)dy=\sigma(x), \tag{2.10}$$

а условия (1.3) и (1.4) станут однородными:

$$\upsilon(0,t)=0, \tag{2.11}$$

$$\upsilon(l,t)=0. \tag{2.12}$$

Таким образом, если $u(x,t)$ — решение исходной задачи (1.1)–(1.4), то $\upsilon(x,t)$ — решение задачи (2.8)–(2.12). Пусть теперь $\upsilon(x,t)$ — решение (2.8). Тогда из (2.11) и (2.12) следует выполнение условий (1.3) и (1.4). При непосредственной подстановке с учетом однозначной разрешимости уравнения (2.3) можно убедиться в том, что $u(x,t)$ удовлетворяет (1.1). Таким образом, задачи эквивалентны.

Итак, если показать, что существует единственное решение задачи (2.8)–(2.12), то в силу эквивалентности задач и однозначной разрешимости уравнения (2.3) это будет означать однозначную разрешимость задачи (1.1)–(1.4).

Введем определение обобщенного решения задачи (2.8)–(2.12).

Умножим (2.8) на функцию $\omega\in\hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$, где

$$\hat{W}^1_{2,0}(Q_T)=\{\omega:\omega\in W^1_2(Q_T),\,\omega(l,t)=\omega(0,t)=0,\,\omega(x,T)=0\},$$

и проинтегрируем по Q_T. Интегрируя по частям полученное выражение и учитывая условия (2.10)–(2.12), получим:

$$\begin{gathered}
-\int\limits_{Q_T}\upsilon_t\omega_t dxdt+\int\limits_{Q_T}a\upsilon_x\omega_x dxdt+\int\limits_{Q_T}c\upsilon\omega dxdt+\\
+\int\limits_{Q_T}\omega\int\limits_0^t\int\limits_0^x R_{tt}(x,y,t,\tau,1)\upsilon(y,\tau)dyd\tau dxdt-\\
-\int\limits_{Q_T}\omega\left(a\int\limits_0^t\int\limits_0^x R_x(x,y,t,\tau,1)\upsilon(y,\tau)dyd\tau\right)_x dxdt+\\
+\int\limits_{Q_T}\omega c\int\limits_0^t\int\limits_0^x R(x,y,t,\tau,1)\upsilon(y,\tau)dyd\tau dxdt+\\
+\int\limits_{Q_T}\omega\int\limits_0^x K_t(x,y,t,t)\upsilon(y,\tau)dydxdt+\int\limits_{Q_T}\omega\int\limits_0^x R_t(x,y,t,\tau,1)\big|_{\tau=t}\upsilon(y,t)dydxdt+\\
+\int\limits_{Q_T}\omega\int\limits_0^x K(x,y,t,t)\upsilon_t(y,\tau)dydxdt-\int\limits_{Q_T}a\omega\left(\int\limits_0^t K(x,x,t,\tau,)\upsilon(x,\tau)d\tau\right)_x dxdt=\\
=\int\limits_{Q_T}f\omega dxdt+\int\limits_0^l\sigma(x)\omega_x dx.
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Определение. Будем называть $\upsilon(x,t)\in W^1_2(Q_T)$ обобщенным решением задачи (2.8)–(2.12), если $\upsilon(x,0)=\varphi(x)$ и $\forall\omega\in\hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$ $\upsilon(x,t)$ удовлетворяет тождеству (2.13).

Доказательство существования решения задачи (2.8)–(2.12)

Будем искать приближенное решение задачи (2.8)–(2.12) в следующем виде:

$$\upsilon^m(x,t)=\sum_{i=1}^m d_i(t)X_i(x),$$

где $X_i(x) \in C^2[0,l]$ и образуют полную линейно независимую ортонормированную систему функций в $W_2^1(0,l)$, кроме того $X_i(0)=0$, а $d_i(t)$ подлежат определению.

Зададим начальные условия для $d_i(t)$. Для этого разложим функцию $\varphi(x)$ (из условия (2.9)) в ряд по системе X_i:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i X_i(x).$$

Тогда $d_i(0)=\gamma_i$, а $d_i'(0)=(\sigma, X_i)$.

Будем искать $d_i(t)$ из соотношений:

$$\begin{gathered}
\int_0^l (\upsilon_{tt}^m(x,t) - (a\upsilon_x^m(x,t))_x + c\upsilon^m(x,t))X_j(x)dx+\\
+\int_0^l \left(\int_0^t\int_0^x R_{tt}(x,y,t,\tau,1)\upsilon^m(y,\tau)dyd\tau\right) X_j(x)dx-\\
-\int_0^l \left(a\int_0^t\int_0^x R_{x}(x,y,t,\tau,1)\upsilon^m(y,\tau)dyd\tau\right)_x X_j(x)dx+\\
+\int_0^l \left(c\int_0^t\int_0^x R(x,y,t,\tau,1)\upsilon^m(y,\tau)dyd\tau\right) X_j(x)dx+\\
+\int_0^l \left(\int_0^x K_t(x,y,t,t)\upsilon^m(y,t)dy\right) X_j(x)dx+\\
+\int_0^l \left(\int_0^x R_t(x,y,t,\tau,1)\big|_{\tau=t}\upsilon^m(y,t)dy\right) X_j(x)dx+\\
+\int_0^l \left(\int_0^x K(x,y,t,t)\upsilon_t^m(y,t)dy\right) X_j(x)dx-\\
-\int_0^l \left(a\int_0^t K(x,x,t,\tau)\upsilon^m(x,\tau)d\tau\right)_x X_j(x)dx = \int_0^l f(x,t)X_j(x)dx.
\end{gathered} \tag{2.14}$$

Подставив в (2.14) выражение для $\upsilon^m(x,t)$ и поменяв порядок интегрирования, получим систему интегродифференциальных уравнений относительно $d_i(t)$

$$d_j''(t) + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(t)d_i(t) + \sum_{i=1}^m \int_0^t \beta_{ij}(\tau)d_i(\tau)d\tau = F_j(t). \tag{2.15}$$

Дважды проинтегрировав ее по t, учитывая начальные условия, получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$d_j(t) + \int_0^t d(\eta)\kappa_j(t,\eta)d\eta = \hat{F}_j(t),$$

где $\kappa_j(t,\eta) = \sum\limits_{i=1}^m (t-\eta)(\alpha_{ij}(\eta) + \frac{t-\eta}{2}\beta_{ij}(\eta))$.

Так как ядра $\kappa_j(t,\eta)$ ограничены, эта система имеет единственное решение [4]. Таким образом, построена последовательность приближенных решений. Покажем, что полученная последовательность ограничена.

Априорная оценка решения

При получении априорной оценки вместо $\upsilon^m(x,t)$ будем писать $\upsilon(x,t)$. Умножим (2.8) на $\upsilon_t(x,t)$ и проинтегрируем по Q_{t_1}, где $t_1 \in (0,T)$.

$$
\begin{gathered}
\int_0^l \upsilon_t^2(x,t)\big|_{t_1} dx - \int_0^{t_1}\int_0^l \upsilon_t\upsilon_{tt}dxdt + \int_0^{t_1}\int_0^l a\upsilon_x\upsilon_{xt}dxdt = -\int_0^{t_1}\int_0^l c\upsilon\upsilon_t dxdt - \\
-\int_0^{t_1}\int_0^l \upsilon_t\int_0^t\int_0^x R_{tt}(x,y,t,\tau,1)\upsilon(y,\tau)dyd\tau dxdt + \\
+\int_0^{t_1}\int_0^l \upsilon_t\left(a\int_0^t\int_0^x R_x(x,y,t,\tau,1)\upsilon(y,\tau)dyd\tau\right)_x dxdt - \\
-\int_0^{t_1}\int_0^l c\upsilon_t\int_0^t\int_0^x R(x,y,t,\tau,1)\upsilon(y,\tau)dyd\tau dxdt - \\
-\int_0^{t_1}\int_0^l \upsilon_t\int_0^x K(x,y,t,t)\upsilon_t(y,t)dydxdt - \int_0^{t_1}\int_0^l \upsilon_t\int_0^x K_t(x,y,t,t)\upsilon(y,t)dydxdt - \\
-\int_0^{t_1}\int_0^l \upsilon_t\int_0^x R_t(x,y,t,\tau,1)\big|_{\tau=t}\upsilon(y,t)dydxdt + \\
+\int_0^{t_1}\int_0^l a\upsilon_t\left(\int_0^t K(x,x,t,\tau)\upsilon(x,\tau)d\tau\right)_x dxdt + \int_0^{t_1}\int_0^l f\upsilon_t dxdt + \int_0^l \sigma^2(x)dx.
\end{gathered}
\tag{2.16}
$$

Проинтегрировав по частям второе и третье слагаемые и оценив правую часть равенства, используя неравенство Коши–Буняковского и представление функции $\upsilon(x,t) = \int_0^x \upsilon_\xi(\xi,t)d\xi$, получим неравенство

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\int_0^l \upsilon_t^2(x,t_1)dx + \frac{\nu}{2}\int_0^l \upsilon_x^2(x,t_1)dx \leqslant \\
\leqslant \left(\frac{l^2\mu^2}{2} + Tc_9\right)\int_{Q_{t_1}} \upsilon_x^2 dxdt + C_1\int_{Q_{t_1}} \upsilon_t^2 dxdt + C_2\int_{Q_{t_1}} \upsilon^2 dxdt + \\
+\frac{1}{2}\int_0^l a(x,0)\upsilon_x^2(x,0)dx + \frac{1}{2}\int_{Q_{t_1}} f^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l \sigma^2(x)dx.
\end{gathered}
\tag{2.17}
$$

Заметим, что

$$
\int_0^l \upsilon^2(x,t)dx \leqslant \int_0^l\int_0^{t_1}\left(2(\upsilon_\eta(x,\eta)d\eta)^2 + 2\varphi(x)^2\right)dx.
$$

Применив неравенство Коши–Буняковского, имеем:

$$
\int_0^l \upsilon^2(x,t)dx \leqslant T\int_{Q_{t_1}} \upsilon_t^2(x,t)dtdx + 2\int_0^l \varphi^2(x)dx.
$$

Сложим полученное неравенство с предыдущим

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l(\upsilon^2(x,t_1)+\upsilon_t^2(x,t_1)+\upsilon_x^2(x,t_1))dx\leqslant k\int\limits_{Q_{t_1}}(\upsilon^2+\upsilon_t^2+\upsilon_x^2)dxdt+\\+\tfrac12\int\limits_0^l a(x,0)\varphi'^2(x)dx+\tfrac12\int\limits_{Q_{t_1}}f^2dxdt+\tfrac12\int\limits_0^l\sigma^2(x)dx+2\int\limits_0^l\varphi^2(x)dx.\end{gathered}\tag{2.18}$$

Применим лемму Гроноулла [7]

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l(\upsilon^2(x,t_1)+\upsilon_t^2(x,t_1)+\upsilon_x^2(x,t_1))dx\leqslant\\ \leqslant\tfrac12e^{kt_1}\left(\int\limits_0^l a(x,0)\varphi'^2(x)dx+\int\limits_{Q_{t_1}}f^2dxdt+\int\limits_0^l\sigma^2(x)dx+4\int\limits_0^l\varphi^2(x)dx\right).\end{gathered}$$

Пусть $\kappa=\frac12e^{kT}$. В силу произвольности t_1

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l(\upsilon^2(x,t)+\upsilon_t^2(x,t)+\upsilon_x^2(x,t))dx\leqslant\\ \leqslant\kappa\left(\int\limits_0^l a(x,0)\varphi'^2(x)dx+\int\limits_{Q_T}f^2dxdt+\int\limits_0^l\sigma^2(x)dx+4\int\limits_0^l\varphi^2(x)dx\right).\end{gathered}$$

Проинтегрируем неравенство по t от 0 до T:

$$\int\limits_{Q_T}(\upsilon^2(x,t)+\upsilon_t^2(x,t)+\upsilon_x^2(x,t))dxdt\leqslant\kappa T\widetilde{N}.$$

Таким образом получим априорную оценку решения:

$$||\upsilon||_{W_2^1(Q_T)}\leqslant N,\tag{2.19}$$

где N зависит только от входных данных.

Итак, построенная последовательность приближенных решений ограничена, так как для всех $\upsilon^m(x,t)$ выполняется оценка (2.19). Поэтому из теоремы о слабой компактности ограниченного множества гильбертова пространства следует, что из данной последовательности можно выделить последовательность, слабо сходящуюся в $W_2^1(Q_T)$: $\upsilon^m(x,t)\to\upsilon(x,t)$.

Осталось показать, что слабый предел и является обобщенным решением. Для этого надо убедиться в том, что для любой функции $\omega^m(x,t)$, представимой в виде $\omega^m(x,t)=\sum\limits_{i=1}^m b_i(t)X_i(x)$, выполняется интегральное тождество. Умножив (2.14) на произвольную функцию $b_j(t)\in W_2^1(0,T)$ такую, что $b_j(T)=0$, просуммировав по j от 1 до m, зафиксировав $\omega^{m_0}(x,t)$ и перейдя к пределу по m [5], получим нужное.

Множество функций $\omega^{m_0}(x,t)$ плотно в $\hat{W}_{2,0}^1$ [6]. Поэтому, переходя к пределу по m_0, получим

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_{Q_T} \upsilon_t\omega_t dxdt + \int\limits_{Q_T} a\upsilon_x\omega_x dxdt + \int\limits_{Q_T} c\upsilon\omega dxdt + \\
+\int\limits_{Q_T} \omega \int\limits_0^t\int\limits_0^x R_{tt}(x,y,t,\tau,1)\upsilon(y,\tau)dyd\tau dxdt - \\
-\int\limits_{Q_T} \omega \left(a\int\limits_0^t\int\limits_0^x R_x(x,y,t,\tau,1)\upsilon(y,\tau)dyd\tau \right)_x dxdt + \\
+\int\limits_{Q_T} \omega c \int\limits_0^t\int\limits_0^x R(x,y,t,\tau,1)\upsilon(y,\tau)dyd\tau dxdt + \\
+\int\limits_{Q_T} \omega \int\limits_0^x K_t(x,y,t,t)\upsilon(y,\tau)dydxdt + \int\limits_{Q_T} \omega \int\limits_0^x R_t(x,y,t,\tau,1)\big|_{\tau=t}\upsilon(y,t)dydxdt + \\
+\int\limits_{Q_T} \omega \int\limits_0^x K(x,y,t,t)\upsilon_t(y,\tau)dydxdt - \int\limits_{Q_T} a\omega \left(\int\limits_0^t K(x,x,t,\tau,)\upsilon(x,\tau)d\tau \right)_x dxdt = \\
= \int\limits_{Q_T} f\omega dxdt + \int\limits_0^l \sigma(x)\omega_x dx.
\end{gathered}
$$

Значит, слабый предел построенной последовательности приближенных решений является обобщенным решением задачи (2.8)–(2.12).

Единственность решения

Чтобы показать единственность решения, предположим, что существует два решения, обозначим их разность $\upsilon(x,t)$ и выберем $\omega(x,t)$ специальным образом:

$$
\omega_t(x,t) = \begin{cases} \upsilon(x,t), & 0 \leqslant t \leqslant \eta, \\ 0, & \eta < t \leqslant T. \end{cases}
$$

Подставив выбранное $\omega(x,t)$ в интегральное тождество и сделав оценки, можно получить следующее неравенство:

$$
\frac{1}{2}\int\limits_0^l (\omega_\eta^2(x,\eta) + a\omega_x^2(x,0))dx \leqslant \widetilde{M} \int\limits_{Q_\eta} (\omega^2 + \omega_x^2 + \omega_t^2)dxdt.
$$

Введем функцию

$$
\zeta(x,t) = -\int\limits_0^t \upsilon_x(x,z)dz.
$$

Выразив через нее $\omega_x(x,0)$, имеем:

$$
\int\limits_0^l (\omega_\eta^2(x,\eta) + a\zeta^2(x,\eta))dx \leqslant M \int\limits_{Q_\eta} (\omega^2 + \omega_x^2 + \omega_t^2)dxdt.
$$

Заметим, что $\omega^2(x,\eta) \leqslant \eta \int\limits_0^\eta \upsilon^2(x,z)dz$. Тогда

$$
\int\limits_0^l \upsilon^2(x,\eta)dx + (\nu - 2M_1\eta)\int\limits_0^l \zeta^2(x,\eta)dx \leqslant M_1 \int\limits_{Q_\eta} (\zeta^2(x,t) + (1+\eta^2)\upsilon^2)dxdt.
$$

Выберем η так, чтобы $\nu - 2M_1\eta \geqslant \frac{\nu}{2}$ (это выполняется, если $\eta \in [0, \frac{\nu}{4M_1}]$). В таком цилиндре выполняется неравенство

$$\int_0^l (\upsilon^2(x,\eta) + \zeta^2(x,\eta))dx \leqslant M_2 \int_{Q_\eta} (\zeta^2(x,t) + (1+\eta^2)\upsilon^2)dxdt.$$

Применяя лемму Гронуолла, получим

$$\int_0^l (\upsilon^2(x,\eta) + \zeta^2(x,\eta))dx \leqslant 0.$$

Из этого следует, что $\upsilon(x,\eta) = 0 \ \forall \eta \in [0, \frac{\nu}{4M_1}]$. Также можно показать, что $\upsilon(x,\eta) = 0$ для $\forall \eta \in [0, \frac{\nu}{2M_1}]$ Продолжая этот процесс, через конечное число шагов получим, что $\upsilon(x,\eta) = 0$ в Q_T, из чего следует единственность решения задачи (2.8)–(2.12) в Q_T, а значит, и задача (1.1)–(1.4) имеет единственное решение.

Литература

[1] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.

[2] Пулькина Л.С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. 3. С. 435–445.

[3] Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 763–774.

[4] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., 1959. 232 с.

[5] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения гиперболического типа // Вестник СамГТУ. 2006. Вып. 42. С. 35–40.

[6] Пулькина Л.С. Дифференциальные уравнения в частных производных. Самара: Издательство "Самарский университет", 2004. 140 с.

[7] Филатов О.П. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Самара: Издательство "Самарский университет", 1999. 210 с.

Поступила в редакцию 19/X/2009;
в окончательном варианте — 19/X/2009.

ON CERTAIN NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITION FOR HYPERBOLIC EQUATION

© 2009 M.V. Strigun[2]

In this paper, we consider mixed problem for hyperbolic equation with nonlocal boundary condition involving an integral of required solution. The existence and uniqueness of the generalized solution are established.

Key words: hyperbolic equation, nonlocal problem, integral condition.

Paper received 19/X/2009.
Paper accepted 19/X/2009.

[2]Strigun Maria Vladimirovna (marii@samaracom.ru), Dept. of Equations of Mathematical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.