УДК 512.553+512.541

Т-РАДИКАЛЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ БИМОДУЛЯМИ[1]

© 2009 Е.А. Тимошенко[2]

В работе доказан следующий факт: для произвольного кольца S с единицей и левого модуля $_SF$ можно найти S-S-бимодуль N такой, что условия $A \otimes_S F = 0$ и $A \otimes_S N = 0$ эквивалентны. Показано, что для этого достаточно положить $N = F \otimes S$.

Ключевые слова: модуль, радикал, тензорное произведение, ковариантное расширение, бимодуль.

Введение

В статье [1] исследовались связи между двумя похожими по свойствам классами идемпотентных радикалов, определяемых при помощи тензорного произведения: Т-радикалов и $\mathrm{T}(F)$-радикалов. Перед тем как дать нужные определения, перечислим некоторые обозначения и договоренности.

Группы будут предполагаться абелевыми, кольца — ассоциативными с единицей, модули — унитарными. Мы будем приписывать кольцу свойства его аддитивной группы; так, фраза "S — периодическое кольцо" означает, что периодической является аддитивная группа S^+ данного кольца. Через $\otimes_S$ и $\otimes$ обозначается тензорное произведение над S и над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ соответственно. Периодическую часть и p-компоненту группы M обозначаем $\mathbf{t}(M)$ и M_p.

Если $_SF$ — левый модуль над S, то для правого модуля A_S сумму всех подмодулей B из A таких, что выполнено равенство $B \otimes_S F = 0$, мы будем обозначать через $\mathrm{W}_F(A)$ и называть $\mathrm{T}(F)$-*радикалом* модуля A. Заданный таким образом функтор W_F есть идемпотентный радикал (основные факты о радикалах см. в [2, 3]) категории правых S-модулей mod-S. *Радикальный класс* $\mathcal{T}(F)$ этого радикала, задаваемый условием $\mathrm{W}_F(A) = A$, состоит из тех и только тех модулей A_S, для которых $A \otimes_S F = 0$. Подчеркнем, что

[1]Статья поддержана ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы". Государственный контракт П937 от 20 августа 2009 г., а также частично профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238.

[2]Тимошенко Егор Александрович (tea471@mail.tsu.ru), кафедра общей математики Томского государственного университета, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36.

идемпотентный радикал однозначно задается своим радикальным классом. Если S совпадает с кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел, $\mathrm{T}(F)$-радикалы (и только они) имеют радикальные классы, являющиеся замкнутыми относительно взятия сервантных подгрупп [4].

Пусть R — еще одно кольцо, а $e\colon S \to R$ — гомоморфизм колец. Тогда мы можем рассматривать всякий правый R-модуль A как притягивающий S-модуль, если для любых элементов $a \in A$, $s \in S$ положим $as = ae(s)$. Для S-S-бимодуля $R/e(S)$ введем обозначение $\overline{R}$. Через $\mathcal{T}$ обозначим класс всех модулей B_R, для которых эпиморфизм $B \otimes_S R \to B \otimes_R R$, действующий по правилу $b \otimes_S r \mapsto b \otimes_R r$, является изоморфизмом. Сумму всех входящих в класс $\mathcal{T}$ подмодулей B модуля A_R мы будем называть Т-*радикалом* модуля A и обозначать через $\mathrm{W}(A)$. Это понятие в каком-то смысле дуально по отношению к Е-радикалу, введенному в [5].

Модуль A_R содержится в классе $\mathcal{T}$ в том и только в том случае, когда выполнено $A \otimes_S \overline{R} = 0$ [6]; отсюда можно вывести, что Т-радикал — это сужение $\mathrm{T}(\overline{R})$-радикала, действующего в mod-S, на категорию mod-R [1]. С учетом этого естественно с самого начала считать Т-радикал действующим в mod-S и таким образом отождествить его с $\mathrm{T}(\overline{R})$-радикалом. В работе [1] также показано, что для всякого бимодуля ${}_SN_S$ можно найти кольцо R и гомоморфизм e такие, что $R/e(S) \cong {}_SN_S$. При этом можно добиться, чтобы любой заранее заданный правый модуль A_S получался как притягивающий из подходящим образом выбранного правого R-модуля; тогда радикалы W и W_N представляют собой фактически один и тот же объект.

С этой позиции Т-радикал есть просто частный случай $\mathrm{T}(F)$-радикала. Естественно поставить обратный вопрос: всякий ли радикал W_F категории правых модулей mod-S можно представить в виде Т-радикала (а точнее, в виде W_N, где N — S-S-бимодуль)? Ниже мы убедимся, что ответ на этот вопрос положителен для любого кольца S; более того, будет показано, что в качестве N можно взять ковариантное расширение (этот термин введен в [7, гл. II, § 6]) $F \otimes S$ модуля F.

Основные результаты

Нам уже известно, что всякий левый модуль ${}_SF$ порождает радикал W_F категории правых модулей mod-S. Точно так же каждый правый модуль A_S будет задавать некоторый радикал ($\mathrm{T}(A)$-радикал) категории S-mod левых модулей. Этот радикал также обозначим W_A. В дальнейшем будет удобно пользоваться следующей леммой.

Лемма 1. Для кольца S следующие условия эквивалентны:

а) для любого ${}_SF$ радикалы W_F и $\mathrm{W}_{F\otimes S}$ категории mod-S совпадают;

б) для любых ${}_SF$, A_S и $X = A \otimes_S F$ из $X \otimes S = 0$ следует $X = 0$;

в) для любого A_S радикалы W_A и $\mathrm{W}_{S\otimes A}$ категории S-mod совпадают.

Доказательство. Сразу заметим, что эквивалентность б) $\Leftrightarrow$ в) будет следовать из эквивалентности б) $\Leftrightarrow$ а) из-за симметричности условия б).

а) $\Rightarrow$ б). Из равенства радикалов W_F и $\mathrm{W}_{F\otimes S}$ мы получаем равенство их радикальных классов $\mathcal{T}(F) = \mathcal{T}(F \otimes S)$. Далее, из $X \otimes S = 0$ в силу ассоциативности тензорного произведения следует $A \in \mathcal{T}(F \otimes S)$, поэтому имеем $A \in \mathcal{T}(F)$. Это означает, что $X = 0$.

б) $\Rightarrow$ а). Из эквивалентности равенств $X = 0$ и $X \otimes S = 0$ мы получаем эквивалентность условий $A \in \mathcal{T}(F)$ и $A \in \mathcal{T}(F \otimes S)$. Следовательно, $\mathcal{T}(F)$ совпадает с классом $\mathcal{T}(F \otimes S)$, а это и означает, что $\mathrm{W}_F = \mathrm{W}_{F\otimes S}$.

В дальнейшем окажется, что равносильным условиям леммы 1 удовлетворяет любое кольцо. Для доказательства этого факта будет проверяться условие б) из ее формулировки. Сначала отдельно рассмотрим два частных случая. Напомним, что группа M называется *m-ограниченной*, если имеет место равенство $mM = 0$ (здесь m — натуральное число).

Теорема 2. Все периодические кольца, а также кольца без кручения удовлетворяют эквивалентным условиям леммы 1.

Доказательство. Предположим, что $X = A \otimes_S F \neq 0$, но $X \otimes S = 0$.

Пусть S — периодическое кольцо характеристики $m > 0$. Заметим, что тогда X является m-ограниченной группой. Хотя бы для одного простого числа p, делящего m, имеем $X_p \neq 0$. Ясно, что тогда группы X и S^+ не являются p-делимыми, т. е. обе они имеют циклическую группу $\mathbb{Z}(p)$ своим гомоморфным образом. Значит, из $X \otimes S = 0$ следует $\mathbb{Z}(p) \otimes \mathbb{Z}(p) = 0$, что дает нам противоречие.

Пусть теперь S — кольцо без кручения, $\mathrm{Z}(S)$ — его центр. Допустим, что для натурального числа n и $z \in S$ выполнено $nz \in \mathrm{Z}(S)$. Тогда для любого $s \in S$ имеем равенства $n(zs - sz) = (nz)s - s(nz) = 0$, откуда следует включение $z \in \mathrm{Z}(S)$. Это доказывает, что подгруппа $\mathrm{Z}(S)^+$ сервантна в S^+ и, значит, $X \otimes \mathrm{Z}(S) = 0$. Группа X, очевидно, является модулем над кольцом $\mathrm{Z}(S)$, следовательно, отображение $x \otimes z \mapsto xz$ задает эпиморфизм абелевых групп $X \otimes \mathrm{Z}(S) \to X$. Получили равенство $X = 0$, которое противоречит исходному предположению.

Теперь можно сформулировать основной результат статьи.

Теорема 3. Для всякого кольца S и всякого модуля ${}_SF$ радикалы W_F и $\mathrm{W}_{F\otimes S}$ категории mod-S совпадают.

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно рассмотреть случай, когда кольцо S является смешанным. Как и ранее, предположим сначала, что $X = A \otimes_S F \neq 0$ и $X \otimes S = 0$.

Ясно, что $\mathbf{t}(F)$ и F_p — подмодули в ${}_SF$, а $\mathbf{t}(S)$ является идеалом в S. Введем обозначения $\overline{F} = F/\mathbf{t}(F)$ и $\overline{S} = S/\mathbf{t}(S)$. Модуль ${}_S\overline{F}$ естественным образом можно рассматривать как левый модуль над $\overline{S}$. Поэтому $\overline{F}$ также можно превратить в правый модуль над $\mathrm{Z}(\overline{S})$, полагая $\overline{f}\,\overline{s} = s\overline{f}$ для любых элементов $\overline{f} \in \overline{F}$ и $\overline{s} \in \mathrm{Z}(\overline{S})$.

Пусть $r \in S$, $\overline{s} \in \mathrm{Z}(\overline{S})$ и $\overline{f} \in \overline{F}$. Тогда из равенства $\overline{sr} = \overline{rs}$ немедленно следует $sr - rs \in \mathbf{t}(S)$ и, значит,

$$(r\overline{f})\overline{s} - r(\overline{f}\,\overline{s}) = s(r\overline{f}) - r(s\overline{f}) = (sr - rs)\overline{f} \in \mathbf{t}(S)\overline{F} = 0.$$

Поэтому $\overline{F}$ является S-$\mathrm{Z}(\overline{S})$-бимодулем.

Итак, $Y = A \otimes_S \overline{F}$ — правый модуль над $\mathrm{Z}(\overline{S})$. Группа $X \otimes S = 0$ имеет своим гомоморфным образом $Y \otimes \overline{S}$, т. е. $Y \otimes \overline{S} = 0$. Мы уже знаем, что $\mathrm{Z}(\overline{S})^+$ есть сервантная подгруппа группы $\overline{S}^+$; значит, $Y \otimes \mathrm{Z}(\overline{S}) = 0$. Группа Y является гомоморфным образом группы $Y \otimes \mathrm{Z}(\overline{S})$, так что $Y = 0$.

Отсюда следует, что в точной последовательности абелевых групп

$$A \otimes_S \mathbf{t}(F) \longrightarrow A \otimes_S F = X \longrightarrow A \otimes_S \overline{F} = Y \longrightarrow 0$$

первое отображение является эпиморфизмом. Это означает, что группа X периодическая и для некоторого простого числа p выполнено $X_p \neq 0$; при этом $X_p \otimes S = 0$. Ясно также, что группа X_p служит гомоморфным образом для $A \otimes_S F_p$ (отметим, что из одного лишь факта периодичности абелевой группы $A \otimes_S F$ нельзя было сделать вывод, что периодической обязательно является одна из групп A и F: в общем случае это утверждение неверно даже для коммутативного кольца S).

Пусть X_p не является делимой группой. Известно [4], что в этом случае из равенства $X_p \otimes S = 0$ следует p-делимость группы S^+ и, в частности, обратимость элемента $p \cdot 1 \in S$. Тогда $F_p = 0$; следовательно, имеем $X_p = 0$ — противоречие. Итак, X_p есть ненулевая делимая группа. Если бесконечная циклическая подгруппа $\langle 1 \rangle$ является p-сервантной в S^+, то из равенства $X_p \otimes S = 0$ следует $X_p \cong X_p \otimes \langle 1 \rangle = 0$, что невозможно.

Пусть $\langle 1 \rangle$ не является p-сервантной подгруппой. Тогда найдется целое число m, не делящееся на p^k, но удовлетворяющее равенству $m \cdot 1 = p^k s$ для какого-то элемента $s \in S$. Пусть $m = p^r n$, где число n взаимно просто с p. Тогда существуют целые числа u и v такие, что $up^{k-r} + vn = 1$. Отсюда получаем

$$p^r \cdot 1 = p^r(up^{k-r} + vn) \cdot 1 = (up^k + vm) \cdot 1 = p^k(u \cdot 1 + vs).$$

Это значит, что элемент $p^r \cdot 1$ имеет в S^+ бесконечную p-высоту. Поэтому группа F_p (как и X_p) является p^r-ограниченной, т. е. группа X_p не может быть делимой, что вновь приводит нас к противоречию.

Таким образом, для $X = A \otimes_S F$ из $X \otimes S = 0$ действительно следует равенство $X = 0$, что и требовалось.

Очевидно, справедлив также левый аналог доказанного результата: для всякого кольца S и правого модуля A_S радикалы W_A и $\mathrm{W}_{S \otimes A}$ категории левых модулей S-mod совпадают.

Естественное обобщение $\mathrm{T}(F)$-радикала строится следующим образом. Пусть $\mathcal{F}$ есть некоторый непустой класс левых S-модулей. Сумму всех подмодулей B из A_S таких, что $B \otimes_S F = 0$ для всех модулей $F \in \mathcal{F}$, будем называть $\mathrm{T}(\mathcal{F})$-*радикалом* модуля A и обозначать $\mathrm{W}_{\mathcal{F}}(A)$. В радикальный класс $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ этого идемпотентного радикала входят те и только те модули A_S, которые удовлетворяют условию $A \otimes_S F = 0$ при всех $F \in \mathcal{F}$.

Через $\mathcal{F} \otimes S$ мы обозначим класс всех S-S-бимодулей $F \otimes S$, для которых выполнено $F \in \mathcal{F}$.

Теорема 4. Для всякого кольца S и непустого класса левых S-модулей $\mathcal{F}$ радикалы $\mathrm{W}_{\mathcal{F}}$ и $\mathrm{W}_{\mathcal{F}\otimes S}$ категории mod-S совпадают.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что модуль A_S удовлетворяет всем равенствам $A \otimes_S F = 0$, где $F \in \mathcal{F}$, тогда и только тогда, когда он удовлетворяет всем равенствам вида $A \otimes_S (F \otimes S) = 0$. Из совпадения классов $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{T}(\mathcal{F} \otimes S)$ следует $\mathrm{W}_{\mathcal{F}} = \mathrm{W}_{\mathcal{F}\otimes S}$.

Литература

[1] Тимошенко Е.А. Т-радикалы и Е-радикалы в категории модулей // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45. № 1. С. 201–210.

[2] Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. Кишинев: Штиинца, 1983. 156 с.

[3] Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. М.: Наука, 1969. 152 с.

[4] Тимошенко Е.А. Т-радикалы в категории абелевых групп // Фундамент. и прикл. мат. 2007. Т. 13. № 3. С. 193–208.

[5] Pierce R.S. E-modules // Abelian Group Theory, Proceedings of the 1987 Perth Conference (Perth, August 9–14, 1987). Providence: Amer. Math. Soc., 1989. P. 221–240.

[6] Крылов П.А., Приходовский М.А. Обобщенные Т-модули и Е-модули // Универсальная алгебра и ее приложения: труды участников международного семинара, посвященного памяти профессора МГУ Л.А. Скорнякова (Волгоград, 6–11 сентября 1999 г.). Волгоград: Перемена, 2000. С. 153–169.

[7] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: Иностр. лит., 1960. 512 с.

Поступила в редакцию 7/IX/2009;
в окончательном варианте — 7/IX/2009.

T-RADICALS GENERATED BY BIMODULES

© 2009 E.A. Timoshenko[3]

We prove that for an arbitrary ring S with identity and an arbitrary left module ${}_SF$ there exists an S-S-bimodule N such that the conditions $A \otimes_S F = 0$ and $A \otimes_S N = 0$ are equivalent. It is shown that it suffices to set $N = F \otimes S$.

Key words: module, radical, tensor product, covariant extension, bimodule.

Paper received 7/IX/2009.
Paper accepted 7/IX/2009.

[3]Timoshenko Egor Aleksandrovich (`tea471@mail.tsu.ru`), Dept. of General Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, 634050, Russia.