УДК 517.946

О НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ[1]

 М.В. Уварова[2]

Рассмотрен вопрос о разрешимости нелокальных краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений первого порядка с операторами, являющимися генераторами аналитических полугрупп. Получен ряд теорем о существовании и единственности решений этих задач при определенных условиях на данные. Рассмотрения проходят в пространствах Соболева-Бесова. Полученные результаты применяются к исследованию нелокальных краевых задач для параболических уравнений и систем.

Ключевые слова: операторно-дифференциальное уравнение, нелокальная краевая задача, векторнозначное пространство Соболева-Бесова, параболическое уравнение.

1. Постановка задачи

В настоящей работе мы рассматриваем нелокальные краевые задачи для операторно-дифференциального уравнения вида

$$u_t - Lu = f, \quad t \in (0,T), \ T \leqslant \infty, \tag{1.1}$$

где $L : E \to E$ — плотно определенный замкнутый оператор и E — банахово пространство. Такие краевые задачи возникают в механике, физике, биологии и других естественнонаучных дисциплинах.

В простейшей ситуации нелокальные условия для уравнения (1.1) имеют вид [1]

$$u(0) = \alpha u(T) + u_0. \tag{1.2}$$

Наибольшее количество работ посвящено нелокальным краевым задачам для параболических уравнений второго порядка [2, 10]. Наиболее общая

[1]Статья поддержана аналитической ведомственной целевой программой "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)", мероприятие 2 (код проекта 3443).

[2]Уварова Матрена Владимировна (m_uvarova@ugrasu.ru), кафедра высшей математики Югорского государственного университета, 628012, Россия, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, 16.

постановка, по-видимому, приведена в работе [3]. Здесь нелокальное условие имеет вид

$$u(0) = Bu + u_0, \tag{1.3}$$

где B — некоторый линейный оператор. Среди работ, посвященных параболическим уравнениям высокого порядка с нелокальными условиями, отметим [15, 22], а среди работ, посвященных общим уравнениям вида (1.1) [6–9]. Достаточно подробно (при различных предположениях на оператор L) исследованы задачи вида

$$u(0) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} c_k u(t_k) + u_0. \tag{1.4}$$

Естественным обобщением условий (1.4) являются условия

$$\int_0^T u(\tau)d\sigma(\tau) = u_0. \tag{1.5}$$

Краевые условия (1.5) в случае кусочно-линейных функций σ рассматривались в [6]. Условия (1.5) возникают, в частности, при постановке и исследовании обратных задач, в частности, задач с финальным переопределением [23, 24].

В данной статье будет исследован вопрос об условиях однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи (1.1), (1.5) с произвольной функцией ограниченной вариации σ. Основными результатами работы являются теоремы 4, 5, 6, где в первых двух устанавливаются условия разрешимости и единственности решения задачи (1.1), (1.5) а в третьей рассматриваются приложения результатов к параболическим уравнениям с операторнозначными коэффициентами.

2. Определения и предварительные результаты

Всюду ниже считаем, что E — рефлексивное комплексное банахово пространство. Пусть $L : E \to E$ — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $D(L)$. $L(X,Y)$ (X, Y — банаховы пространства) — пространство линейных непрерывных операторов, определенных на X со значениями в Y. Если $X = Y$, то полагаем $L(X,Y) = L(X)$. Через $\sigma(L)$, $\rho(L)$ обозначим спектр и резольвентное множество оператора L. Определим пространства $L_{p,t^{\delta_0}}(0,T;E)$ как пространства сильно измеримых функций, определенных на отрезке $[0,T]$ со значениями в E таких, что $\|u\|^p_{L_{p,t^{\delta_0}}(0,T;E)} = \int_0^T t^{\delta_0 p}\|u(t)\|^p_E dt < \infty$. В случае $\delta_0 = 0$ обозначаем это пространство через $L_p(0,T;E)$. Далее символом $\|\cdot\|_q$ обозначаем норму в $L_q(0,T;E)$. Обычным образом определяем также пространства Соболева $W^s_p(0,T;E)$ [5].

Определение 1. Оператор L называется позитивным, если интервал $(-\infty, 0]$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(L)$ оператора L и существует число $C \geqslant 0$ такое, что

$$\|(L - tI)^{-1}\| \leqslant C/(1+|t|), \quad t \in (-\infty, 0]. \tag{2.1}$$

Пусть оператор L таков, что для некоторого $\varphi \in R$ оператор $e^{-i\varphi}L$ позитивен. Назовем такое значение φ допустимым. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ отношение двойственности между E и сопряженным пространством E^* и через L^* сопряженный к L оператор. Положим $H_k = D(L^k)$ $(k > 0)$. Пространство H_k при $k < 0$ [16, §5] можно определить как двойственное пространство к $D((L^*)^{-k})$, норма в котором определяется равенством

$$\|u\|_{H_k} = \sup_{v \in D((L^*)^{-k})} |\langle u, v\rangle| / \|v\|_{D((L^*)^{-k})}.$$

Эта норма совпадает с нормой $\|L^k u\|_0 = \|u\|_{H_k}$, и пространство H_k может быть определено также как пополнение $H_0 = E$ по этой норме. С помощью метода вещественной интерполяции построим пространство $B_q^s = (H_m, H_k)_{\theta,q}$, где $1 < q < \infty$, $k < s < m$ и $\theta = \frac{m-s}{m-k}$.

По-видимому, впервые эти пространства были построены и описаны в [5, § 1.14, § 1.15.4; 16, § 5]. По построению L изоморфно отображает H_k на H_{k-1}, и тогда в силу обычных свойств интерполяционных пространств L будет изоморфно отображать B_q^s на B_q^{s-1}.

Утверждение 1. Определение пространств B_q^s корректно и не зависит от m, k. Пространство H_k при $k > s$ плотно в B_q^s и в H_l при $l < k$. Кроме того, выполняются следующие равенства:

$$(B_{q_0}^{s_0}, B_{q_1}^{s_1})_{\theta,q} = B_q^s, \quad (B_q^{s_0}, H_{s_1})_{\theta,q} = B_q^s, \tag{2.2}$$

где $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $\theta \in (0,1)$ и $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ $(1 < q_i < \infty, \quad i = 0,\ 1)$.

Утверждение 2. Норма в пространстве B_q^s при $s > 0$ эквивалентна норме

$$\|u\|_{B_q^s} = \|t^{s-k-\frac{1}{q}}[L(L+te^{i\varphi})^{-1}]^l L^k u\|_{L_q(0,\infty;E)}, \tag{2.3}$$

где $l > s - k$, $0 \leqslant k < s$, $k,\ l \in N$, а при $s \leqslant 0$ норме $\|u\|_{B_q^s} = \|L^{-m}u\|_{B_q^{s+m}}$ $(m > -s)$. Нормы (2.3), отвечающие различным допустимым значениям φ, эквивалентны.

Первое утверждение содержится [5, § 1.14; 16, § 5]. Второе имеется в [16]. Оно также вытекает из теоремы [5, § 1.14.3] и того факта, что пространства B_q^s, отвечающие операторам $e^{-i\varphi}L$ при различных φ, совпадают.

Определение 2. Банахово пространство E называется *ζ-выпуклым*, если существует симметричная вещественнозначная функция $\zeta(u,v)$, которая выпукла по каждому аргументу и удовлетворяет условию $\zeta(0,0) > 0$, $\zeta(u,v) \leqslant \|u+v\|$ для всех $u, v \in E:$ $\|u\| = \|v\| = 1$.

Другое название этого класса пространств — UMD-пространства или HT-пространства (см. свойства этих пространств, например, в [12, 22]).

Определение 3. Семейство операторов $\tau \subset L(X,Y)$ $(X, Y$ — банаховы пространства) называется *R-ограниченным*, если для некоторого $p \in [1,\infty)$

и некоторой постоянной $c_p \geqslant 0$ справедливо неравенство (см. [13])

$$\Big\|\sum_{i=1}^{N} r_i T_i x_i\Big\|_{L_p(0,1;Y)} \leqslant c_p \Big\|\sum_{i=1}^{N} r_i x_i\Big\|_{L_p(0,1;X)}$$

для всех N, $T_1, T_2, \dots, T_N \in \tau$ и $x_1, x_2, \dots, x_N \in X$, где $r_i(t) = sgn \sin(2^i \pi t)$ — функции Радемахера на отрезке [0,1].

Отметим, что условие R-ограниченности не зависит от p (см. [19]).

Для данного числа $\alpha \in R$ через $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ обозначим целую и дробную часть числа α соответственно.

3. Вспомогательные результаты

Рассмотрим данные Коши

$$u|_{t=0} = u_0. \tag{3.1}$$

Считаем, что оператор L из (1.1) — замкнутый линейный неограниченный оператор, такой, что для некоторого $\theta \in (\pi/2, \pi)$ $S_\theta = \{z \in C : |argz| \leqslant \theta\} \subset \rho(L)$ и

$$\|(L-\lambda)^{-1}\| \leqslant c/(1+|\lambda|), \quad \forall \lambda \in S_\theta. \tag{A}$$

Положим $\gamma_1 = \{re^{i\theta} : r \in (\varepsilon, \infty)\}$, $\gamma_2 = \{re^{-i\theta} : r \in (\varepsilon, \infty)\}$, $\gamma_3 = \{\varepsilon e^{i\varphi} : |\varphi| \geqslant \theta\}$, где параметр ε выбран таким, что $\{z \in C : \ |z| \leqslant \varepsilon\} \subset \rho(L)$, $\gamma_\theta = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$. Далее символом $\|\cdot\|$ обозначаем норму в E, а через B^s_q пространства, построенные по оператору L, удовлетворяющему условию (A). Справедлива следующая теорема. Всюду далее считаем, что $q \in (1, \infty)$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (A), $f \in L_q(0,T; B^s_q)$ и $u_0 \in B^{s+1-1/q}_q$. Тогда существует единственное решение $u(t)$ задачи Коши (1.1), (3.1) такое, что $u(t) \in W^1_q(0,T; B^s_q)$, $u(t) \in L_q(0,T; B^{s+1}_q)$, и справедлива оценка

$$\|u\|_{W^1_q(0,T;B^s_q)} + \|u\|_{L_q(0,T;B^{s+1}_q)} \leqslant C(\|f\|_{L_q(0,T;B^s_q)} + \|u_0\|_{B^{s+1-1/q}_q}).$$

Доказательство. При $s \in (0,1)$ теорема вытекает из [11, теорема 4.15]. При $s \neq [s]$, $s \overline{\in} (0,1)$, теорема — следствие этого результата и эквивалентности норм $\|u\|_{B^s_q}$ и $\|L^{[s]}\|_{B^{s-[s]}_q}$. Действительно, пусть v — решение задачи (1.1), (3.1) с данными $L^{[s]}f$, $L^{[s]}u_0$ из класса $W^1_q(0,T; B^{s-[s]}_q) \cap L_q(0,T; B^{s+1-[s]}_q)$. Тогда функция $u = L^{-[s]}v$ есть решение задачи (1.1), (3.1) из нужного класса с данными f, u_0. Пусть s — целое. Найдем дробные s_1, $s_2 :$ $s_1 < s < s_2$. По доказанному, отображение S сопоставляет данным (u_0, f) решение $u(t)$ задачи (1.1), (3.1) и рассматривается как отображение из $B^{s_i+1-1/q}_q \times L_q(0,T; B^{s_i}_q) = X_i$ $\quad (i = 1, 2)$ в $L_q(0,T; B^{s_i+1}_q) = Y_i$, а также оно непрерывно. Тогда $S \in L(X_1, Y_1)$, $S|_{X_2} \in L(X_2, Y_2)$ и по [5, теорема 1.3.3] $S|_{(X_1,X_2)_{\theta,q}} \in L((X_1,X_2)_{\theta,q},(Y_1,Y_2)_{\theta,q})$, $(\theta \in (0,1))$. Выбрав $\theta \in (0,1) : s_1(1-\theta)+s_2\theta = s$, получим, что S — непрерывное отображение $B_q^{s+1-1/q} \times L_q(0,T;B_q^s)$ в $L_q(0,T;B_q^{s+1})$. Отметим, что $(Y_1,Y_2)_{\theta,q} = L_q(0,T;B_q^{s+1})$ [5, теорема 1.1.2]. Поскольку построенная функция u одновременно является решением задачи, то непосредственно из уравнения (1.1) получим, что $u_t \in L_q(0,T;B_q^s)$, и справедлива соответствующая оценка.

Положим $\varphi(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t} d\sigma(\tau)$. Предположим, что

$$\exists\ \delta_0 > 0,\ \ \beta \leqslant 0 :\ \ |\varphi(\lambda)| \geqslant \delta_0 |\lambda|^\beta,\ \ \lambda \in C \backslash S_\theta. \tag{B}$$

Лемма 1. Если выполнено условие (B), то для любой функции $f \in L_q(0,T;E)$ и $\lambda \in C \setminus S_\theta$ задача $u_t - \lambda u = f$, $\int_0^T u d\sigma(\tau) = 0$ имеет единственное решение и найдется $\gamma \in [\beta, 0]$ такое, что справедлива оценка

$$\|u\|_q = \|(\partial_t - \lambda)^{-1} f\|_q \leqslant C\|f\|_q / |\lambda|^{1+\gamma}.$$

Доказательство. Рассмотрим задачу с параметром

$$u_t - \lambda u = f,\ \ \int_0^T u(\tau) d\sigma(\tau) = 0,\ \ \lambda \in C \setminus S_\theta.$$

Решение этой задачи существует и единственно и представлено в виде

$$u(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\xi)} f(\xi) d\xi - e^{\lambda t} \int_0^T \int_0^t e^{\lambda(t-\xi)} f(\xi) d\xi d\sigma(t) \Big/ \int_0^T e^{\lambda\tau} d\sigma(\tau).$$

Утверждение леммы легко вытекает из условия (B) и этого представления.

Далее, для удобства читателя мы приведем теорему 3.2 из работы [20]. Она используется при доказательстве теоремы 5. Вместо условия (A) будем использовать здесь условие R-ограниченности: для некоторого $\theta \in (\pi/2, \pi)$

$$S_\theta \subset \rho(L) \text{ и семейство } \{\lambda(L-\lambda)^{-1} : \lambda \in S_\theta\}\ R-\text{ограничено}. \tag{C}$$

Теорема 2. Пусть E — ζ-выпуклое банахово пространство и выполнено условие (C). Тогда для любых функций $f \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;E)$, $u_0 \in B_q^{\mu-1/q}$ с $\mu \in (1/q, 1]$ существует единственное решение задачи Коши (1.1), (3.1) такое, что

$$u \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;D(L)),\ \ u_t \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;E).$$

4. Основные результаты

Вначале рассмотрим задачу (1.1), (1.5) в случае $f = 0$. Следующая теорема — обобщение из работы [21, теорема 5.4, гл. 1].

Теорема 3. Пусть $f = 0$, $u_0 \in B_q^s$, и выполнены условия (A), (B). Тогда существует единственное решение задачи (1.1), (1.5) такое, что

$$u \in W_q^1(0,T;B_q^{s-1+\gamma+1/q}) \cap L_q(0,T;B_q^{s+\gamma+1/q}).$$

Решение u бесконечно дифференцируемо при $t > 0$, и справедливы включения

$$u^{(i)} t^{\delta_0} \in L_q(0,T;B_q^{s-i+\delta_0+\gamma+1/q}) \quad \text{при} \quad \delta_0 > -1/q,$$

$$u^{(i)}t^{\delta_0} \in C([0,T]; B_q^{s-i+\delta_0+\gamma}) \quad \text{при} \quad \delta_0 \geqslant 0$$

и оценки

$$\|u^{(i)}t^{\delta_0}\|_{L_q(0,T;B_q^{s-i+\delta_0+\gamma+1/q})} \leqslant C_1\|\varphi\|_{B_q^s}, \quad \delta_0 > -1/q,$$

$$\|u^{(i)}t^{\delta_0}\|_{C([0,T];B_q^{s-i+\delta_0+\gamma})} \leqslant C_1\|\varphi\|_{B_q^s}, \quad \delta_0 \geqslant 0,$$

где C_1 — некоторая постоянная, зависящая от i, δ_0 и постоянной из (A).

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $u_0 \in D(L^k)$ с $k = [s]+2$, иначе приблизим u_0 такими функциями. Полученные ниже оценки позволяют обосновать предельный переход. Рассмотрим интеграл

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\theta} e^{\lambda t}\frac{(L-\lambda)^{-1}L^k u_0}{\varphi(\lambda)\lambda^k}\,d\lambda, \text{ где } k = [s]+2. \tag{4.1}$$

Бесконечная дифференцируемость функции $u(t)$ вытекает из нормальной сходимости интеграла и интегралов, полученных формальным дифференцированием подынтегрального выражения. Используя равенство $(L-\lambda)^{-1}L = I + \lambda(L-\lambda)^{-1}$ и теорему Коши в (4.1), легко увидеть, что при $t>0$ и любом целом $i \geqslant 0$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\theta} e^{\lambda t}\frac{(L-\lambda)^{-1}L^{k-i} u_0}{\varphi(\lambda)\lambda^{k-i}}\,d\lambda. \tag{4.2}$$

Поскольку подынтегральное выражение принадлежит $D(L^i)$ и соответствтвующий интеграл нормально сходится, то $u(t) \in D(L^i)$ при любом $t>0$ и любом i. Мы имеем

$$u^{(i)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\theta} e^{\lambda t}\frac{(L-\lambda)^{-1}L^{k-j} u_0}{\varphi(\lambda)\lambda^{k-j-i}}\,d\lambda, \quad i = 0,1,2,..., \ j \leqslant k. \tag{4.3}$$

Легко проверить, используя теорему Коши и резольвентное тождество Гильберта

$$(L-\mu)^{-1}(L-\lambda)^{-1} = \frac{(L-\lambda)^{-1}-(L-\mu)^{-1}}{\lambda-\mu},$$

что функция $u(t)$ есть решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (1.5). Получим оценки, которые и гарантируют утверждение теоремы. Положим $k_0 = [s+\gamma+\delta_0+1/q]$, $\gamma_0 = \{s+\gamma+\delta_0+1/q\}$, $k_1 = [s]$, $\gamma_1 = \{s\}$, $m = k_1-k_0+1$, $\delta_0 \in (-1/q, \infty)$. Считаем вначале, что $\gamma_0, \gamma_1 \in (0,1)$. Возьмем $\upsilon = L^{k_0-i}u^{(i)}$, $\psi = L^{k_0}u_0$. Используя (4.2), (4.3), имеем, что

$$\upsilon(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\theta} e^{\lambda t}\frac{(L-\lambda)^{-1}L^{m}\psi}{\varphi(\lambda)\lambda^{m}}\,d\lambda.$$

Применим $(L-\mu)^{-1}$ $(\mu > 0)$ к $v(t)$ и используем резольвентное тождество Гильберта. Используя теорему Коши, имеем

$$(L-\mu)^{-1}v = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\theta} e^{\lambda t}\frac{(L-\lambda)^{-1}L^{m-1}\psi}{\varphi(\lambda)\lambda^{m-1}(\lambda-\mu)}d\lambda.$$

Теперь применим оператор

$$L(L-\mu)^{-1}v = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\theta} e^{\lambda t}\frac{L(L-\lambda)^{-1}L^{m-1}\psi}{\varphi(\lambda)\lambda^{m-1}(\lambda-\mu)}d\lambda.$$

Оценим полученное выражение

$$\|L(L-\mu)^{-1}v(t)\| \leqslant \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\gamma_i} |e^{\lambda t}|\frac{\|L(L-\lambda)^{-1}L^{m-1}\psi\|}{|\varphi(\lambda)||\lambda^{m-1}||\lambda-\mu|}|d\lambda|. \qquad (4.4)$$

Оценим, например, первое слагаемое в (4.4). Имеем

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1} |e^{\lambda t}|\frac{\|L(L-\lambda)^{-1}L^{m-1}\psi\|}{|\varphi(\lambda)||\lambda^{m-1}||\lambda-\mu|}|d\lambda| \leqslant C_0\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{rcos\theta t}\frac{\|L(L-re^{i\theta})^{-1}L^{m-1}\psi\|}{r^{m-1+\gamma}(r+\mu)}dr.$$

Сделав замену переменных $r=\mu y$, $dr=\mu dy$, получим

$$I_1 \leqslant C_0\int_{\varepsilon/\mu}^{\infty} e^{\mu ycos\theta t}\frac{\|L(L-\mu ye^{i\theta})^{-1}L^{m-1}\psi\|}{|\mu|^{m-1+\gamma}y^{m-1+\gamma}(1+y)}dy.$$

Умножим обе части этого неравенства на t^{δ_0} и возьмем норму в $L_q(0,T)$. Применив неравенство Минковского, получим

$$\|t^{\delta_0}I_1\|_{L_q(0,T)} \leqslant C_0\int_{\varepsilon/\mu}^{\infty}\Big(\int_0^T t^{\delta_0 q}e^{\mu ycos\theta tq}dt\Big)^{1/q}\frac{\|L(L-\mu ye^{i\theta})^{-1}L^{m-1}\psi\|}{|\mu|^{m-1+\gamma}y^{m-1+\gamma}(1+y)}dy.$$

Поскольку $\left(\int_0^\infty t^{\delta_0 q}e^{\mu ycos\theta tq}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} = C_1(y\mu)^{-\delta_0-\frac{1}{q}}$, то

$$\|t^{\delta_0}I_1\|_{L_q(0,T)} \leqslant C_2\int_{\varepsilon/\mu}^{\infty}\frac{\|L(L-\mu ye^{i\theta})^{-1}L^{m-1}\psi\|}{|\mu|^{m-1+\gamma+\delta_0+1/q}|y|^{m-1+\gamma+\delta_0+1/q}(1+y)}dy.$$

Так как степень $m-1+\gamma+\delta_0+1/q<1$, можем записать, что

$$\|t^{\delta_0}I_1\|_{L_q(0,T)} \leqslant C_2\int_0^{\infty}\frac{\|L(L-\mu ye^{i\theta})^{-1}L^{m-1}\psi\|}{|\mu y|^{m-1+\gamma+\delta_0+1/q}(1+y)}dy.$$

Теперь умножим обе части неравенства на $\mu^{\gamma_0-1/q}$ и берем норму в $L_q(0,\infty)$ по переменной μ. Тогда получим

$$\|\mu^{\gamma_0-1/q}\|t^{\delta_0}I_1\|_{L_q(0,T)}\|_{L_q(0,\infty)} \leqslant C_3\int_0^{\infty}\frac{1}{1+y}\times$$

$$\times\Big(\int_0^{\infty}\mu^{\gamma_0 q-1}(\mu y)^{q(1-m-\gamma-\delta_0)-1}\|L(L-\mu ye^{i\theta})^{-1}L^{m-1}\psi\|^q d\mu\Big)^{1/q}dy.$$

После замены переменных $\mu = \frac{\xi}{y}$, $\quad d\mu = \frac{d\xi}{y}$ получим

$$\|\mu^{\gamma_0-1/q}\|t^{\delta_0}I_1\|_{L_q(0,T)}\|_{L_q(0,\infty)} \leqslant$$

$$\leqslant C_3\int_0^\infty \frac{1}{1+y}\Big(\int_0^\infty \frac{\xi^{\gamma_0 q-1+q(1-m-\gamma-\delta_0)}}{y^{\gamma_0 q}}\|L(L-\xi e^{i\theta})^{-1}L^{m-1}\psi\|^q d\xi\Big)^{1/q}dy \leqslant$$

$$\leqslant C_4\Big(\int_0^\infty \xi^{q(\gamma_0-\delta_0-\gamma-m-1/q+1)}\|L(L-\xi e^{i\theta})^{-1}L^{m-1}\psi\|^q\frac{d\xi}{\xi}\Big)^{1/q},$$

где $C_4 = C_3\int_0^\infty \frac{y^{-\gamma_0}}{1+y}dy$. Используя утверждение 2, получим оценку

$$\|\mu^{\gamma_0-1/q}\|t^{\delta_0}I_1\|_{L_q(0,T)}\|_{L_q(0,\infty)} \leqslant C_4\|L^{m-1}\psi\|_{B_q^{\gamma_1}} = C_4\|\varphi\|_{B_q^s}.$$

Аналогично получим оценку для второго слагаемого:

$$\|\mu^{\gamma_0-1/q}\|t^{\delta_0}I_2\|_{L_q(0,T)}\|_{L_q(0,\infty)} \leqslant C_3\|\varphi\|_{B_q^s}.$$

Оценим последнее слагаемое:

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}|e^{\lambda t}|\frac{\|L(L-\lambda)^{-1}L^{m-1}\psi\|}{|\varphi(\lambda)||\lambda^{m-1}||\lambda-\mu|}|d\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant C_0\int_\theta^{2\pi-\theta} e^{\varepsilon cos\varphi t}\frac{\|L(L-\varepsilon e^{i\varphi})^{-1}L^{m-1}\psi\|}{\varepsilon^{m-1+\gamma}(\varepsilon+\mu)}d\varphi.$$

Отсюда получим, что

$$\|t^{\delta_0}I_3\|_{L_q(0,T)} \leqslant C(\varepsilon)\|L^{m-1}\psi\|/(1+\mu).$$

Умножив это неравенство на $\mu^{\gamma_0-1/q}$ и оценив, мы имеем:

$$\|\mu^{\gamma_0-1/q}\|t^{\delta_0}I_3\|_{L_q(0,T)}\|_{L_q(0,\infty)} \leqslant C\|\frac{\mu^{\gamma_0-1/q}}{1+\mu}\|_{L_q(0,\infty)}\|L^{m-1}\psi\| =$$

$$= C\|\frac{\mu^{\gamma_0-1/q}}{1+\mu}\|_{L_q(0,\infty)}\|L^{m-1+k_0}\varphi\| = C_1\|L^{k_1}\varphi\| \leqslant C_2\|\varphi\|_{B_q^s},$$

$$\|\mu^{\gamma_0-1/q}\|L(L-\mu)^{-1}v(t)\|_q\|_{L_q(0,\infty)} \leqslant C\|\varphi\|_{B_q^s}.$$

Используя утверждение 2, получим

$$\|t^{\delta_0}v(t)\|_{L_q(0,T;B_q^{\gamma_0})} = \|\mu^{\gamma_0-\frac{1}{q}}\|t^{\delta_0}L(L-\mu)^{-1}v(t)\|_q\|_{L_q(0,\infty)} \leqslant C\|\varphi\|_{B_q^s}.$$

Так как по условию $v(t) = L^{k_0-i}u^{(i)}(t)$, то мы имеем

$$\|t^{\delta_0}u^{(i)}(t)\|_{L_q(0,\infty;B_q^{s+\gamma+\delta_0+1/q-i})} \leqslant C\|\varphi\|_{B_q^s}, \tag{4.5}$$

где C не зависит от φ. Оценки вида (4.4), (4.5) справедливы для любого i при $\delta_0 > -\frac{1}{q}$ и позволяют сказать, что оператор $u_0 \to u(t)$ допускает замыкание.

Единственность решения задачи (1.1), (1.5) доказывается точно так же, как и в [18, теорема 3.1].

Пусть теперь s произвольное число (возможно, что $s = [s]$). Существуют числа $s_1 < s < s_2$ такие, что $[s_1] \neq s_1$, $[s_2] \neq s_2$, а также $[s_i+\gamma+\delta_0+\frac{1}{q}] \neq$

$\neq s_i+\gamma+\delta_0+\frac{1}{q}$, где $i=1,2$. Рассмотрим линейный оператор $S: u_0 \to u^{(j)}t^{\delta_0}$. Пусть $X_i = L_q(0,T;B_q^{s_i+\gamma+\delta_0+\frac{1}{q}-j})$. По доказанному $S \in L(B_q^{s_i}, X_i)$, где $i = 1,2$ и, в частности, $S \in L(B_q^{s_1}+B_q^{s_2}, X_1+X_2)$. По интерполяционному свойству: $S \in L(B_q^{s_2(1-\theta)+s_1\theta}, (X_2,X_1)_{\theta,q})$, $\quad s_2(1-\theta)+s_1\theta = s$ (см. [5, п. 1.1.1, теорема 1.3.3]). Известно, что $(X_1,X_2)_{\theta,q} = L_q(0,T;B_q^{s+\gamma+\delta_0+\frac{1}{q}-j})$ (см. [5, теорема 1, § 1.1.2]). Таким образом, $S|_{B_q^s} \in L(B_q^s; L_q(0,T;B_q^{s+\gamma+\delta_0+\frac{1}{q}-j}))$. Оценки функции $u^{(i)}t^{\delta_i}$ в $C([0,T];B_q^s)$ проводятся аналогично.

Следствие 1. Отображение $u_0 = u(0) \to \varphi = \int_0^T u(\tau)d\sigma(\tau)$, где u — решение уравнения (1.1) с $f=0$ как отображение из $B_q^{s+1-1/q}$ в $B_q^{s+1-1/q}$, $s \in R$, непрерывно и взаимнооднозначно. Обратное отображение $\varphi = \int_0^T u(\tau)d\sigma(\tau) \to u_0 = u(0)$ непрерывно как отображение из $B_q^{s+1-\gamma-1/q}$ в $B_q^{s+1-1/q}$.

Доказательство. Пусть $u_0 = u(0) \in B_q^{s+1-1/q}$. Тогда по теореме 1 $u \in L_q(0,T;B_q^{s+1})$, $\; u_t \in L_q(0,T;B_q^s)$ и следовательно, $u \in C([0,T];B_q^{s+1-1/q})$ (это следствие из [5, теорема 1.8.3]. Тогда интеграл $\int_0^T u(\tau)d\sigma(\tau)$ нормально сходится в $B_q^{s+1-1/q}$, и имеем оценку

$$\|\int_0^T u(\tau)d\sigma(\tau)\|_{B_q^{s+1-1/q}} \leqslant \|u\|_{C([0,T];B_q^{s+1-1/q})} \vee_0^T \sigma(\tau).$$

Обратное утверждение вытекает из теоремы 3 и работы [5, теорема 1.8.3].

Теорема 4. Пусть выполнены условия (A), (B), $u_0 \in B_q^{s+1-\gamma-1/q}$ и $f \in L_q(0,T;B_q^{s-\gamma})$, где параметр γ определен в лемме 1. Тогда существует единственное решение задачи (1.1), (1.5) такое, что $u \in L_q(0,T;B_q^{s+1})$, $\; u_t \in L_q(0,T;B_q^s)$, и справедлива оценка

$$\|u_t\|_{L_q(0,T;B_q^s)} + \|u\|_{L_q(0,T;B_q^{s+1})} \leqslant C\|f\|_{L_q(0,T;B_q^{s-\gamma})}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Имеем задачу

$$u_t - Lu = f, \quad \int_0^T u(\tau)d\sigma(\tau) = u_0.$$

Решение этой задачи имеет вид $u = u_1 + u_2$, где u_1, u_2 есть решения задач:

$$u_{1t} - Lu_1 = f, \quad u_1|_{t=0} = 0, \tag{4.8}$$

$$u_{2t} - Lu_2 = 0, \; \int_0^T u_2 d\sigma(\tau) = u_0 - \int_0^T u_1 d\sigma(\tau). \tag{4.9}$$

Из теорем 1, 3 получим, что функции u_1, u_2 принадлежат нужному классу, и имеет место теорема единственности.

Теорема 5. Пусть E — ζ-выпуклое пространство и выполнены условия (B), (C). Тогда для $f \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;E), u_0 \in B_q^{\mu-1/q}$ $(\mu \in (1/q,1])$ существует единственное решение задачи (1.1), (1.5) такое, что при $\gamma < 0$ $u_t \in$

$\in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;B_q^\gamma)$, $u \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;B_q^{\gamma+1})$ и при $\gamma = 0$ $u_t \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;E)$, $u \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;D(L))$. Решение представимо в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_{1t}, Lu_1 \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;E)$, $u_{2t}, Lu_2 \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;B_q^\gamma)$, причем функция u_2 бесконечно дифференцируема при $t > 0$ и $u_2^{(i)} t^{\delta_0} \in L_q(0,T;B_q^{\mu+\gamma-i+\delta_0})$ ($\delta_0 > -1/q$, $i = 0,1,2,...$). Если $\gamma + \mu \in (1/q,1]$, то $u_{2t}, Lu_2 \in L_{q,t^{1-(\mu+\gamma)}}(0,T;E)$.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$u_t - Lu = f, \ \int_0^T u(\tau)\, d\sigma(\tau) = u_0.$$

Ищем решение нашей задачи в виде $u = u_1 + u_2$, где u_1 — решение задачи

$$u_{1t} - Lu_1 = f, \quad u_1|_{t=0} = 0. \tag{4.10}$$

Пусть $f \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;E)$. Тогда, в силу теоремы 2, существует единственное решение задачи (4.10) такое, что u_{1t}, $Lu_1 \in L_{p,t^{1-\mu}}(0,T;E)$, и, следовательно, возможны изменения на множестве меры нуль, $u_1 \in C([0,T];B_q^{\mu-1/q})$ (см. [20, предл. 3.1] и [5, теорема 1.8.3]). Отсюда вытекает, что $\int_0^T u_1\, d\sigma(t) \in B_q^{\mu-1/q}$. Функция $u_2 = u - u_1$ есть решение задачи:

$$u_{2t} - Lu_2 = 0, \int_0^T u_2(\tau)\, d\sigma(\tau) = u_0 - \int_0^T u_1(\tau)\, d\sigma(\tau) = \widetilde{u}_0. \tag{4.11}$$

Из этого равенства и условий теоремы получим, что $\widetilde{u}_0 \in B_q^{\mu-1/q}$. Используя теорему 3, получим, что существует решение u_2 задачи (4.11) из класса

$$u_{2t}, \ Lu_2 \in L_q(0,T;B_q^{\mu+\gamma-1}).$$

Функция u_2 бесконечно дифференцируема при $t > 0$ и

$$u_{2t}, \ Lu_2 \in L_{q,t^{\delta_0}}(0,T;B_q^{\mu+\gamma-1+\delta_0}), \ \delta_0 > -1/q, \ i = 0,1,2,... \tag{4.12}$$

В частности, при $\delta_0 = 1 - \mu$ получим, что u_{2t}, $Lu_2 \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;B_q^\gamma)$.

Если $\gamma < 0$, то в силу вложения $E \subset B^\gamma$ имеем, что u_t, $Lu \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;B_q^\gamma)$. Пусть $\gamma + \mu \in (1/q,1]$. Рассмотрим задачу

$$u_t - Lu = 0, \ u|_{t=0} = u_2(0). \tag{4.13}$$

Как вытекает из работы [5, теорема 1.8.3], $u_2(0) \in B_q^{\gamma+\mu-1/q}$. По теореме 2 существует единственное решение $\widetilde{u}_2$ этой задачи такое, что $\widetilde{u}_{2t}, L\widetilde{u}_2 \in L_{q,t^{1-(\mu+\gamma)}}(0,T;E)$. В силу (4.9) при $\delta_0 = 1 - \mu - \gamma$ u_{2t}, $Lu_2 \in L_{q,t^{1-(\mu+\gamma)}}(0,T;B_q^0)$. В частности, имеем, что u_{2t}, $\widetilde{u}_{2t}$, Lu_2, $L\widetilde{u}_2 \in L_{q,t^{1-(\mu+\gamma)}}(0,T;B_q^{-\varepsilon})$ для всех $\varepsilon > 0$. Покажем, что $u_2 = \widetilde{u}_2$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим оператор L как неограниченный оператор из $B_q^{-\varepsilon}$ в $B_q^{-\varepsilon}$ с областью определения $B_q^{1+\varepsilon}$. Оператор L обладает тем свойством, что $S_\theta \in \rho(L)$. Покажем, что выполнено условие (C). Мы сделаем это для произвольного пространства B_q^s. Имеем, что для всех $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N \in S_\theta$

$$\| \sum_{i=1}^N r_i(t) T_i x_i \|_{L_q(0,1;E)} \leqslant c_q \| \sum_{i=1}^N r_i(t) x_i \|_{L_q(0,1;E)}, \tag{4.14}$$

где $T_i = \lambda_i(L-\lambda_i)^{-1}$, $x_i \in E$ $(i=1,2,...,N)$. Постоянная c_q не зависит от чисел λ_i, N и элементов x_i.

Покажем, что (4.14) справедливо, если мы заменим пространство $L_q(0,1;E)$ пространством $L_q(0,1;B_q^s)$ (а нам необходимо рассмотреть случай $s=-\varepsilon$). Тем самым мы покажем, что условие (C) выполнено для оператора $L: B_q^{-\varepsilon} \to B_q^{-\varepsilon}$. Воспользуемся утверждением 2. Имеем ($l > s - k$, $k < s$)

$$\|\sum_{i=1}^N r_i(t)T_ix_i\|^q_{L_q(0,1;B_q^s)} = \int\limits_0^1\int\limits_0^\infty \mu^{(s-k-\frac{1}{q})q}\|(L(L+\mu e^{i\varphi})^{-1})^lL^k(\sum_{i=1}^N r_iT_ix_i)\|_E^q d\mu dt =$$

$$= \int_0^\infty \mu^{(s-k-1/q)q}\int_0^1 \|\sum_{i=1}^N r_i(t)T_iy_i)\|_E^q dt\frac{d\mu}{\mu},$$

где $y_i = (L(L+\mu e^{i\varphi})^{-1})^lL^kx_i$, из условия (C) вытекает, что последний интеграл оценивается через

$$c_q^q\int_0^\infty \mu^{(s-k)q}\int_0^1 \|\sum_{i=1}^N r_i(t)y_i)\|_E^q dt\frac{d\mu}{\mu} = c_q^q\|\sum_{i=1}^N r_i(t)x_i)\|_{L_q(0,1;B_q^s)}.$$

Здесь мы дважды воспользовались теоремой Фубини. Таким образом,

$$\|\sum_{i=1}^N r_i(t)T_ix_i\|_{L_q(0,1;B_q^s)} \leqslant c_q\|\sum_{i=1}^N r_i(t)x_i\|_{L_q(0,1;B_q^s)},$$

а значит, условие (C) выполнено. Применяя теорему 2, где $E = B_q^{-\varepsilon}$, получим $u_2 = \widetilde{u}_2$. Таким образом, при $\gamma+\mu \in (1/q,1]$ $u_{2t}, Lu_2 \in L_{q,t^{1-(\mu+\gamma)}}(0,T;E)$. В частности, при $\gamma = 0$ имеем, что $u_{2t}, Lu_2 \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;E)$. Покажем единственность решения. При $\gamma = 0$ единственность вытекает из теоремы 2. Если $\gamma < 0$, то берем в качестве пространства E пространство B_q^γ. Условия теоремы 2 будут выполнены, как это следует из вышеприведенных рассуждений. Тогда единственность вытекает из теоремы 2.

5. Некоторые приложения

Пусть E — некоторое ζ-выпуклое банахово пространство. Рассмотрим эллиптический дифференциальный оператор

$$A(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x)D^\alpha,$$

где $D = -i(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, ..., \partial_{x_n})$, а область определения состоит из функций

$$D(A) = \{u \in W_q^{2m}(G;E): \ B_ju = \sum_{|\beta|\leqslant m_j} b_{j\beta}(x)D^\beta u|_\Gamma = 0, \ j=1,2,...,m\},$$

$\Gamma = \partial G$. Пространства Бесова $B^s_{q,p}(G;E)$ определяются обычным образом (см. например [7, 13, 14, 16, 19, 22]). По определению мы имеем, что $B^s_{q,q}(G;E) = W_q^s(G;E)$ при $s \neq [s]$.

Считаем, что коэффициенты $a_\alpha, b_{j\beta}$ и граница Γ обладают свойствами:

$$\begin{gathered} a_\alpha \in C(\overline{G}; L(E)),\ \ |\alpha| = 2m,\ \ b_{j\beta} \in C^{2m-m_j}(\Gamma; L(E)),\ \ (m_j < 2m), \\ \Gamma \in C^{2m}, a_\alpha(x) \in L_\infty(G; L(E)) + L_{r_k}(G; L(E)) \\ (r_k \geqslant q,\ \ 2m - k > \tfrac{n}{r_k}),\ \ |\alpha| < 2m. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Мы используем стандартное условие эллиптичности с параметром [12]: рассмотрим отображение $A_0(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \in B(E) \quad (x \in \overline{G})$ и предположим, что

$$\begin{gathered} \exists \phi_A \in (0, \tfrac{\pi}{2}) : \sigma(A_0(x,\xi)) \subset S_{\phi_A} = \{z \in C : |\arg z| < \phi_A\}, \\ C \backslash S_{\phi_A} \subset \rho(A_0(x,\xi)),\ \ \forall \xi \in R^n,\ \ x \in \overline{G}. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Положим $B_{j0} = \sum\limits_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}(x) D^\beta,\ x_0 \in \Gamma.$

Система координат y, полученная из исходной при помощи ортогонального преобразования и переноса начала координат, такая, что ось y_n направлена по нормали к Γ в точке x_0, и оси y_i при $i < n$ лежат в касательной плоскости к Γ в точке x_0 называется *локальной системой координат.*

Условие дополнительности имеет вид: для любой точки $x_0 \in \Gamma$ в локальной системе координат y, отвечающей произвольной точке $x_0 \in \Gamma$, краевая задача

$$(\lambda + A_0(x_0, \xi', D_n))v(y_n) = 0, B_{j0}(x_0, \xi', D_n))v(0) = h_j, \quad (j = 1, 2, ..., m) \tag{5.3}$$

имеет единственное убывающее на бесконечности решение из $C(\overline{R^+}; E)$ для всех $\xi' \in R^{n-1}$, $h_j \in R$ и $\lambda \in S_{\pi-\phi_A}$ таких, что $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$. Операторы A_0, B_{j0} в (5.3) записаны в локальной системе координат y.

Опишем пространство B^s_q. Пусть выполнены условия (5.1)–(5.3) и $s \in (0,1)$. Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{C}$ и коэффициенты операторов B_j и граница ∂G достаточно гладкие, то (см. [5, § 4.3.3.]) $B^s_q = \{u \in B^{2ms}_{q,q}(G):\ B_j u|_\Gamma = 0,\ \ m_j < 2ms - \frac{1}{q},\ \ \int\limits_G \frac{|B_j u|^q}{\rho(x)}\, dx < \infty,\ m_j = 2ms - \frac{1}{q}\}$, где $\rho(x) = dist(x, \partial G)$ (считаем в случае $m_j = 2ms - \frac{1}{q}$, что коэффициенты оператора B_j допускают продолжение внутри области G с сохранением класса). В нашем наиболее общем случае вопрос об описании пространств B^s_q не исследован, однако, как вытекает из результатов работы [16, 17], справедливы соотношения:

$$\overset{\circ}{B}{}^{2ms}_{q,q}(G; E) \subset B^s_q \subset B^{2ms}_{q,q}(G; E), \tag{5.4}$$

$$B^{2ms}_{q,q}(G; E) = B^s_q = \overset{\circ}{B}{}^{2ms}_{q,q} \quad \text{при } 0 < 2ms < 1/q, \tag{5.5}$$

где $\overset{\circ}{B}{}^{s}_{q,q}(G; E) = \overline{C_0^\infty(G; E)}$ (замыкание берется в норме соответствующего пространства).

Рассмотрим краевую задачу для параболического уравнения

$$\begin{gathered} u_t - Lu = f,\ \ L = -A(x, D),\ \ (x,t) \in Q = G \times (0,T), \\ B_j u|_{\Gamma \times (0,T)} = 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \end{gathered} \tag{5.6}$$

с нелокальным условием

$$\int_0^T u(\tau)d\sigma(\tau) = u_0. \tag{5.7}$$

Дополнительно мы предположим, что справедливо условие

$$\text{для некоторого } \theta \text{ такого, что } \theta \in (\pi/2, \pi), \;\; S_\theta \subset \rho(L). \tag{5.8}$$

Как показано в работе [12], при выполнении условий (5.1)–(5.3), (5.8) оператор L удовлетворяет условию (С).

Теорема 6. Пусть выполнены условия (5.1)–(5.3), (5.8) и условие (B). Тогда для любой $f \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;L_q(G;E))$, $u_0 \in B_q^{\mu-1/q}(G;E)$, $\mu \in (1/q,1]$ существует единственное решение задачи (5.6), (5.7) такое, что

$$\text{при } \gamma = 0 \;\; u_t \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;L_q(G,E)), \;\; u \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;W_q^{2m}(G,E)),$$

$$\text{при } \gamma < 0 \;\; u_t, Lu \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;B_q^\gamma).$$

Решение обладает следующими свойствами:

$$u_t \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;L_q(G,E)) + L_{q,t^{\delta_0}}(0,T;L_q(G,E)),$$

$$u \in L_{q,t^{1-\mu}}(0,T;W_q^{2m}(G,E)) + L_{q,t^{\delta_0}}(0,T;W_q^{2m}(G,E)),$$

где $\delta_0 > 1-(\mu+\gamma)$ и $\delta_0 \geqslant (1-\mu-\gamma)$, если $\gamma+\mu \in (1/q,1]$.

Утверждение теоремы вытекает из теоремы 5.

Литература

[1] Власий О.Д., Пташник Б.Й. Нелокальная краевая задача для линейных уравнений с частными производными не разрешенных относительно старшей производной по времени // Украинский математический журнал. 2007. Т. 59. № 3. С. 370–381.

[2] Керефов А.А. Нелокальные граничные задачи для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 5. № 1. С. 74–78.

[3] Кожанов А.И. Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. мат. 2004. Т. 7. № 1 (17). С. 51–60.

[4] Либерман Г.М. Нелокальные задачи для квазилинейных параболических уравнений // Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. Международная математическая серия. 2002. Т. 1. С. 233–254.

[5] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.

[6] Шелухин В.В. Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах линейных эволюционных уравнений // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34. № 2. С. 191–207.

[7] Agarwal R.P., Bohner M., Shakhmurov V.B. Maximal regular boundary value problems in Banach-valued weighted space // Boundary value problems. 2005. V. 9. № 1. P. 9–42.

[8] Agarwal R.P., Bohner M., Shakhmurov V.B. Linear and nonlinear nonlocal boundary value problems for differential-operator equations // Appl. Anal. 2006. V. 85. № 6–7. P. 701–716.

[9] Byszewski L. Theorems about the existence of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem // J. Math. Appl. Anal. 1991. V. 162. № 2. P. 494–505.

[10] Chabrowski J. On nonlocal problems for parabolic equations // Nagoya Math. J. 1984. V. 93. P. 109–131.

[11] Prato G. da, Grisvard P. Sommes d'operateurs lineaires et equations differentielles operationnelles // J. Math. pures et appl. 1975. V. 54. P. 305–387.

[12] Denk R., Hieber M., Prüss J. R-boundedness, Fourier multipliers, and problems of elliptic and parabolic type // Memoirs of the AMS. 2003. V. 166. № 788. 114 p.

[13] Denk R., Krainer T. R-boundedness, pseudodifferential operators, and maximal regularity for some classes of partial differential operators // Manuscripta Math. 2007. V. 124. № 3. P. 319–342.

[14] Denk R., Hieber M., Prüss J. Optimal Lp-Lq-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Math. Z. 2007. V. 257. № 1. P. 93–224.

[15] Gil M.I. Nonlocal initial problem for nonlinear nonautonomous differential equations in a Banach space // Ann. Differ. Equations. 2004. V. 20. № 2. P. 145–154.

[16] Grisvard P. Commutative de deux foncteurs d'interpolation et applications // J. Math. pures et appliq. 1966. V. 45. № 2. P. 143–206.

[17] Grisvard P. Equations differentielles abstraites // Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 1969. S. 4. V. 2 (3). P. 311–395.

[18] Grisvard P. Equations operationnelles abstraites dans les espaces de Banach et problemes aux limites dans des ouverts cylindriques // Annali S.N.S. Pisa. 1967. V. 21. P. 307–347.

[19] Kunstman P.C., Weis L. Maximal L_p-regularity for Parabolic Equations, Fourier Multiplier Theorems and H^∞-functional Calculus // Lect. Notes in Math. 2004. V. 1855. P. 65–311.

[20] Prüss J., Simonett G. Maximal regularity for evolution equations in weighted L_p-spaces // Arch. Math. 2004. V. 82. P. 415–431.

[21] Pyatkov S.G. Operator theory. Nonclassical problems. VSP: Utrecht; Boston; Köln; Tokyo. 2002. 348 p.

[22] Shakhmurov V.B. Maximal regular boundary value problems in Banach-valued function spaces and applications // Int. J. of Math. Sci. 2006. № 6. P. 26.

[23] Гольдман Н.А. Свойства решений параболических уравнений с неизвестной правой частью и сопряженные задачи // Докл. РАН. 2008. Т. 420. № 2. С. 151–156.

[24] Fedorov V.E., Urazaeva A.V. An inverse prolem for linear Sobolev type equations // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. V. 12. № 4. P. 387–395.

Поступила в редакцию 18/X/2009;
в окончательном варианте — 18/X/2009.

ON SOME NONLOCAL PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

 M.V. Uvarova[3]

We study the question of solvability of the nonlocal boundary value problems for operator-differential equations of the first order with operators, which are generators of analytical semigroups. We establish existence and uniqueness of theorems for these boundary value problems under certain conditions on the data of the problem. The Sobolev-Besov spaces are employed. The results obtained are applied to the study of nonlocal boundary value problems for parabolic equations and systems.

Key words: operator-differential equation, nonlocal boundary value problem, vector-valued Sobolev-Besov space, parabolic equation.

Paper received 18/X/2009.
Paper accepted 18/X/2009.

[3]Uvarova Matrena Vladimirovna (m_uvarova@ugrasu.ru), Dept. of Higher Mathematics, Ugra State University, Khanty-Mansiisk, 628012, Russia.