УДК 517.928.1

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ

© 2009 О.П. Филатов[1]

Рассматривается задача о восстановлении параметра из правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений или дифференциального включения по результатам наблюдений за решением задачи Коши в некоторые моменты времени. Параметр принадлежит компактному метрическому пространству. Наблюдения производятся с погрешностью. Не предполагается единственность искомого параметра. Построено конечное множество, которое в метрике Хаусдорфа аппроксимирует множество неизвестных параметров. Точность аппроксимации стремится к нулю вместе с ошибками наблюдений и вычислений.

Ключевые слова: дифференциальная система, дифференциальное включение, компактное метрическое пространство, определение параметра, ошибки наблюдения, ошибки вычислений.

1. Постановка задачи

В качестве первого примера рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,a), \quad x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

для системы дифференциальных уравнений на отрезке $[0,T], T > 0$. Здесь вектор x принадлежит множеству X конечномерного нормированного пространства $\mathbb{R}^m$ с нормой $\|\cdot\|$, a — постоянный параметр из метрического компактного пространства A с метрикой $\rho(\cdot,\cdot)$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^m$, определенное на множестве $D = [0,T] \times X \times A$, считается известным и удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t,x,a) - f(t,y,b)\| \leqslant \lambda(t)(\|x-y\| + \rho(a,b)) \quad \forall\,(t,x,a),\,(t,y,b) \in D \tag{1.2}$$

по переменным x и a, где $\lambda \in L_1([0,T],R)$. Решением задачи (1.1) называется абсолютно непрерывная функция, определенная на отрезке $[0,T]$ и почти всюду удовлетворяющая дифференциальному уравнению. Далее предполагается, что любое решение задачи Коши (1.1) $\varphi(t,x_0^*,a)$ определено на

[1]Филатов Олег Павлович (filtatov_oleg@samaradom.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

отрезке $[0, T]$ для произвольного начального вектора $x_0^*, \|x_0^* - x_0\| \leqslant \delta_0$ и любого параметра $a \in A$ и принадлежит множеству X где $\delta_0 > 0$.

В моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ вместо точных значений решения задачи Коши $x_j(a_0) = \varphi(t_j, x_0, a_0)$, отвечающих некоторому неизвестному параметру $a_0 \in A$, наблюдаются приближенные значения x_j^* с погрешностью $0 < \delta \leqslant \delta_0$. Таким образом,

$$\|x_j(a_0) - x_j^*\| \leqslant \delta, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \quad N \geqslant 1. \tag{1.3}$$

В общем случае нет оснований предполагать, что даже по известным векторам $x_j(a_0), j = 0, 1, \ldots, N$ параметр a_0 определяется однозначно. Поэтому введем множество

$$A_0 = \{a \in A : \varphi(t_j, x_0, a) = x_j(a_0),\, j = 0, 1, \ldots, N\}. \tag{1.4}$$

По условию $a_0 \in A_0$, поэтому $A_0 \neq \emptyset$. Под обратной задачей будем понимать построение семейства множеств $A_\delta \subset A$, $\delta > 0$, для которого

$$\lim_{\delta \to 0} h_A(A_\delta, A_0) = 0, \tag{1.5}$$

где ошибка наблюдений δ из (1.3). Расстояние по Хаусдорфу $h_A(M, K)$ между множествами $M, K \subset A$ определяется формулой

$$h_A(M, K) = \max\{ex(M, K), ex(K, M)\},$$

где $ex(M, K) = \inf\{r > 0 : M \subset [K]^r\}, [K]^r = \{a \in A : \rho(a, K) < r\}$. Здесь расстояние от точки a до множества K в метрическом пространстве A обозначается $\rho(a, K)$.

Если параметр a_0 является единственным, то любой элемент из множества A_δ дает сколь угодно точное приближение к неизвестному параметру a_0 при достаточно малой погрешности δ в задаче (1), (3)–(5), которая относится к классу некорректных задач [1].

Подобные задачи встречаются в математической экономике, и они обычно решаются в предположении, что расстояние между соседними точками t_j и $t_{j+1}, j = 0, 1, \ldots, N$ достаточно мало [2], если ошибка наблюдений невелика. Заметим, если параметр a зависит от $t \in [0, T]$ и играет роль управления, то для таких задач применим метод динамической регуляризации [3] в классе измеримых ограниченных векторных управлений при условии $\max_{1 \leqslant j \leqslant N}\{t_j - t_{j-1}\} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Мы не делаем последнего предположения, но существенно используем компактность метрического пространства A. Отметим, что впервые в связи с исследованием устойчивости обратных задач компактность класса возможных решений уравнения в метрических пространствах эффективно использовалось в [4].

В качестве второго примера рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x, a), \quad x(0) = x_0 \tag{1.6}$$

для дифференциального включения на отрезке $[0, T], T > 0$. Здесь $x \in X$, постоянный параметр $a \in A$. Отображение

$$F : D = [0, T] \times X \times A \to Kv(\mathbb{R}^m)$$

считается известным и удовлетворяет условию Липшица

$$h_X(F(t, x, a), F(t, y, b)) \leqslant \lambda(t)(\|x - y\| + \rho(a, b)), \tag{1.7}$$

где $\lambda \in L_1([0, T], R)$. Здесь $Kv(\mathbb{R}^m)$ — совокупность всех непустых компактных и выпуклых множеств пространства $\mathbb{R}^m, h_X(F_1, F_2)$— расстояние по Хаусдорфу между множествами F_1, F_2 из $\mathbb{R}^m$. Требования к множеству X те же, что и для предыдущей задачи.

В моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ вместо точных множеств достижимости задачи Коши

$$R_j(a_0) = R(t_j, x_0, a_0),$$

отвечающих некоторому неизвестному параметру $a_0 \in A$, наблюдаются приближенные значения R_j^* с погрешностью $\delta > 0$

$$h_X(R_j(a_0), R_j^*) \leqslant \delta, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \quad N \geqslant 1. \tag{1.8}$$

Введем множество

$$A_0 = \{a \in A : R(t_j, x_0, a) = R_j(a_0),\ j = 0, 1, \ldots, N\}. \tag{1.9}$$

По условию $a_0 \in A_0$, поэтому $A_0 \neq \emptyset$. Под обратной задачей будем понимать построение семейства множеств $A_\delta \subset A$, $\delta > 0$, для которого

$$\lim_{\delta \to 0} h_A(A_\delta, A_0) = 0, \tag{1.10}$$

где ошибка наблюдений δ из (1.8).

Решение задач (1.1),(1.3)–(1.5) и (1.6),(1.8)–(1.10) основано на следующей теореме.

2. Теорема о прообразе

Рассмотрим непрерывный оператор $F : A \to Z$, где Z— метрическое пространство с метрикой $\rho_Z(\cdot, \cdot)$. Так как метрическое пространство A компактное, то существует неубывающая функция $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $\psi(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$ такая, что

$$\rho_Z(Fa, Fb) \leqslant N\psi(\rho(a, b)) \quad \forall\, a, b \in A, \tag{2.1}$$

где для удобства введен целый положительный множитель N. Например, если $\psi(\rho) = \lambda_0 \rho$, то оператор F удовлетворяет условию Липшица с постоянной $N\lambda_0 > 0$. Пусть $z_0 \in FA$, тогда уравнение $Fa = z_0$ имеет хотя бы одно решение. Введем прообраз $A_0 = F^{-1} z_0$ элемента z_0 и предположим, что вместо элемента z_0 известно его приближение z_0^* с точностью $N\delta > 0$:

$$\rho_Z(z_0^*, z_0) \leqslant N\delta, \tag{2.2}$$

где $\delta > 0$. Результат действия оператора F на любой элемент $a \in A$ также известен с некоторой точностью $N\beta(\delta)$:

$$\rho_Z((Fa)^*, Fa) \leqslant N\beta(\delta), \tag{2.3}$$

где $\beta : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $\beta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.
Введем функции

$$Q(a) = \rho_Z(z_0^*, (Fa)^*), \quad Q_0(a) = \rho_Z(z_0, Fa).$$

Представим $Q(a)$ в виде

$$Q(a) = Q_0(a) + \Delta(a). \tag{2.4}$$

Из условий (2.2), (2.3) и неравенства треугольника следуют оценки

$$|\Delta(a)| \leqslant |\rho_Z(z_0^*, (Fa)^*) - \rho_Z(z_0, (Fa)^*)| + |\rho_Z(z_0, (Fa)^*) - \rho_Z(z_0, Fa)| \leqslant$$
$$\leqslant \rho_Z(z_0^*, z_0) + \rho_Z((Fa)^*, Fa) \leqslant N\delta + N\beta(\delta).$$

Таким образом,

$$|\Delta(a)| \leqslant N\delta + N\beta(\delta). \tag{2.5}$$

Пусть функция $\varkappa : (0, \infty) \to (0, \infty)$ является бесконечно малой при $\delta \to 0$. Так как метрическое пространство A компактное, то для любого $\varkappa = \varkappa(\delta)$ существует конечное множество $S_\varkappa \subset A$ такое, что

$$A = \bigcup_{a \in S_\varkappa} B(a, \varkappa), \tag{2.6}$$

где $B(a, \varkappa) = \{b \in A : \rho(b, a) < \varkappa\}$. Оценим сверху функцию $Q(a)$ на множестве $S_\varkappa \cap [A_0]^\varkappa$. Пусть параметр $a \in S_\varkappa \cap [A_0]^\varkappa$. Тогда для некоторого $a_0 \in A_0$ выполняется неравенство $\rho(a, a_0) \leqslant \varkappa$. В силу (2.1) имеет место оценка

$$Q_0(a) = \rho_Z(Fa, z_0) = \rho_Z(Fa, Fa_0) \leqslant N\psi(\varkappa(\delta)). \tag{2.7}$$

Из (2.5) и (2.7) получим оценку

$$Q(a) \leqslant \gamma(\delta), \quad \gamma(\delta) = N(\delta + \beta(\delta) + \psi(\varkappa(\delta))) \quad \forall\, a \in S_\varkappa \cap [A_0]^\varkappa. \tag{2.8}$$

С помощью функций γ и Q введем конечное множество

$$A_\delta = \{a \in S_{\varkappa(\delta)} : Q(a) \leqslant \gamma(\delta)\}. \tag{2.9}$$

Теорема 1. Пусть непрерывный оператор $F : A \to Z$ определен на компактном метрическом пространстве A, элемент $z_0 \in FA$, выполняются оценки (2.1)–(2.3), и функции $\beta(\delta), \varkappa(\delta)$ стремятся к 0 при $\delta \to 0$. Тогда для прообраза A_0 элемента z_0 имеет место соотношение (1.5) и включение $A_0 \subset [A_\delta]^{\varkappa(\delta)}$.

Доказательство теоремы. Пусть $a_0 \in A_0$. Согласно (2.6), для некоторого элемента $a \in S_\varkappa$ выполняется неравенство $\rho(a, a_0) < \varkappa$, поэтому $a \in S_\varkappa \cap [A_0]^\varkappa$. Из (2.8), (2.9) следует $Q(a) \leqslant \gamma(\delta)$, $a \in A_\delta$. Следовательно, $A_0 \subset [A_\delta]^\varkappa$. Далее, зафиксируем число $r > 0$. Тогда замкнутое множество

$$K_r = \{a \in A : \rho(a, A_0) \geqslant r\}$$

является компактным, так как пространство A компактное. Рассмотрим два возможных случая. В первом из них множество $K_r = \emptyset \, \forall r > 0$. Тогда $A_0 = A$. Следовательно, $A_\delta = S_{\varkappa(\delta)}$, и предельное соотношение (1.5) выполняется. Во втором случае существует $r_0 > 0$ такое, что для любого $r \in (0, r_0]$ множество $K_r \neq \emptyset$. Тогда непрерывная положительная функция $Q_0(a)$ принимает на множестве K_r минимальное значение $q_r > 0$. В частности,

$$Q_0(a) \geqslant q_r \quad \forall\, a \in S_\varkappa \cap K_r.$$

Согласно (2.5), существует число $\delta_1 > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$|\Delta(a)| \leqslant q_r/2 \quad \forall\, a \in S_\varkappa \quad \forall\, \delta \in (0, \delta_1].$$

Отсюда и из (2.4) получим

$$Q(a) \geqslant q_r/2 \quad \forall\, a \in S_\varkappa \cap K_r. \tag{2.10}$$

Так как $\gamma(\delta)$ из (2.8) является бесконечно малой при $\delta \to 0$, то существует $\delta_2 > 0$ такое, что $\gamma(\delta) < q_r/2 \; \forall\, \delta \in (0, \delta_2]$. Следовательно, если $a \in A_\delta$, то

$$Q(a) < q_r/2 \quad \forall\, \delta \in (0, \delta_*], \tag{2.11}$$

где $\delta_* = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Таким образом, параметр a, согласно (2.10), (2.11), принадлежит r-окрестности множества A_0. Значит $A_\delta \subset [A_0]^r$. Так как одновременно $A_0 \subset [A_\delta]^\varkappa$, то $h_A(A_\delta, A_0) \leqslant \max\{r, \varkappa(\delta)\}$. В силу произвольности $r > 0$ и условия $\varkappa(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ получим предельное соотношение (1.5). Теорема доказана.

3. Идентификация дифференциальной системы

Для решения задачи (1.1), (1.3)–(1.5) введем метрическое пространство $Z = \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m$ из N множителей с метрикой

$$\rho_Z(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{N} \|z_j - \zeta_j\|, \quad z = (z_1, \ldots, z_N), \quad \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N).$$

Здесь векторы $z_j, \zeta_j \in \mathbb{R}^m, j = 1, 2, \ldots, N$. Оператор $F : A \to Z$ параметру $a \in A$ ставит в соответствие вектор $z = (x_1(a), x_2(a), \ldots, x_N(a))$, где

$$x_j(a) = \varphi(t_j, x_0, a), \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Обозначим

$$z_0 = (x_1(a_0), \ldots, x_N(a_0)), \quad z_0^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*).$$

Тогда из (1.3) следует неравенство (2.2).

Сравним теперь два решения задачи (1.1) $x(t) = \varphi(t, x_0, a)$ и $y(t) = \varphi(t, y_0, b)$ с произвольными начальными векторами x_0, y_0 и параметрами a, b соответственно. На основании свойства (1.2) и леммы Гронуолла — Беллмана для любого $t \in [0, T]$ получим оценку

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant (\|x_0 - y_0\| + l\rho(a, b)) \exp(l), \quad l = \int_0^T \lambda(s)\, ds. \tag{3.1}$$

Если здесь принять $x_0 = y_0$, то убеждаемся, что оператор F удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\lambda_0 = Nl\exp(l)$. Таким образом, функция ψ из (2.1) в нашей задаче определяется равенством

$$\psi(\rho) = l\exp(l)\rho. \tag{3.2}$$

Для определения функции β из (2.3) найдем решение задачи (1.1) $y(t) = \varphi(t, x_0^*, a)$ с начальным наблюдаемым вектором x_0^* и произвольным параметром $a \in S_\varkappa$ с некоторой точностью $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Если сравнить это решение с решением $x(t) = \varphi(t, x_0, a)$, то на основании неравенства (3.1), где надо принять $y_0 = x_0^*, a = b$, делаем вывод, что функцию β из (2.3) можно определить соотношением

$$\beta(\delta) = \alpha(\delta) + \delta\exp(l). \tag{3.3}$$

Положительная функция $\alpha(\delta)$ учитывает, например, ошибки при численном решении задачи Коши. Следовательно, определена и функция

$$\gamma(\delta) = N(\delta + \beta(\delta) + \psi(\varkappa(\delta))) \tag{3.4}$$

из (2.8) с учетом (3.2) и (3.3). Выпишем для ясности функции Q и Q_0 в нашем случае:

$$Q(a) = \sum_{j=1}^{N} \|\varphi(t_j, x_0^*, a) + d_j - x_j^*\|, \quad Q_0(a) = \sum_{j=1}^{N} \|\varphi(t_j, x_0, a) - x_j(a_0)\|,$$

где $x_j(a_0) = \varphi(t_j, x_0, a_0)$. Здесь векторы $d_j \in \mathbb{R}^m$, $\|d_j\| \leqslant \alpha(\delta)$, $j = 1, \ldots, N$ учитывают погрешность решения задачи Коши (1.1).

Прямым следствием теоремы 1 является следующая

Теорема 2. Пусть отображение $f : D \to \mathbb{R}^m$ измеримо по $t \in [0, T]$, удовлетворяет условию Липшица (1.2) и для некоторого параметра $a = a_0$ из компактного метрического пространства A наблюдаются значения решения задачи Коши (1.1) в моменты времени $t_j, j = 0, 1, \ldots, N$ с точностью $\delta > 0$, положительные функции $\varkappa(\delta), \alpha(\delta)$ стремятся к 0 при $\delta \to 0$. Тогда конечное множество $A_\delta \subset A$, определяемое соотношением (2.9), сколь угодно точно в метрике Хаусдорфа аппроксимирует множество неизвестных параметров A_0 в обратной задаче (1.1), (1.3)–(1.5) при достаточно малой ошибке наблюдений δ, при этом открытое множество $[A_\delta]^{\varkappa(\delta)}$ содержит множество A_0.

Следствие. Пусть в условиях теоремы 2

$$\gamma(\delta) = \delta + \alpha(\delta) + \psi(\varkappa(\delta)), \quad Q(a) = \|\varphi(T, x_0, a) - x_1(a_0)\|$$

и при некотором $\delta > 0$ множество

$$A_\delta = \{a \in S_{\varkappa(\delta)} : Q(a) \leqslant \gamma(\delta)\} = \emptyset.$$

Тогда краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, a), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1 \tag{3.5}$$

не имеет решения для любого параметра $a \in A$.

Доказательство следствия. Положим $N = 1, T = t_1, x_0^* = x_0, x_1^* = x_1$ в условиях теоремы. Поэтому в определении множества A_δ из (2.9) можно принять $\gamma(\delta) = \delta + \alpha(\delta) + \psi(\varkappa(\delta))$, так как $\beta(\delta) = \alpha(\delta)$ и $Q(a) = Q_0(a)$. Далее, допустив, что краевая задача (3.5) имеет хотя бы одно решение, отвечающее параметру $a_0 \in A_0 \subset A$, получим по теореме $A_0 \subset [A_\delta]^{\varkappa(\delta)}$. Следовательно, вопреки предположению, $A_\delta \neq \emptyset$. Следствие доказано.

Заметим, что за отказ от условия $\max_{1\leqslant j\leqslant N}\{t_j - t_{j-1}\} \to 0$ при $\delta \to 0$ приходится расплачиваться большим объемом вычислений, так как требуется решать прямые задачи Коши для конечного набора параметров из множества $S_\varkappa$ с некоторой точностью α (см. пример 1). Число N, определяющее объем наблюдений, неявно сказывается на множестве параметров A_0, так как с увеличением N в прикладных задачах, как правило, множество A_0 стягивается к точке. Исключением являются ситуации, когда, например, значения векторов $x_j(a_0), j = 0, 1, \ldots, N$ отвечают стационарному решению задачи Коши (1).

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{1+a} + at^2, \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, 1], \tag{3.6}$$

где параметр $a \in A = [0, 1], X = [0, 1]$. Решая методом Рунге — Кутта четвертого порядка точности (шаг интегрирования $h = 0,01$) задачу Коши для $x_0 = 0,5$ и $a = a_0 = 0,5$, получим (с точностью 10^{-6}) $x_1 = \varphi(0,5, x_0, a_0) = 0,623025$, $x_2 = \varphi(1, x_0, a_0) = 0,967088$. Будем считать наблюдаемыми значения $x_0^* = x_0 + \delta$, $x_2^* = x_2 + \delta$, где $\delta \leqslant \delta_0 = 0,001$, $N = 1$.

Постоянную Липшица λ из условия (1.2) в области $[0, 1] \times X \times A$ для правой части уравнения (3.6) возьмем равной $2,1$ с небольшим запасом. Кроме того, положим $\varkappa(\delta) = \delta$, $\alpha(\delta) = \delta$. Тогда $\beta(\delta) = \alpha(\delta) + \delta \exp(l)$, где $l = \lambda_0$, так как $T = 1$. Следовательно, в нашем примере $\psi(\varkappa(\delta)) = l \exp(l)\delta$, а функция $\gamma(\delta)$ определяется формулой (3.4).

Далее с помощью численного решения задач Коши методом Рунге — Кутта определялось множество A_δ, а затем δ-окрестность этого множества:

$$[A_\delta]^\delta = (0,019; 0,657), \quad \delta = 10^{-3};$$
$$[A_\delta]^\delta = (0,0871; 0,1114) \cup (0,4784; 0,5183), \quad \delta = 10^{-4};$$
$$[A_\delta]^\delta = (0,09648; 0,09889) \cup (0,49791; 0,50187), \quad \delta = 10^{-5}.$$

Таким образом, параметр $a_0 = 0,5$ попадает во второй интервал, начиная с $\delta = 10^{-4}$. Кроме этого, обнаружен еще один параметр a, который определяется первым из двух интервалов. Этот интервал можно уточнить, если принять $\delta = 10^{-6}$, а в качестве множества A взять отрезок $[0,09648; 0,09889]$.

В результате получим интервал $(0,097463; 0,097703)$, который накрывает еще один искомый параметр $a \in A_0$. Действительно, например при $a = 0,097572$ и $x_0 = 0,5$ получим $\varphi(1, x_0, a) = 0,967088$ с точностью 10^{-6}.

Если в этом примере наблюдаемые значения $x_0^* = x_0+\delta$, $x_1^* = x_1+\delta$, $x_2^* = x_2 + \delta$, тогда

$$[A_\delta]^\delta = (0,045; 0,765),\ \delta = 10^{-3};\ [A_\delta]^\delta = (0,4670; 0,5302),\ \delta = 10^{-4};$$
$$[A_\delta]^\delta = (0,49679; 0,50308), \quad \delta = 10^{-5};$$
$$[A_\delta]^\delta = (0,499680; 0,500309), \quad \delta = 10^{-6}.$$

Следовательно, в случае $N = 2$ восстанавливается единственный параметр $a_0 = 0,5$.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{1+a} + at^2, \quad x(0) = 0,5, \quad x(1) = 1,1. \tag{3.7}$$

Здесь при $\delta = 0,001$ получим $A_\delta = \emptyset$, поэтому краевая задача (3.7) не имеет решений для любого $a \in [0, 1]$.

4. Идентификация дифференциального включения

Аналогично, для решения задачи (1.6), (1.8)–(1.10) введем метрическое пространство $Z = K(\mathbb{R}^m) \times \cdots \times K(\mathbb{R}^m)$ из N множителей с метрикой

$$\rho_Z(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{N} h_X(z_j, \zeta_j),\ z = (z_1, \ldots, z_N),\ \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N).$$

Здесь множества $z_j, \zeta_j \in K(\mathbb{R}^m)$ — совокупность непустых компактных множеств из $\mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Введем оператор

$$F : A \to Z, \quad a \to z = (R_1(a), R_2(a), \ldots, R_N(a)).$$

где $R_j(a) = R(t_j, x_0, a), \quad j = 1, 2, \ldots, N$. Обозначим

$$z_0 = (R_1(a_0), \ldots, R_N(a_0)), \quad z_0^* = (R_1^*, \ldots, R_N^*).$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны п. 2 для системы дифференциальных уравнений. В результате получим аналог теоремы 2 для дифференциального включения.

Теорема 3. Пусть отображение $F : D \to K(X)$ измеримо по $t \in [0, T]$ $\forall x \in X$, удовлетворяет условию Липшица (1.7), и для некоторого параметра $a = a_0$ из компактного метрического пространства A наблюдаются множества достижимости решения задачи Коши (1.6) в моменты времени $t_j, j = 0, 1, \ldots, N$ с точностью $\delta > 0$, положительные функции $\varkappa(\delta), \alpha(\delta)$ стремятся к 0 при $\delta \to 0$. Тогда

$$\lim_{\delta \to 0} h_A(A_\delta, A_0) = 0, \quad A_0 \subset [A_\delta]^{\varkappa(\delta)}.$$

Литература

[1] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.

[2] Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики. СПб.: Лань, 2008. 352 с.

[3] Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.

[4] Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. 1943. Т. 39. Вып. 5.

Поступила в редакцию 14/*IX*/2009;
в окончательном варианте — 14/*IX*/2009.

THE IDENTIFICATION OF THE EVOLUTIONAL SYSTEMS

© 2009 O.P. Filatov[2]

The problem of determination of the parameter of the right hand side of the differential system or of the differential inclusion in accordance with the observations of the solution of the Cauchy problem in some times is considered. The parameter belongs to compact metric space. The uniqueness of the desired parameter is not assumed. The observations are produced with the errors. The final set is constructed, approximated by the unknown set of parameters in the Hausdorff metric. The approximation precision becomes zero with the errors of observation the errors of calculation.

Key words: differential system, differential inclusion, compact metric space, determination of the parameter, errors of observation, errors of calculation.

Paper received 14/*IX*/2009.
Paper accepted 14/*IX*/2009.

[2]Filatov Oleg Pavlovich (filtatov_oleg@samaradom.ru), Dept. of Mathematics and Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.