

УДК 621.373.121.14

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ДИСКРЕТНО-РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ С ОБЪЕМНЫМ РЕЗОНАТОРОМ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

© 2009 В.В. Зайцев, П.С. Хлопков,<sup>1</sup> А.В. Карлов<sup>2</sup>

Предложен метод моделирования автогенераторов с сосредоточенными активными двухполюсниками и распределенными объемными резонаторами, основанный на представлении уравнений движения в форме нелинейного интегрального уравнения Вольтерра и его численных решениях. Показано, что при формулировке интегральных уравнений движения необходимо учитывать емкость корпуса двухполюсника. Рассмотрен пример моделирования автоколебаний в генераторе с прямоугольным резонатором при кусочно-нелинейной аппроксимации вольт-амперной характеристики двухполюсника.

**Ключевые слова:** автоколебательная система, активный двухполюсник, прямоугольный резонатор, интегральное уравнение движения, динамика автоколебаний.

### Введение

Значительное число автогенераторов, применяемых в высокочастотной части радиодиапазона и в диапазоне СВЧ, относятся к автоколебательным системам дискретно-распределенного типа [1]. В них сосредоточенный активный элемент локально взаимодействует с волновым полем резонатора или автоколебательная система имеет распределенную цепь обратной связи.

Математические модели такого рода генераторов сводятся, как правило, к дифференциальным уравнениям в частных производных, описывающих

---

<sup>1</sup>Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), Хлопков Павел Сергеевич (khlompokov@gmail.com), кафедра радиоп физики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

<sup>2</sup>Карлов Алексей Владимирович (comphysics@ssu.samara.ru), инженер-конструктор ФГУП "ГНПРКЦ "ЦСКБ-Прогресс", 443009, Россия, г. Самара, ул. Земеца, 18.

распределенные резонаторы и обратные связи, с нелинейными граничными условиями, учитывающими дискретные элементы автоколебательных систем. Приближенный анализ моделей производится либо методом усреднения на основе разложения по модам линейных резонаторов, либо с использованием приближения бегущих волн медленно меняющейся амплитуды [2].

В настоящей работе предложенный ранее [3–5] метод моделирования автоколебательных систем (АКС) на основе численных решений интегральных уравнений движения применен к дискретно-распределенным системам с активными двухполюсниками и объемными резонаторами [6–7].

## 1. Автогенератор с объемным резонатором

Рассмотрим модель автогенератора, реализованного на основе активного двухполюсника и прямоугольного резонатора с идеально проводящими стенками. Схематически положение активного элемента в резонаторе показано на рис.1.1.

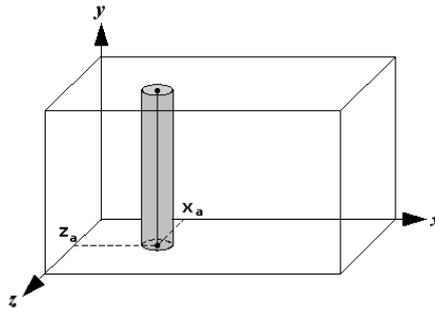


Рис. 1.1. Автоколебательная система с объемным резонатором

Волновые процессы в рассматриваемой дискретно-распределенной АКС описываются системой двух уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{cZ_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{Z_0}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

в которую, помимо напряженностей электрического  $E$  и  $H$  магнитного полей, входит плотность тока проводимости  $\mathbf{J}$ ;  $Z_0$  и  $c$  — волновое сопротивление и скорость электромагнитной волны в вакууме. Это слагаемое в первом уравнении (1.1) учитывает проводимость активного двухполюсника в виде бесконечно тонкой нити тока  $I_a$  и объемную проводимость потерь электромагнитной энергии в резонаторе:

$$\mathbf{J} = \mathbf{j} I_a \delta(x - x_a) \delta(z - z_a) + \sigma \mathbf{E}. \quad (1.2)$$

Здесь  $x_a$  и  $z_a$  — координаты нити тока,  $j$  — единичный орт оси  $Oy$ ,  $\sigma$  — проводимость потерь. Отметим, что слагаемое  $\sigma \mathbf{E}$  в выражении (1.2) описывает не реальный механизм рассеяния колебательной энергии в АКС, а лишь определенным способом замещает его в рамках предположения о высокой добротности резонатора.

Учитывая условия возбуждения резонатора, будем рассматривать только моды его колебаний. У таких мод напряженности полей имеют компоненты  $\mathbf{E} = \mathbf{j}E_y$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{i}H_x + \mathbf{k}H_z$ . При этом для компоненты электрического поля  $E_y$  из (1.1) с учетом (1.2) нетрудно получить волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{Z_0 \sigma}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{Z_0}{c} \frac{\partial I_a}{\partial t} \delta(x - x_a) \delta(z - z_a). \quad (1.3)$$

Его решение представим в виде разложения по модам резонатора

$$E_y(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m}(t) \sin(\beta_n x) \sin(\gamma_m z) \quad (1.4)$$

с модовыми числами  $\beta_n = \frac{\pi}{a}n$  и  $\gamma_m = \frac{\pi}{l}m$ . При этом для амплитуд  $A_{n,m}(t)$  получим уравнение

$$\frac{d^2 A_{n,m}}{dt^2} + Z_0 \sigma c \frac{dA_{n,m}}{dt} + \omega_{n,m}^2 A_{n,m} = -\frac{4Z_0 c}{al} \frac{dI_a}{dt} \sin(\beta_n x_a) \sin(\gamma_m z_a), \quad (1.5)$$

где  $\omega_{n,m}$  — собственные частоты мод:

$$\omega_{n,m} = c \sqrt{\beta_n^2 + \gamma_m^2} = \frac{\pi}{\tau} \sqrt{m^2 + \left(\frac{l}{a}n\right)^2}.$$

Введем в рассмотрение функции  $H_{n,m}(t)$ , удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 H_{n,m}}{dt^2} + Z_0 \sigma c \frac{dH_{n,m}}{dt} + \omega_{n,m}^2 H_{n,m} = -\frac{4Z_0 c}{al} \delta'(t) \sin(\beta_n x_a) \sin(\gamma_m z_a) \quad (1.6)$$

и нулевым начальным условиям:  $H_{n,m}(-0) = 0$ ,  $H'_{n,m}(-0) = 0$ . Так как уравнения (1.6) получены из уравнений (1.5) путем замены в правых частях последних функции  $I_a$  на  $\delta$ -функцию, то решения этих уравнений при  $t \geq 0$  связаны интегральным соотношением

$$A_{n,m}(t) = \int_0^t I_a(t_0) H_{n,m}(t - t_0) dt_0 + A_{n,m}^{(0)}(t),$$

где  $A_{n,m}^{(0)}(t)$  — свободные колебания модового осциллятора (1.5). Тогда, используя разложение (1.4), можно рассчитать напряжение  $u(t) = bE_y(x_a, z_a, t)$  между точками включения в резонатор активного двухполюсника и представить результат расчета в виде

$$u(t) = \int_0^t I_a(t_0) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b H_{n,m}(t - t_0) \sin(\beta_n x_a) \sin(\gamma_m z_a) dt_0 + U(t),$$

где  $U(t) = b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m}^{(0)}(t) \sin(\beta_n x_a) \sin(\gamma_m z_a)$  — свободные колебания напряжения. Нетрудно понять, что функция

$$u(t) = b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} H_{n,m}(t) \sin(\beta_n x_a) \sin(\gamma_m z_a) \quad (1.7)$$

играет роль импульсной характеристики линейной системы со входом  $I_a$  и выходом  $u(t)$ .

Теперь, учитывая, что возбуждающий резонатор ток активного элемента зависит от приложенного к элементу напряжения  $I_a = I_a(u)$ , можно записать интегральное уравнение движения АКС как

$$u(t) = \int_0^t I_a(u(t_0)) h(t - t_0) dt_0 + U(t). \quad (1.8)$$

## 2. Импульсная характеристика линейной подсистемы

Линейное дифференциальное уравнение (1.6) с нулевыми начальными условиями при  $t \geq 0$  имеет решение

$$H_{n,m}(t) = -\frac{4Z_0 c}{a l} \sin(\beta_n x_a) \sin(\gamma_m z_a) \exp\left(-\frac{\omega_{n,m}}{2Q_{n,m}} t\right) \cos(\omega_{n,m} t). \quad (2.1)$$

Здесь введено обозначение  $Z_0 \sigma c = \frac{\omega_{n,m}}{2Q_{n,m}}$ . Такая форма записи показателя затухания позволяет в рамках интегральной модели автоколебательной системы учесть зависимость добротности моды  $Q_{n,m}$  (в том числе нагруженной добротности) от частоты. Предполагается также, что  $Q \gg 1$ . Подстановка (2.1) в (1.7) дает следующее выражение для импульсной характеристики:

$$h(t) = -\frac{4b Z_0}{a \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega_{n,m}}{2Q_{n,m}} t\right) \cos(\omega_{n,m} t) \sin^2(\beta_n x_a) \sin^2(\gamma_m z_a). \quad (2.2)$$

Однако данное выражение нельзя практически использовать в интегральном уравнении (1.8), т. к. ряд (2.2) крайне медленно сходится при  $t > 0$  и расходится при  $t = 0$ .

Для улучшения сходимости разложения по модам резонатора к импульсной характеристике линейной подсистемы АКС учтем реальную структуру активного двухполюсника. Его схема кроме активной проводимости содержит емкость корпуса  $C_a$  (см. рис. 2.1). Для исследования влияния емкости  $C_a$  на частотную характеристику линейной подсистемы АКС можно воспользоваться методами теории электрических цепей.

Применив спектральное преобразование

$$Z_r(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

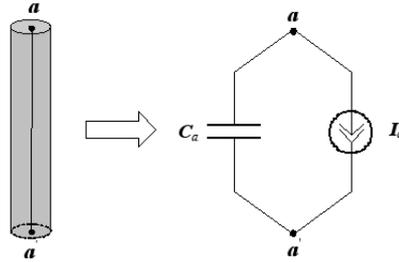


Рис. 2.1. Эквивалентная схема активного двухполюсника

введем в рассмотрение частотную характеристику резонатора, которая в данном случае является импедансом по отношению к входу в точках  $a - a'$ . Нетрудно получить явный вид импеданса:

$$Z_r(j\Omega) = -\frac{4Z_0b}{a}\bar{Z}(j\Omega),$$

$$\bar{Z}(j\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{j\Omega}{\Omega_{n,m}^2 - \Omega^2 + j\Omega\Omega_{n,m}/Q_{n,m}} \sin^2(\beta_n x_a) \sin^2(\gamma_m z_a),$$

где  $\Omega = \omega\tau$ ,  $\Omega_{n,m} = \omega_{n,m}\tau$  — безразмерные частоты.

Учитывая параллельное соединение импедансов, рассчитаем полный импеданс линейной подсистемы в точках включения генератора тока  $I_a$ :

$$Z(j\Omega) = -\frac{4Z_0b}{a} \frac{\bar{Z}_r(j\Omega)}{1 - j\vartheta\Omega\bar{Z}_r(j\Omega)}. \quad (2.3)$$

В записи этого выражения использован безразмерный коэффициент  $\vartheta = \frac{4b}{a} \frac{\tau C}{\tau} = 4\frac{b}{a} \frac{Z_0 C_a}{\tau}$ . На рис. 2.2 в качестве примера приведены графики нормированных АЧХ  $K(\Omega) = a|Z(j\Omega)|/4bZ_0$ , рассчитанные для  $z_a = 0,25$ ; координата  $x_a$  во всех положениях оставалась неизменной:  $x_a = 0,5$ . Расчет проведен для резонатора с отношением сторон  $l/a = 1,3$  и для значения коэффициента  $\vartheta = 0,21$ . При этом также предполагалось, что все моды имеют одинаковые нагруженные добротности  $Q_{n,m} = 100$ . Анализ графика позволяет выявить характерные черты возбуждения резонатора линией тока и влияние емкости корпуса активного двухполюсника на эффективность возбуждения резонаторных мод.

Как и следовало ожидать, высокочастотная асимптотика импеданса имеет вид  $\Omega^{-1}$ :

$$Z_{\infty}(j\Omega) = \frac{4Z_0b}{a}\bar{Z}_{\infty}(j\Omega) = -j\frac{4Z_0b}{a} \frac{1}{\vartheta\Omega}. \quad (2.4)$$

На рис. 2.3 для сравнения приведены графики нормированных АЧХ (2.3) и (2.4) в области частот  $\Omega > \Omega_* = 40$  системы с параметрами  $x_a = 0,5a$ ,  $z_a = 0,25l$ ,  $l/a = 1,3$ ,  $\vartheta = 0,05$ .

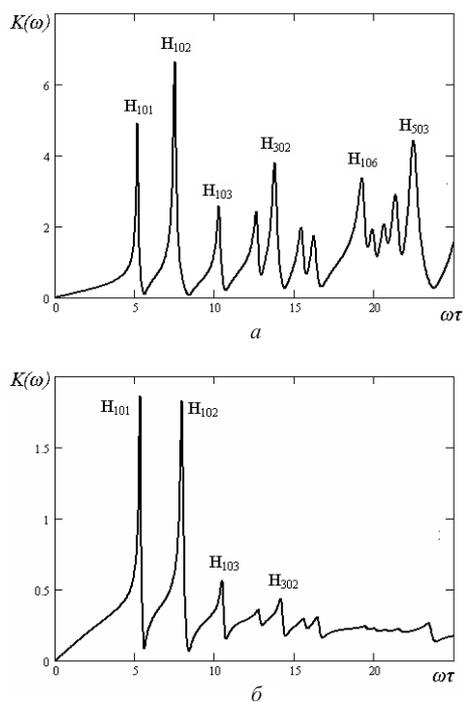


Рис. 2.2. Нормированная частотная характеристика резонансной системы без учета (а) и с учетом (б) влияния емкости корпуса активного элемента;  
 $x_a = 0,5a, z_a = 0,25l, l/a = 1,3, \vartheta = 0,21$

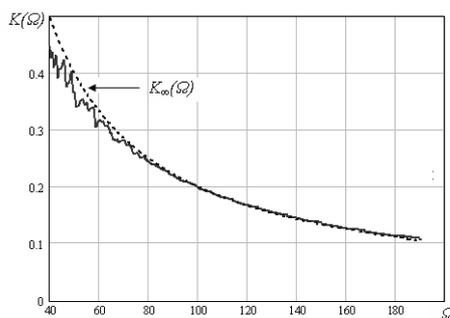


Рис. 2.3. Нормированная АЧХ резонансной системы (сплошная линия) и ее высокочастотная асимптотика (пунктирная линия);  
 $x_a = 0,5a, z_a = 0,25l, l/a = 1,3, \vartheta = 0,05$

Полученное выражение (2.3) для импеданса — частотной характеристики — позволяет представить импульсную характеристику интегралом Фурье вида

$$h(t/\tau) = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\Omega) \exp(j\Omega t/\tau) d\Omega. \quad (2.5)$$

Одним из возможных является следующий способ вычисления этого интеграла.

Граничными частотами  $\pm\Omega$  область интегрирования разбивается на три подобласти  $(-\infty, -\Omega_*)$ ,  $[-\Omega_*, \Omega_*]$  и  $(\Omega_*, \infty)$ . При этом в первой и третьей подобластях в подынтегральном выражении используется высокочастотная асимптотика импеданса (2.4). В результате интеграл Фурье принимает вид

$$h(t/\tau) = h_*(t/\tau) + \frac{4Z_0b}{\pi\vartheta\tau a} si(\Omega_*t/\tau),$$

где

$$h_*(t/\tau) = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\Omega_*}^{\Omega_*} Z(j\Omega) \exp j\Omega t/\tau d\Omega,$$

а  $si(z)$  — функция интегрального синуса. Отметим также, что эффективность вычисления  $h_*(t/\tau)$  повышается при использовании обратного дискретного преобразования Фурье в форме быстрого преобразования Фурье. В этом случае отсчеты импульсной характеристики в дискретные моменты времени  $t_k = k2\pi/(\Omega_*)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  определяются как

$$h(t_k/\tau) = \frac{\Omega_*}{2\pi\tau N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{Z} \left( jn \frac{\Omega_*}{N} \right) \exp \left( j2\pi \frac{nk}{N} \right),$$

где  $\tilde{Z} \left( jn \frac{\Omega_*}{N} \right) = Z \left( jn \frac{\Omega_*}{N} \right)$ ,  $\tilde{Z} \left( j(N-n) \frac{\Omega_*}{N} \right) = Z^* \left( jn \frac{\Omega_*}{N} \right)$  при  $n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$  и  $\tilde{Z} \left( jn \frac{\Omega_*}{N} \right) = 0$ ;  $N = 2^\nu$ ,  $\nu$  — целое число.

На рис. 2.4 приведен график нормированной на величину  $4Z_0b/\tau a$  импульсной характеристики, рассчитанной описанным выше способом по частотной характеристике, показанной на рис. 2.2, б. Начальные участки характеристик соответствуют переходному процессу в емкостной цепи активного двухполюсника. Далее наблюдаются сложные затухающие осцилляции, обусловленные значительным числом импульсно возбуждаемых мод резонатора.

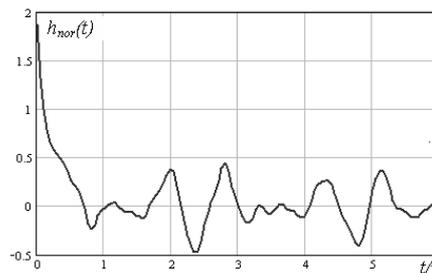


Рис. 2.4. Импульсная характеристика прямоугольного резонатора;  $z_a = 0,25$

### 3. Пример моделирования автоколебаний

Полученные отсчеты импульсной характеристики линейной подсистемы автогенератора используются и при численном решении нелинейного ин-

тегрального уравнения движения АКС (1.8). Результаты расчета процесса установления автоколебаний в системе, характеризующейся значениями параметров  $x_a = 0,5a$ ,  $l/a = 1,3$ ,  $Q_{n,m} = 100$ ,  $\vartheta = 0,05$ , и  $z_a = 0,25l$ , приведены на рис. 3.1. Расчеты проведены с шагом по времени  $\delta t = 0,05\tau$ .

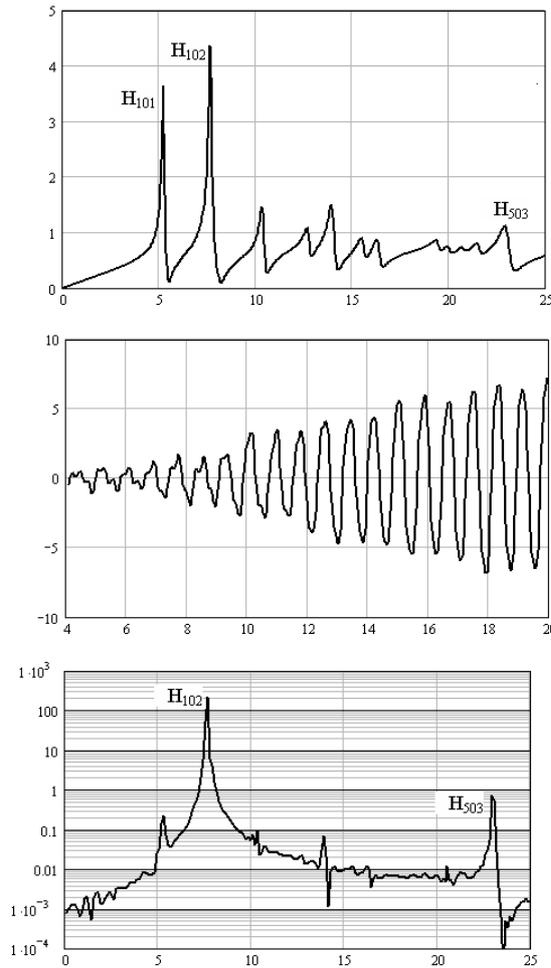


Рис. 3.1. Частотная характеристика резонатора, процесс установления и спектр автоколебаний

Вольт-амперная характеристика  $I_a = I_a(u)$  активного двухполюсника аппроксимирована кусочно-нелинейной функцией вида

$$I_a(u) = G_0 u \left( 1 - \frac{u^2}{3U_s^2} \right), \quad |u| \leq U_s,$$

$$I_a(u) = \frac{2}{3} G_0 U_s \text{sign}(u), \quad |u| > U_s,$$

где  $G_0$  и  $U_s$  — малосигнальная крутизна и напряжение насыщения ВАХ. Расчеты проведены при величине параметра глубины обратной связи  $g = 4G_0 Z_0 b/a = 0,2$ . Анализ результатов моделирования позволяет выявить

характерные особенности возбуждения автоколебаний. В частности, в АКС в режиме установившихся автоколебаний возбуждается мода  $H_{102}$  резонатора. Причем частота третьей гармоники автоколебаний находится вблизи частоты моды  $H_{503}$ , что приводит к ее возбуждению, заметному в спектре автоколебаний. На форму сигнала в начале переходного режима заметное влияние оказывают колебания моды  $H_{101}$ , которые затем подавляются вследствие конкуренции мод.

## Заключение

Представленный метод моделирования автоколебаний в распределенных системах с дискретными активными элементами основан на двухэтапном анализе автоколебательной системы. Расчет импульсной характеристики резонатора на первом этапе проводится точными методами теории линейных систем и, как правило, не вызывает затруднений. Форма интегрального уравнения движения, решаемого на втором этапе, сохраняется вне зависимости от вида импульсной характеристики. Выделение анализа линейной части системы в самостоятельную задачу обеспечивает методу значительную степень универсальности.

## Литература

- [1] Уткин Г.М. Автоколебательные системы и волновые усилители. М.: Советское радио, 1978. 272 с.
- [2] Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983. 320 с.
- [3] Зайцев В.В., Зайцев О.В., Никулин В.В. Интегральные модели автоколебательных систем // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2006. Т. 9. № 1. С. 37–41.
- [4] Зайцев В.В., Зайцев О.В., Никулин В.В. Интегральная модель дискретно-распределенной автоколебательной системы // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2006. № 3(43). С. 88–93.
- [5] Зайцев В.В., Никулин В.В., Хлопков П.С. Интегральная модель дискретно-распределенного автогенератора с емкостной обратной связью // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2007. Т. 10. № 4. С.110–114.
- [6] Твердотельные устройства СВЧ в технике связи / Г.Л. Гассанов [и др.]. М.: Радио и связь, 1988. 288 с.
- [7] Микроэлектронные устройства СВЧ / под ред. Г.И. Веселова. М.: Высшая школа, 1988. 280 с.

Поступила в редакцию 1/VII/2009;  
в окончательном варианте — 1/VII/2009.

## MODELING OF SELF-OSCILLATIONS IN DISCRETE DISTRIBUTED SYSTEM WITH CAVITY RESONATOR BY METHOD OF INTEGRAL EQUATION OF MOTION

© 2009 V.V. Zaitsev, P.S. Khlopkov<sup>3</sup> A.V. Karlov<sup>4</sup>

In the article the method of modelling of self-contained generators with concentrated active two-terminal networks and distributed cavity resonators, based on the presentation of the motion equations in the form of non-local Volterra integral equation and its numerical solutions. It is shown that at formulating the integral equations of motion it is necessary to take into into consideration the capacity of the package of two-terminal network. The example of modelling of self-oscillations in the generator with the rectangular resonator at sectionally non-linear approximation of Volt-Ampere characteristic of the two-terminal network.

**Key words:** self-oscillatory system, active two-terminal network, rectangular resonator, integral motion equation, self-oscillation dynamics.

Paper received 1/VII/2009.

Paper accepted 1/VII/2009.

---

<sup>3</sup>Zaitsev Valeriy Vasilievich ([zaitsev@ssu.samara.ru](mailto:zaitsev@ssu.samara.ru)), Khlopkov Pavel Sergeevich ([khlopkov@gmail.com](mailto:khlopkov@gmail.com)), Dept. of Radiophysics and Computer Modelling of Radiotechnical Systems, Samara State University, Samara, 443011, Russia

<sup>4</sup>Karlov Alexey Vladimirovich ([comphysics@ssu.samara.ru](mailto:comphysics@ssu.samara.ru)), State Research and Production Space-Rocket Center "TsSKB-Progress", Samara, 443009, Russia.