МАТЕМАТИКА

УДК 519.946

ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОДУ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ЕГО ПОСТРОЕНИЯ

© 2010 Э.И. Абдурагимов[1]

В работе доказываются существование и единственность положительного решения для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Предложен также неитерационный численный метод нахождения положительного решения.

Ключевые слова: существование, единственность, нелинейное дифференциальное уравнение, краевая задача, положительное решение.

Введение

Исследованиям положительных решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений посвящено много работ российских и зарубежных математиков (см., например [1–7] и цитированную в них литературу). Во многих из них рассматриваются вопросы существования положительного решения, его поведения, асимптотики. Работ, посвященных единственности положительного решения и численным методам его построения, мало, особенно в случае сильно нелинейных уравнений вида $u = Au$ с выпуклым оператором A. В предлагаемой работе делается попытка устранить указанный пробел.

1. Основные результаты

Рассмотрим семейство двухточечных краевых задач:

$$y_i{}^{(4)} + x^m|y_i|^n = 0, 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y_i(0) = y_i{}'(0) = y_i{}''(0) = 0, \tag{2}$$

[1]Абдурагимов Эльдерхан Исрапилович (abduragimov42@mail.ru), кафедра прикладной математики Дагестанского государственного университета, 367025, Россия, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43б.

$$y_i{}^{(i)}(1) = 0, \;\; i = 0,1,2,3, \tag{3}$$

где $m \geqslant 0, n > 1$ — константы.

Очевидно, $y_i \equiv 0 (i = 0,1,2,3)$ — тривиальное решение задачи (1)–(3). Под положительным решением задачи (1)–(3) понимается функция $y_i \in \in C^4[0,1]$, положительная при $x \in (0,1)$, удовлетворяющая уравнению (1) и граничным условиям (2)–(3).

В работе доказывается существование и единственность положительного решения задачи (1)–(3). Кроме того, предлагается численный метод построения этого решения. Отметим, что существование положительного решения также можно доказать, пользуясь методом расслоения С.И. Похожаева [3]. В качестве примеров приводится положительное решение (в виде таблиц значений) задачи (1)–(3) при $m = 0, \; n = 4$, построенное приведенным здесь методом.

В данной работе продолжаются исследования автора, опубликованные в работах [8–11].

1.1. Вспомогательные предложения

Пусть A — произвольное положительное число. Рассмотрим задачу Коши:

$$y^{(4)} + x^m |y|^n = 0, \tag{4}$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \tag{5}$$

$$y'''(0) = A. \tag{6}$$

Интегрируя уравнение (4) с учетом начальных условий (5), (6), имеем

$$y'''(x) = A - \int_0^x s^m |y(s)|^n ds, \tag{7}$$

$$y''(x) = Ax - \int_0^x (x-s) s^m |y(s)|^n ds, \tag{8}$$

$$y'(x) = A\frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-s)^2}{2} s^m |y(s)|^n ds, \tag{9}$$

$$y(x) = A\frac{x^3}{6} - \int_0^x \frac{(x-s)^3}{6} s^m |y(s)|^n ds. \tag{10}$$

Лемма 1.1. *При любом $A > 0$ существует единственная точка $x_3 > 0$ такая, что существует единственное решение $y \in C^4[0, x_3]$ задачи Коши (4)–(6) такое, что $y'''(x_3) = 0, y'''(x) > 0$ при $x \in (0, x_3)$ и $y'''(x) < 0$ при $x > x_3$.*

Доказательство. Так как $y'''(0) = A > 0$, то $y'''(x) > 0$ в некоторой окрестности $(0, \delta)$ нуля. Из уравнения (4) следует, что $y^{(4)}(x) \leqslant 0$. Следовательно, $y'''(x)$ — невозрастающая функция.

Предположим противное, т. е. не существует точки x, в которой $y'''(x) = = 0$. Тогда $y'''(x) > 0$ при всех $x > 0$. В силу (7) из (10) и (9) следует

$$y(x) \geqslant \frac{x^3}{6}(A - \int_0^x s^m |y(s)|^n ds) = \frac{x^2}{2} y'''(x) > 0,$$

$$y' \geqslant \frac{x^2}{2}(A - \int_0^x s^m|y(s)|^n ds) = \frac{x^3}{6}y'''(x) > 0.$$

Это значит, что $y(x)$ — положительная всюду на $(0,\infty)$ возрастающая функция. Из (10) при $x > 0$ имеем

$$Ax^3 > \int_0^x (x-s)^3 s^m |y(s)|^n ds. \tag{11}$$

Пусть $x_0 \geqslant \delta$. Поскольку $y(x)$ — возрастающая функция, то в силу (11) при $x > x_0$ имеем

$$Ax^3 > \int_{x_0}^x (x-s)^3 s^m |y(s)|^n ds \geqslant x_0^m y^n(x_0)\frac{(x-x_0)^4}{4}. \tag{12}$$

Отсюда при $x = Mx_0 (M > 1)$ имеем

$$AM^3 > {x_0}^{m+1}\frac{(M-1)^4}{4}y^n(x_0)$$

или

$$1 > \frac{{x_0}^{m+1}(M-1)^4}{4AM^3}y^n(x_0). \tag{13}$$

Так как $y^n(x_0) > 0$ и $A > 0$, то (13) при $M \to +\infty$ приводит к противоречию. Следовательно, существует точка x_3 такая, что $y'''(x_3) = 0$. Пусть $\delta-$ произвольное число из $(0, x_3)$. Из (7) имеем

$$y'''(x_3 - \delta) = A - \int_0^{x_3} s^m|y(s)|^n ds + \int_{x_3-\delta}^{x_3} s^m|y(s)|^n ds = \int_{x_3-\delta}^{x_3} s^m|y(s)|^n ds > 0.$$

Пусть теперь Δ — произвольное положительное число. Снова из (7) имеем

$$y'''(x_3+\Delta) = A - \int_0^{x_3} s^m|y(s)|^n ds - \int_{x_3}^{x_3+\Delta} s^m|y(s)|^n ds = -\int_{x_3-\Delta}^{x_3} s^m|y(s)|^n ds < 0.$$

Из уравнения (4) и равенств (7)–(10) следует ограниченность $\|y\|_{C^4[0,x_3]}$. Следовательно, существует единственное решение задачи Коши (4)–(6) на $[0, x_3]$. Лемма доказана.

Лемма 1.2. *При любом $A > 0$ существует единственная точка $x_2 > 0$ такая, что существует единственное решение $y \in C^4[0, x_2]$ задачи Коши (4)–(6) такое, что $y''(x_2) = 0$, $\quad y''(x) > 0$ при $x \in (0, x_2)$ и $y''(x) < 0$ при $x > x_2$.*

Доказательство. Так как по лемме 1.1 $y'''(x) > 0$ при $x \in (0, x_3)$, то $y''(x)$ возрастает при $x \in (0, x_3)$. Поскольку $y''(0) = 0$, то $y''(x) > 0$ на $(0, x_3)$.

Предположим противное, т. е. не существует точки x, в которой $y''(x) = 0$. Тогда $y''(x) > 0$ при всех $x > 0$. Из (10) и (9) в силу (8) при $x > 0$ имеем

$$y' \geqslant \frac{x}{2}(Ax - \int_0^x (x-s)s^m|y(s)|^n ds) = \frac{x}{2}y''(x) > 0,$$

$$y(x) \geqslant \frac{x^2}{6}(Ax - \int_0^x (x-s)s^m |y(s)|^n ds) = \frac{x^2}{6}y''(x) > 0.$$

Следовательно, $y(x) > 0$ и возрастает при $x > 0$. Пусть $x_0 \geqslant x_3$, где x_3 определяется леммой 1.1. Тогда (10) в силу (11) при $x > x_0$ приводит к неравенству (12), далее — к неравенству (13), из которого получаем противоречие. Следовательно, существует точка x_2 такая, что $y''(x_2) = 0$. Очевидно, $x_2 \geqslant x_3$. Так как $(y''))''(x) = y^{(4)}(x) < 0$ при $x > 0$, то $y''(x)$– выпуклая вниз функция. Поэтому точка x_2, в которой $y''(x_2) = 0$, единственна. Следовательно, $y''(x) > 0$ при $x \in (0, x_2)$ и $y''(x) < 0$ при $x > x_2$. Ограниченность $\|y\|_{C^4[0,x_2]}$ следует из (4) и (7)–(10). Следовательно, существует единственное решение задачи Коши (4)–(6) на $[0, x_2]$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *При любом $A > 0$ существует единственная точка x_1 такая, что существует единственное решение $y \in C^4[0, x_1]$ задачи Коши (4)–(6) такое, что $y'(x_1) = 0$, $\quad y'(x) > 0$ при $x \in (0, x_1)$ и $y'(x) < 0$ при $x > x_1$, где $y(x)$ — решение задачи (4)–(6).*

Доказательство. Так как по лемме 1.2 $y''(x) > 0$ при $x \in (0, x_2)$, то $y'(x)$ возрастает при $x \in (0, x_2)$. Поскольку $y'(0) = 0$, то $y'(x) > 0$ на $(0, x_2)$.

Предположим противное, т. е. не существует точки x, в которой $y'(x) = 0$. Тогда $y'(x) > 0$ при всех $x > 0$. Следовательно, $y(x)$ возрастает при $x > 0$. Поскольку $y(0) = 0$, то $y(x) > 0$ при $x > 0$. Пусть $x_0 \geqslant x_2$, где x_2 определяется леммой 1.2. Тогда так же, как и в лемме 1.1, приходим к неравенству (12). Полагая в нем $x = Mx_0 (M > 1)$, получим неравенство (13), из которого получаем противоречие. Следовательно, существует точка x_1 такая, что $y'(x_1) = 0$. Очевидно, $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$. Так как $(y'(x))'' = y'''(x) < 0$ при $x > x_3$ по лемме 1.1, то $y'(x)$– выпуклая вниз при $x > x_3$ функция. Тем более она выпукла вниз при $x > x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$. Поэтому точка x_1, в которой $y'(x_1) = 0$, единственна, $\quad y'(x) > 0$ при $x \in (0, x_1)$ и $y'(x) < 0$ при $x > x_1$. Ограниченность $\|y\|_{C^4[0,x_1]}$ следует из (4) и (7)–(10). Следовательно, существует единственное решение задачи Коши (4)–(6) на $[0, x_1]$. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *При любом $A > 0$ существует единственная точка $x_0 > 0$ такая, что существует единственное решение $y \in C^4[0, x_0]$ задачи Коши (4)–(6) такое, что $y(x_0) = 0$, $y(x) > 0$ при $x \in (0, x_0)$.*

Доказательство. Так как по лемме 1.3 $y'(x) > 0$ при $x \in (0, x_1)$ и $y(0) = 0$, то $y(x) > 0$ и возрастает при $x \in (0, x_1)$.

Предположим противное, т. е. $y(x) > 0$ при всех $x > 0$. Так как по лемме 1.2 $y''(x) < 0$ при $x > x_2$, то $y''(x) < 0$ и при $x > x_1 \geqslant x_2$, т. е. $y(x)$ — выпуклая вниз функция при $x > x_1$. Следовательно, существует единственная точка x_0 такая, что $y(x_0) = 0$, $\quad y(x) > 0$ при $x \in (0, x_0)$ и $y(x) < 0$ при $x > x_0$. Ограниченность $\|y\|_{C^4[0,x_0]}$ следует из (4) и (7)–(10). Следовательно, существует единственное решение задачи Коши (4)–(6) на $[0, x_0]$. Лемма доказана.

1.2. Существование и единственность положительного решения

Следуя Ц. На [12], введем линейную группу преобразований

$$x = A_i^{\alpha}\overline{x}, \qquad y_i = A_i^{\beta}\overline{y_i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{14}$$

где α, β — константы, подлежащие определению,A_i — положительный параметр преобразования. В новых координатах $(\overline{x}, \overline{y_i})$ уравнение (1) примет вид

$$A_i^{\beta-4\alpha}\overline{y_i}^{(4)} + A_i^{\alpha m+\beta n}\overline{x}^m\overline{y_i}^n = 0. \tag{15}$$

Выберем константы α и β так, чтобы это уравнение не зависело от параметра A_i :

$$\beta - 4\alpha = \alpha m + \beta n. \tag{16}$$

Тогда из (15) имеем

$$\overline{y_i}^{(4)} + \overline{x}^m\overline{y_i}^n = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{17}$$

т. е уравнение (1) оказалось инвариантным относительно преобразования (14).

Обозначим через A_i недостающее начальное условие в задаче $(1)-(3)$:

$$y_i'''(0) = A_i. \tag{18}$$

Это условие в координатах $(\overline{x}, \overline{y_i})$ запишется в виде

$$A_i^{\beta-3\alpha}\overline{y_i}'''(0) = A_i, \tag{19}$$

и оно не будет зависеть от параметра A_i, если

$$\beta - 3\alpha = 1. \tag{20}$$

Тогда из (19) получим

$$\overline{y}_i'''(0) = 1. \tag{21}$$

Решая систему (19), (20), находим

$$\alpha = -\frac{n-1}{m+3n+1}, \tag{22}$$

$$\beta = \frac{m+4}{m+3n+1}. \tag{23}$$

В силу (17), (21) и того, что условия (2) в новых координатах $(\overline{x}, \overline{y_i})$ будут иметь вид $\overline{y_i}(0) = \overline{y_i}'(0) = \overline{y_i}''(0) = 0$, приходим к следующей задаче Коши для $\overline{y_i}(\overline{x})$:

$$\overline{y_i}^{(4)} + \overline{x}^m\overline{y_i}^n = 0, \tag{24}$$

$$\overline{y_i}(0) = \overline{y_i}'(0) = \overline{y_i}''(0) = 0, \tag{25}$$

$$\overline{y}_i'''(0) = 1. \tag{26}$$

Из лемм 1.1–1.4 с $A = 1$ следует, что существует единственная точка $\overline{x_{i0}}, i = 0, 1, 2, 3,$ такая, что решение $\overline{y_i}(\overline{x})$ задачи Коши (24)–(26) на $[0, \overline{x_{i0}}]$ определяется единственным образом, удовлетворяет условию $\overline{y_i}^{(i)}(\overline{x_{i0}}) = 0, i = 0, 1, 2, 3,$ и $\overline{y_i}^{(i)}(\overline{x}) > 0$ при $\overline{x} \in (0, x_{i0})$. Выберем параметр A_i в (14) так, чтобы $x = 1$ при $\overline{x} = \overline{x_{i0}}, i = 0,1,2,3$, т. е. из равенства $1 = A_i^\alpha \overline{x_{i0}}$. Отсюда положительный параметр A_i определяется однозначно:

$$A_i = (\overline{x_{i0}})^{-\frac{1}{\alpha}}, i = 0,1,2,3, \tag{27}$$

где α определяется равенством (22). Поэтому задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение $y_i \in C^4[0,1]$.

Теорема 1.1. *Задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение* $y_i \in C^4[0,1], \quad i = 0,1,2,3.$

Замечание 1. Отрезок $[0,a]$ *с произвольным положительным a заменой* $t = \frac{x}{a}$ *сводится к отрезку [0,1]. Поэтому сформулированная здесь теорема имеет место для любого отрезка* $[0,a]$ *с заменой условия* (3) *на* ${y_i}^{(i)}(a) = 0, i = 0,1,2,3.$

1.3. Численный метод построения положительного решения

Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать алгоритм построения единственного положительного решения задачи (1)–(3), состоящий из следующих шагов:

1. Вычисляем α и β по формулам (22), (23).

2. Решаем каким-либо численным методом, например методом Рунге-Кутта четвертого порядка, задачу Коши (24)–(26), начиная с $\overline{x} = 0$ до тех пор, пока по одной из лемм 1.1–1.4 не выполнится равенство $\overline{y_i}^{(i)}(\overline{x_{i0}}) = 0$ с $\overline{x_{i0}} > 0, \quad i = 0,1,2,3.$

3. Вычисляем A_i по формуле (27).

4. Находим решение по формулам (14).

Замечание 2. Для уменьшения вычислительной погрешности, связанной с вычислением степени A_i, *пункт 4 можно заменить пунктом*

$4'$. *Решаем задачу Коши* $(1), (2), (18)$ *тем же численным методом, что и в пункте 2, начиная с* $x = 0$ *до* $x = 1$.

В качестве примера приведем таблицу значений положительного решения задачи $(1) - (3)$ при $i = 0, m = 0, n = 4$, полученного указанным здесь методом.

Положительное решение задачи $(1) - (3)$ **при** $i = 0, m = 0, n = 4$

x	0,00	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	0,00	0,04	0,31	1,05	2,49	4,86	8,39	13,18	18,54	19,65	0,00

Заключение

Доказано, что каждая задача из семейства двухточечных краевых задач

$$ {y_i}^{(4)} + x^m |y_i|^n = 0, 0 < x < 1, $$

$$ y_i(0) = {y_i}'(0) = {y_i}''(0) = 0, $$

$$ {y_i}^{(i)}(1) = 0, \;\; i = 0,1,2,3, $$

где $m \geqslant 0, n > 1$ — константы, имеет единственное положительное решение, и предложен неитерационный численный метод его построения. Для данного класса уравнений результат о единственности, а также предложенный здесь неитерационный численный метод построения положительного решения являются новыми.

Литература

[1] Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М., 1962. 394 с.

[2] Похожаев С.И. Об одной задаче Овсянникова // ПМТФ. 1989. № 2. С. 5–10.

[3] Похожаев С.И. Об одном конструктивном методе вариационного исчисления // ДАН СССР. 1988. Т. 298. № 6. С. 1330-1333.

[4] Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlineare elliptic equations // Commutations on Pure and Applied Mathematics. 1982. V. 4. P. 525–598.

[5] Kuo-Shung Cheng, Jenn-Tsann Lin. On the elliptic equations $\Delta u = K(x)u^{\alpha}$ and $\Delta u = K(x)\exp^{2u}$ // Transactions of American mathematical society. 1987. V. 304. № 2. P. 633–668.

[6] Галахов Е.И. Положительные решения квазилинейного эллиптического уравнения // Математические заметки. 2005. Т. 78. Вып. 2. С. 202–211.

[7] Гапоненко Ю.Л. О положительных решениях нелинейных краевых задач // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1983. № 4. С. 8–12.

[8] Абдурагимов Э.И. О единственности положительного решения одной нелинейной двухточечной краевой задачи // Изв. вузов. Математика. 2002. № 6. С. 3–6.

[9] Абдурагимов Э.И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // Дагестанский математический сборник. 2005. Т. 1. С. 7–12.

[10] Абдурагимов Э.И. О положительном решении двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка: материалы междунар. конф. Махачкала, 2005. С. 12–13.

[11] Абдурагимов Э.И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // Изв. вузов. Математика. 2006. № 8. С. 3–6.

[12] На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. 296 с.

Поступила в редакцию 24/*VI*/2009;
в окончательном варианте — 24/*VI*/2009.

POSITIVE SOLUTION OF TWO-POINT BOUNDARY PROBLEM FOR NONLINEAR ODE OF THE FOURTH ORDER AND NUMERICAL METHOD OF ITS CONSTRUCTION

 E.I. Abduragimov[2]

In the paper the existence and uniqueness of the positive solution for one class of nonlinear differential equations of the fourth order is proved. The numerical noniteration method to its finding is also suggested.

Key words: existence, uniqueness, nonlinear differential equation, boundary problem, positive solution.

Paper received 24/*VI*/2009.
Paper accepted 24/*VI*/2009.

[2]Abduragimov Elderkhan Israpilovich (abduragimov42@mail.ru), Dept. of Applied Mathematics, Dagestan State University, Makhachkala, 367025, Russia.