

УДК 519.62

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ СТРУКТУРЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ ВБЛИЗИ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ЭКРАНА, СВОДИМОЙ К ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

© 2010 Е.А. Алашеева,¹ И.А. Блатов,² М.Ю. Маслов³

В статье предложены математические модели двумерных идеально проводящих излучающих структур на основе аппарата двумерных интегральных уравнений, а также новый алгоритм решения двумерных интегральных уравнений, к которым сводятся внешние электродинамические задачи для излучающих структур, таких как идеально проводящий плоский экран, зеркало в форме параболического цилиндра, зеркало в форме параболоида вращения, возбуждаемых элементарными электрическим и магнитным излучателями.

Ключевые слова: двумерные задачи электродинамики, интегральные уравнения, метод Галеркина.

1. Предварительные сведения

При решении ряда прикладных задач электродинамики и теории антенн часто возникает проблема анализа электромагнитного поля, рассеянного проводящими телами, расположенными в непосредственной близости излучающей системы. К подобным задачам относятся задачи расчета ближних полей апертурных антенн, а также учета влияния подстилающей поверхности и иных материальных тел, расположенных вблизи антенны, таких как затеняющие металлоконструкции, импедансные структуры и т. п. При этом в ряде случаев рассеивающие тела могут быть представлены как

¹Алашеева Елена Александровна (allena-81@mail.ru), кафедра высшей математики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, 443090, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 77.

²Блатов Игорь Анатольевич (blatow@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

³Маслов Михаил Юрьевич (mike@psati.ru), кафедра электродинамики и антенн Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, 443090, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 77.

тонкие проводящие поверхности ограниченных размеров. В связи с активным развитием в последние десятилетия методов вычислительной математики, применяемых к решению задач об излучении, возникло множество методик решения интегральных уравнений, имеющих смысл тех или иных граничных условий, наиболее распространенными из которых являются различные модификации метода моментов [1, 4]. Однако упомянутые выше методики встречаются в литературе в основном для решения задач дифракции, сводимых к одномерным интегральным уравнениям [2]. И практически нигде не встречаются оценки эффективности существующих алгоритмов и четкие методики решения задач дифракции, сводимых к двумерным интегральным уравнениям.

Сведение задачи дифракции к системе двумерных интегральных уравнений Фредгольма подразумевает более общее решение поставленной задачи, т. к. появляется возможность отказаться от специальных систем координат. Кроме того, отпадает необходимость выбора среди всех возможных решений дифференциального уравнения частного решения, удовлетворяющего данной задаче. В данном случае прямо получается единственное решение, за исключением тех редких случаев, когда уравнение имеет бесконечно много решений или вовсе не имеет решения. Еще одним толчком для исследования двумерных задач дифракции послужил ряд открытий в области вычислительной математики. Например, вейвлет-функции появились сравнительно недавно, в середине 80-х годов, и завоевали популярность в связи с рядом преимуществ перед классическими ортогональными системами базисных функций, включая тригонометрические полиномы, ряды Фурье, алгебраические полиномы, для широкого круга задач. Это обстоятельство делает перспективным применение wavelet-систем для численного решения многомерных интегральных уравнений. Методы работы с псевдоразреженными матрицами широко представлены в [3]. Целью данной работы являлась разработка математических моделей двумерных идеально проводящих излучающих структур на основе математического аппарата двумерных интегральных уравнений, а также нового эффективного алгоритма решения двумерных интегральных уравнений, к которым сводятся внутренние электродинамические задачи для следующих излучающих структур: идеально проводящий плоский экран; зеркало в форме параболического цилиндра; зеркало в форме параболоида вращения, возбуждаемые элементарным электрическим излучателем (ЭЭИ) и элементарным магнитным излучателем (ЭМИ).

Разработка численных методов решения задач дифракции открыла широкие возможности для анализа влияния поверхностей произвольной конфигурации на структуру электромагнитного поля. При этом возникла проблема создания общих вычислительных алгоритмов, позволяющих исследовать широкий класс задач. Методы, разработанные на основе применения различного математического аппарата, жестко связаны с определенными классами незамкнутых поверхностей и неприменимы для поверхностей

где \vec{H}_{τ_0} и $\vec{H}_{\tau S}$ — тангенциальные компоненты вектора напряженности первичного магнитного поля и поля рассеяния на поверхности S .

Для тангенциальной компоненты магнитного поля рассеяния справедливо выражение

$$\vec{H}_{\tau S}(\vec{r}) = \int_S \vec{j}_S(\vec{r}'') \times [\text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}'')] ' dS, \quad (2)$$

где $\vec{j}_S(\vec{r}'')$ — вектор плотности тока на поверхности S , \vec{n} — вектор нормали в точке с координатами \vec{r}'' , $10G(\vec{r}, \vec{r}'') = \exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}''|)/(4\pi|\vec{r} - \vec{r}''|)$ — функция Грина для свободного пространства, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Штрих у оператора grad в (2) указывает на то, что дифференцирование производится по координатам \vec{r}'' .

Выражение (2) с учетом граничного условия (1) можно представить в виде

$$\vec{n}(\vec{r}_0) \times \vec{H}_0(\vec{r}_0) = \vec{n}(\vec{r}_0) \times \lim_{r \rightarrow r_0} \int_S \vec{j}_S(\vec{r}'') \times [\text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}'')] ' dS, \quad (3)$$

где \vec{r}_0 — текущая координата на поверхности S .

Вычисление предела в (3) с помощью теории потенциала приводит к следующему интегральному уравнению [5]:

$$\vec{n}(\vec{r}_0) \times \vec{H}_0(\vec{r}_0) = \frac{1}{2} \vec{j}(\vec{r}) - \int_S \vec{n}(\vec{r}_0) \times \{ \vec{j}_S(\vec{r}'') \times [\text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}'')] ' \} dS. \quad (4)$$

Векторное уравнение (4) можно представить в виде совокупности скалярных уравнений следующим образом [5, 6]. Введем два ортогональных базисных вектора в плоскости, касательной к поверхности S , таким образом, чтобы

$$\vec{\tau}_1(\vec{r}_0) \times \vec{\tau}_2(\vec{r}_0) = \vec{n}(\vec{r}_0). \quad (5)$$

Очевидно, что введенные орты соотносятся между собой следующим образом:

$$\vec{\tau}_1(\vec{r}_0) \times \vec{n}(\vec{r}_0) = -\vec{\tau}_2(\vec{r}_0), \quad \vec{\tau}_2(\vec{r}_0) \times \vec{n}(\vec{r}_0) = \vec{\tau}_1(\vec{r}_0). \quad (6)$$

Тогда (4) распадается на два уравнения относительно двух ортогональных компонент вектора плотности тока:

$$\vec{\tau}_2(\vec{r}_0) \vec{H}(\vec{r}_0) = -\frac{1}{2} \vec{\tau}_1(\vec{r}_0) \vec{j}_S(\vec{r}) - \int_S \vec{\tau}_2(\vec{r}_0) \{ \vec{j}_S(\vec{r}'') \times [\text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}'')] ' \} dS. \quad (7)$$

$$\vec{\tau}_1(\vec{r}_0) \vec{H}(\vec{r}_0) = -\frac{1}{2} \vec{\tau}_2(\vec{r}_0) \vec{j}_S(\vec{r}) + \int_S \vec{\tau}_1(\vec{r}_0) \{ \vec{j}_S(\vec{r}'') \times [\text{grad}G(\vec{r}, \vec{r}'')] ' \} dS. \quad (8)$$

В зависимости от вида элементарного излучателя, вертикального ЭЭИ, горизонтального ЭЭИ, вертикального ЭМИ, горизонтального ЭМИ левые части уравнений будут иметь различный вид [5, 6].

3. Численное решение

Решение электродинамической задачи можно разделить на три этапа: получение математических соотношений между интересующими нас физическими величинами; введение определенных ограничений на поведение полей и источников на соответствующих поверхностях; получение численных результатов. Для решения поставленной задачи будем использовать метод моментов, сравним следующие виды данного метода: метод Галеркина [4] (метод Бубнова — Галеркина), метод наименьших квадратов, метод разделения области: метод Галеркина удобен тем, что базисные функции совпадают с весовыми; метод наименьших квадратов удобен тем, что матрица системы, получаемой при дискретизации уравнения, симметрична, однако существуют ограничения в его применении, например, в случае вибратора с плоскими торцами имеется известная особенность на ребре, наличие этой особенности приводит к ошибкам в определении величины рассеянного поля вблизи торцов; метод разделения области удобен тем, что при выборе весовых функций в виде дельта-функций все интегрирование сводится лишь к вычислению интегрального оператора. При дискретизации уравнения в процессе решения его методом моментов часто возникают СЛАУ довольно высоких порядков, решение которых, в свою очередь, занимает достаточно долгое время. Поэтому существенная часть раздела посвящена описанию приближенных методов: метод разреженной матрицы и итерационные методы. В рамках представления данных методов в работе разработан оригинальный алгоритм с использованием открытых недавно вейвлет-функций, который приводит к применению разряженных технологий. Это возможно из-за особенностей вейвлет-базиса (рис. 2), т. к. одни его элементы малы по абсолютной величине по сравнению с другими.

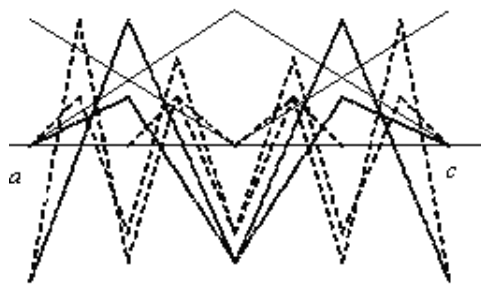


Рис. 2. Базис, составленный из линейных сплайнов, обыкновенных и граничных вейвлет

Известно, что существует два вида систем базисных функций: базисы полной области (базисные функции определены на всей области определения интегрального оператора) и базисы подобластей (базисные функции финитные). Системы базисных функций полной области наиболее эффективно использовать в случае предполагаемого гладкого решения электродинамической задачи.

намической задачи, а базисы подобластей, напротив, лучше использовать в случае получения предполагаемого негладкого решения. В [6] выделены особенности решения двумерной задачи: здесь пространство рассматривается как тензорное произведение подпространств (9), что существенно увеличивает порядок получаемой СЛАУ.

$$L = L_x \times L_y. \quad (9)$$

Существует множество примеров базисных функций подобластей и полной области. Например, поставленную задачу можно решать с использованием в качестве базиса сплайновых функций

$$J(x, y) = \sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij} \phi_i(x) \phi_j(y), \quad (10)$$

где $\phi_i(x), \phi_j(y)$ — B -сплайны степени 1 дефекта 1 (линейные сплайны) (рис. 3):

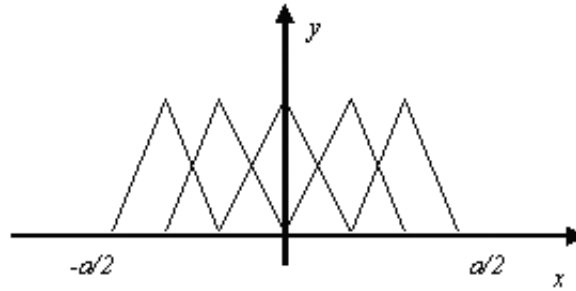


Рис. 3. Линейные сплайны

Итак, метод решения поставленной задачи — это метод Галеркина, т. к. в данном случае базисные функции совпадут с весовыми, что существенно упрощает алгоритм решения поставленной задачи. В качестве базисных функций наиболее рационально использовать разложение искомой функции в двумерный ряд Фурье, т. к. при таком выборе базис по форме близок к ожидаемому результату, что значительно снижает порядок матрицы импедансов, получаемой при дискретизации интегрального уравнения. Кроме того, в данном случае область определения интегрального оператора довольно проста, поэтому можно выбрать базис полной области. Применение двумерного ряда Фурье позволяет значительно снизить время на вычисление по сравнению с применением вейвлет-базиса и сплайнового базиса.

Решение поставленной задачи ищется в виде:

$$J(x, y) = a_1 + a_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x + a_3 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x + a_4 \cos \frac{2\pi}{\lambda} y + a_5 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \frac{2\pi}{\lambda} y + a_6 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \frac{2\pi}{\lambda} y + \dots, \quad (11)$$

где λ — длина волны.

Будем искать распределения поверхностной плотности тока на следующих структурах: идеально проводящий плоский экран (рис. 4); зеркало в форме параболического цилиндра (рис. 5); зеркало в форме параболоида вращения (рис. 6).

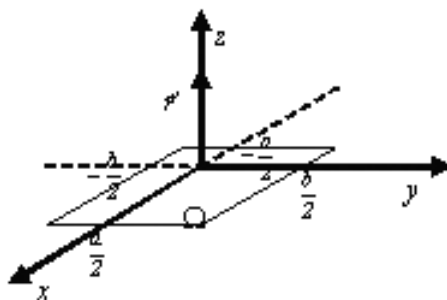


Рис. 4. Идеально проводящий плоский экран в декартовой системе координат

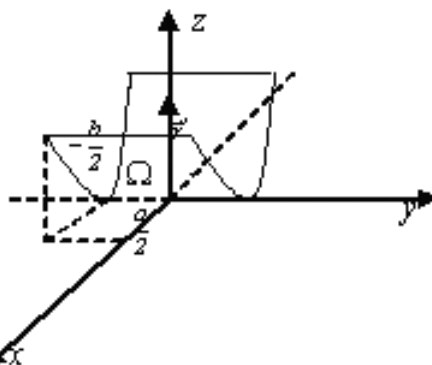


Рис. 5. Зеркало в форме параболического цилиндра

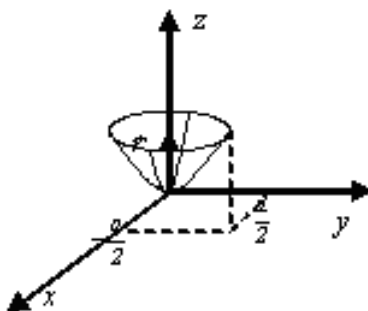


Рис. 6. Зеркало в форме параболоида вращения

Отметим, что при реализации алгоритма следует учесть особенности каждой поверхности, т. е. преобразовать уравнения, выведенные в первом разделе, с целью наиболее удобной реализации на ЭВМ алгоритма их решения [6].

4. Результаты расчета

Численная реализация предлагаемого метода сводится к решению СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов разложения приближенного решения по гармоникам двумерного ряда Фурье. Элементы матрицы выражаются через кратные интегралы, вычисляемые с помощью квадратурных формул Гаусса. Ввиду невысокого порядка и плотной структуры, данная СЛАУ решалась методом Гаусса с выбором главного элемента. Представленные ниже графики построены на основе полученных приближенных решений с использованием математической программной системы Maple 7.

При расчетах полагаем $\vec{\tau}_1(\vec{r}_0) = \vec{x}_0, \vec{\tau}_2(\vec{r}_0) = \vec{y}_0, \vec{n}(\vec{r}_0) = \vec{z}_0$. На рис. 7 представлено нормированное распределение поверхностной плотности тока j на идеально проводящем плоском экране: $\Omega = a \times b, \lambda = a, a = b = 2$ м, $\vec{r} = \{0; 0; 0, 25a\}$. В качестве облучателя использован вертикальный ЭЭИ.

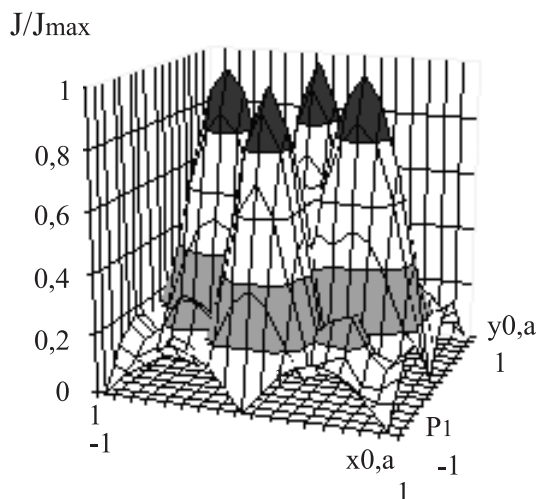


Рис. 7. Нормированное распределение тока на плоском экране

Расстояние между экстремумами (пучностями плотности тока) равно половине длины волны, что соответствует физическому смыслу. Полученное распределение плотности тока полностью симметрично, как и ожидалось, т. к. вертикальный излучатель расположен строго над центром облучаемого плоского экрана квадратной формы. На рис. 8 представлено распределение поверхностной плотности тока j на зеркале в форме параболического цилиндра $z = x^2, y \in [-0, 5a; 0, 5a], \lambda = a, a = 1$ м, $\vec{r} = \{0; 0; 0, 25a\}$. В качестве облучателя использован вертикальный ЭМИ.

На рис. 9 и 10 представлены сечения нормированного распределения плотности тока вдоль осей x_0 и y_0 соответственно.

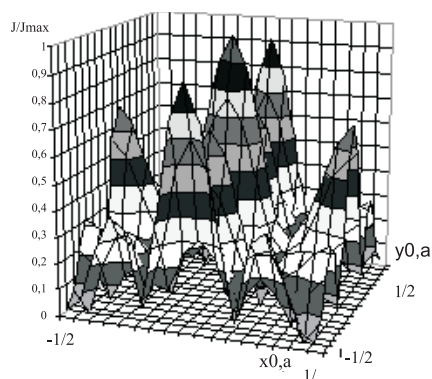


Рис. 8. Нормированное распределение тока на зеркале в форме параболического цилиндра

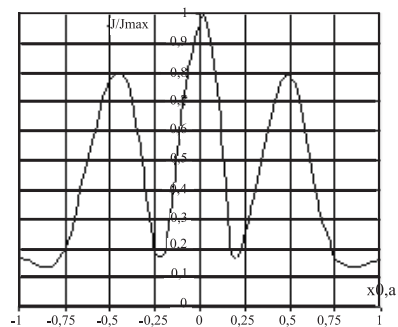


Рис. 9. Нормированное распределение тока на плоском экране

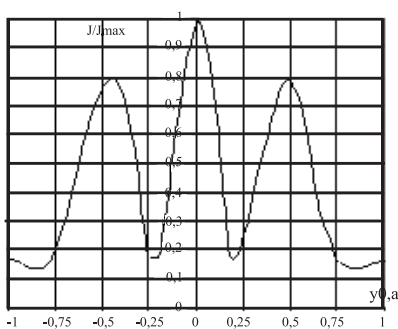


Рис. 10. Нормированное распределение тока на зеркале в форме параболического цилиндра

Расчет производился для зеркала в форме параболоида вращения, заданного уравнением $z = x^2 + y^2$, $x \in [-a; a]$, $y \in [-a; a]$, $a = 1$ м. В качестве источника выбран вертикальный ЭЭИ, который находится в точке $\vec{r}^s = \{0; 0; \frac{a}{4}\}$. Длина волны $\lambda = a$.

Выводы

Метод, разработанный в процессе данного исследования, отвечает следующим требованиям:

- алгоритм метода достаточно прост для программирования;
- поставленная задача решается за достаточно короткое время;
- результат вполне соответствует физическим представлениям о нем и пригоден для дальнейшего использования.

Авторами был разработан алгоритм по вычислению распределения тока на гладких поверхностях следующей формы: плоскость; параболический цилиндр; параболоид вращения. В алгоритме были учтены особенности каждой поверхности.

Изложенные подходы применимы для анализа структур, допускающих разделение переменных. В случае структур с более сложной геометрией, не обладающих осевой или центральной симметрией, целесообразно применение вейвлет-базисов.

Предполагается, что данные методики дадут основу для дальнейших исследований по решению двумерных задач дифракции.

Литература

- [1] Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1973. 607 с.
- [2] Poggio A.J., Miller E.K. Integral Equation Solutions of Three-Dimensional Scattering Problems // Computer Techniques for Electromagnetics / ed. by R. Mittra. New York: Pergamon Press, 1973. Chapt. IV. P. 125–132.
- [3] Блатов И.А. Об алгебрах операторов с псевдоразреженными матрицами и их приложениях // Сибирский мат. журнал. 1996. Т. 37. № 1. С. 36–59.
- [4] Harrington R.F. Field Computation by Moment Method. New York: Macmillan, 1968. 150 p.
- [5] Алашеева Е.А., Блатов И.А., Маслов М.Ю. Решение задачи рассеяния электромагнитного поля элемента электрического тока проводящим экраном конечных размеров // Инфокоммуникационные технологии. 2007. № 2. С. 8–14.
- [6] Алашеева Е.А. Анализ излучения двумерных идеально проводящих структур методом интегральных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Самара: ПГУТИ, 2009.

Поступила в редакцию 30/X/2009;
в окончательном варианте — 30/X/2009.

**SOLVING OF THE PROBLEM OF RADIATION OF THE
LINEAR STRUCTURE, LOCATED CLOSE TO THE
PERFECTLY CONDUCTING SCREEN, REDUCED TO
THE TWO-DIMENSIONAL SYSTEM OF FREDHOLM
EQUATIONS OF THE FIRST ORDER**

© 2010 E.A. Alasheeva,⁴ I.A. Blatov,⁵ M.Y. Maslov⁶

In this paper the mathematical models of two-dimensional perfectly conducting radiating structures on the basis of the device of the two-dimensional integrated equations, and also new algorithm of solving of two-dimensional integral equations to which outer electrodynamic problems for radiating structures are reduced, such as perfectly conducting flat screen, a mirror in the form of parabolic cylinder, a mirror in the form of paraboloid of revolution, excited by elementary electric and magnetic radiators.

Key words: two-dimensional problems of electrodynamics, integral equations, Galerkin method.

Paper received 30/X/2009.

Paper accepted 30/X/2009.

⁴Alasheeva Elena Alexandrovna (alashheeva@mail.ru), Dept. of Higher Mathematics, Povolshskaya State Academy of Telecommunications and Computer Science, Samara, 443090, Russia.

⁵Blatov Igor Anatolievich (blatow@mail.ru), Dept. of Differential Equations and Theories of Control, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

⁶Maslov Michael Yurievich (mike@psati.ru), Dept. of Higher Mathematics, Povolshskaya State Academy of Telecommunications and Computer Science, Samara, 443090, Russia.