УДК 519.512

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ФУРЬЕ — ХААРА

© 2010 Р.Ж. Галимьянов, Р.Ф. Узбеков[1]

Рассмотрен вопрос об ограниченности мультипликаторов Фурье — Хаара, определяемых последовательностями: $\lambda_{k,i} = (-1)^k$, при $i = 1$ и 1, при $i \neq 1$, $1 \leqslant i \leqslant 2^k$, $k \in \mathbb{N}$; $\lambda_{k,i} = \pm 1$, если $i = m$ и 1, если $i \neq m$, $m \in \mathbb{N}$.

Найдены эквивалентные условия тому, что система Хаара образует безусловный базис в сепарабельном симметричном пространстве.

Ключевые слова: система Хаара, симметричное пространство, мультипликаторы, безусловный базис, ряд Фурье — Хаара.

Введение

Двоичным интервалом называется интервал вида $\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$, а левую и правую половины интервала Δ_n будем обозначать соответственно

$$\Delta_n^+ = (\Delta_k^i)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i-1/2}{2^k}\right), \Delta_n^- = (\Delta_k^i)^- = \left(\frac{i-1/2}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right),$$

где $n = 2^k + i,\ 1 \leqslant i \leqslant 2^k;\ k = 0, 1, \ldots$

Система Хаара — это система функций $\chi_1(x) \equiv 1$,

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in \Delta_n^+, \\ -1 & \text{для } x \in \Delta_n^-, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Формула $n = 2^k + i$ дает взаимно однозначное соответствие между множеством индексов $\Omega = \{(k, i) : \ k = 0, 1, \ldots, i = 1, \ldots 2^k\}$, отвечающих функциям Хаара, и множеством натуральных чисел. Поэтому определять функции Хаара можно с помощью одного индекса $\{\chi_n\}$. Группа функций $\{\chi_n(x)\}_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}$ называется k-й пачкой, причем $\chi_n(x) = \chi_k^i(x)$. Тогда система Хаара состоит из объединения пачек $\left\{\chi_k^i(x)\right\}_{i=1}^{2^k}, k{=}0, 1, \ldots$ и функции $\chi_0^0(x) \equiv 1$.

[1]Галимьянов Раиль Жавдатович (rail_170@mail.ru), Узбеков Роман Фатихович (uzbekov_roman@mail.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Рядом Фурье — Хаара функции $f(x)\in L_1[0,1]$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\chi_n(x),$$

где $c_n(f) = c_n(f, \chi_n)$ — коэффициенты Фурье — Хаара функции $f(x)$, которые вычисляются по следующим формулам:

$$c_1(f) = \int_0^1 f(x)dx, \quad c_n(f) = 2^k \left(\int_{\Delta_n^+} f(x)dx - \int_{\Delta_n^-} f(x)dx \right).$$

Всякая последовательность $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ порождает линейный оператор Λ, называемый мультипликатором, который на полиномах по системе Хаара определяется следующим образом:

$$\Lambda \left(\sum_n c_n \chi_n \right) = \sum_n \lambda_n c_n \chi_n.$$

Согласно [2, с. 84], мультипликатор Λ ограниченно действует в пространстве $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, причем $\|\Lambda\|_{L_p} = \|\lambda\|_{l_\infty}$. Откуда следует, что система Хаара образует безусловный базис в данном пространстве.

Целью настоящей работы является исследование ограниченности мультипликаторов Фурье — Хаара, действующих в парах функциональных пространств. Подобные вопросы изучались в работах [2–4].

1. Определения, обозначения, вспомогательные утверждения

Определение 1. Функциональное банахово пространство E на $(0,1)$ с мерой Лебега называется симметричным (перестановочно-инвариантным) (СП), если:

1) из того, что $y \in E$ и $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ почти всюду на $(0,1)$, вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$;

2) из того, что $y \in E$ и функция $|x(t)|$ равноизмерима с функцией $|y(t)|$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что СП E является сепарабельным или сопряженным к сепарабельному пространству.

Определение 2. Для любой измеримой по Лебегу почти всюду конечной функции $x(t)$ на $(0,1)$ определен оператор растяжения по следующей формуле:

$$\sigma_\tau x(t) = x\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (\tau > 0), \text{ если } \tau^{-1}t \in (0,1).$$

Оператор σ_τ коммутирует с операцией перестановки $(\sigma_\tau x)^*(t) = \sigma_\tau(x^*)(t) = x^*(\tau^{-1}t)$ и ограниченно действуют в любом СП E, причем $\|\sigma_\tau\|_E \leqslant \max\{1, \tau\}$.

Определение 3. Нижний и верхний индексы Бойда пространства E задаются соответственно равенствами [1, с. 138]

$$\alpha_E = \lim_{\tau\to 0} \frac{\ln\|\sigma_\tau\|_E}{\ln\tau}, \quad \beta_E = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln\|\sigma_\tau\|_E}{\ln\tau}.$$

Всегда справедливо неравенство: $0 \leqslant \alpha_E \leqslant \beta_E \leqslant 1$.

Если E — СП, тогда через E' будем обозначать множество измеримых на $[0,1]$ функций с нормой $\|x\|_{E'} = \sup\limits_{\|z\|_E\leqslant 1} \int\limits_0^1 x(t)z(t)dt < \infty$. Если E — сепарабельное СП, то E' совпадает с сопряженным пространством E^*, и их нормы равны. Все определения, перечисленные выше, можно найти в [1, гл. 2].

Система функций Хаара $\{2^{\frac{k}{2}}\chi_k^i(x)\}_{k=1}^\infty$ является ортонормированной системой (ОНС) в $L_2[0,1]$ и образует базис в пространстве $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$ [2]. Если E — сепарабельное СП, то множество полиномов по системе Хаара плотно в E.

Определение 4. Базис $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ банахова пространства X называется безусловным, если для любой перестановки натурального ряда $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^\infty$ система $\{x_{\sigma(n)}\}_{n=1}^\infty$ также является базисом в X.

Пусть $(k,i) \in \Omega$, последовательность вложенных друг в друга двоичных интервалов $\Delta_0^1 \supset \Delta_1^{i_1} \supset \ldots \supset \Delta_k^{i_k}$ называется цепью. Множество цепей обозначим через A. Каждой цепи $K = (1, i_1, \ldots, i_k)$ поставим в соответствие число

$$V(K,\lambda) = \sum_{m=1}^{k} |\lambda_{m,i_m} - \lambda_{m-1,i_{m-1}}|,$$

которое естественно называть вариацией λ по цепи K. Введем на пространстве последовательностей $\lambda = \{\lambda_{k,i} : (k,i) \in \Omega\}$ полунорму

$$\|\lambda\|_W = \sup_{K\in A} V(K,\lambda) = \sup_{K\in A, k\in\mathbf{N}} \sum_{m=1}^{k} |\lambda_{m,i_m} - \lambda_{m-1,i_{m-1}}|,$$

и множество тех λ, для которых $\|\lambda\|_W < \infty$, будем обозначать через W.

Теорема 1 [5, т. 2.1]. Для ограниченности мультипликатора Λ в пространстве L_1 необходимо и достаточно, чтобы $\|\lambda\|_W<\infty$. Более того, норма $\|\Lambda\|_{L_1}$ эквивалентна $\|\lambda\|_W + \sup\limits_{(k,i)\in\Omega} |\lambda_{k,i}|$.

Следствие 1 [5, сл. 2.2]. Для того чтобы мультипликатор Λ был ограничен в любом сепарабельном симметричном пространстве E, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda \in W$.

2. Основной результат

Обозначим через M множество мультипликаторов Λ, определяемых коэффициентами $\lambda_n = \pm 1$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим мультипликатор Λ_1, порожденный последовательностью

$$\lambda_{k,i} = \begin{cases} (-1)^k & \text{для } i = 1, \\ 1 & \text{для } i \neq 1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Теорема 2. Если E — сепарабельное симметричное пространство, тогда следующие условия эквивалентны:

1) мультипликатор Λ_1 ограничен в E,

2) семейство мультипликаторов $\Lambda(\Lambda \in M)$ равномерно ограничено в E,

3) $0 < \alpha_E \leqslant \beta_E < 1$.

Доказательство. Импликация 2)⇒1) верна в силу того, что мультипликатор Λ_1 является одним из семейства M.

Проверим теперь эквивалентность условий 2) и 3). Действительно, условие 2) равносильно тому, что система Хаара является безусловным базисом в пространстве E. В свою очередь, ее безусловная базисность эквивалентна условию 3) [1].

Остается доказать условие 1)⇒3). Покажем, что ограниченность мультипликатора Λ_1 влечет ограниченность оператора Харди — Литтльвуда H_1 и сопряженного к нему оператора H_2:

$$H_1 x(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t x(s)ds, \qquad H_2 x(t) = \int\limits_t^1 \frac{x(s)}{s}ds.$$

Рассмотрим функцию

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \chi_n^1(t) = -x_0 X_{(\frac{1}{2},1)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-x_n + \sum_{k=0}^{n-1} x_k\right) X_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)}(t). \quad (1)$$

Если $x_{2n} = -x_{2n+1} > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то

$$-x_n + \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \begin{cases} -2x_{2j-1}, & n = 2j-1, \\ -x_{2j}, & n = 2j. \end{cases} \quad (2)$$

Поэтому

$$\Lambda_1 x(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_n \chi_n^1(t) = -x_0 * X_{(\frac{1}{2},1)}(t) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}x_n + \sum_{k=0}^{n-1}|x_k|\right) X_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)}(t).$$

Рассмотрим функцию

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| X_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)}(t).$$

Так как

$$|x(t)| = |x_0| * X_{(\frac{1}{2},1)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)}(t), \text{ где } c_n = \begin{cases} 2|x_n|, & n = 2k+1, \\ |x_n|, & n = 2k, \end{cases}$$

поэтому

$$|x| \leqslant 2|y|. \tag{3}$$

Имеем

$$(H_2 y)\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \int\limits_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{1} \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| X_{\left(\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}\right)}(t)\frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{n} |x_k| \int\limits_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} \frac{dt}{t} = \ln 2 \sum_{k=0}^{n} |x_k|$$

и, учитывая, что $H_2 y(t)$ — убывающая функция, получаем

$$H_2 y(t) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} H_2 y\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) X_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)}(t) = \ln 2 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|\right) X_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)}(t).$$

Покажем выполнение неравенства

$$\frac{1}{\ln 2} H_2 y(t) \leqslant |\sigma_4 \Lambda_1 x(t)| + |\sigma_8 \Lambda_1 x(t)|. \tag{4}$$

Непосредственно проведя необходимые вычисления, получим: $\sigma_2 X_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)}(t) = X_{\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right)}(t)$,

$$\sigma_4 \Lambda_1 x(t) = (-|x_2|+|x_1|+|x_2|) X_{\left(\frac{1}{2},1\right)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-|x_{n+2}| + \sum_{k=0}^{n+1} |x_k|\right) X_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)}(t),$$

$$\sigma_8 \Lambda_1 x(t) = (-|x_3| + \sum_{k=0}^{2} |x_k|) X_{\left(\frac{1}{2},1\right)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-|x_{n+3}| + \sum_{k=0}^{n+2} |x_k|\right) X_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)}(t).$$

Пусть теперь $t \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$, если $n = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, тогда

$$\sigma_8 \Lambda_1 x(t) = -|x_{2l+3}| + |x_{2l+2}| + \sum_{k=0}^{2l+1} |x_k| \text{ и, следовательно, } \sum_{k=0}^{n} |x_k| \leqslant |\sigma_8 \Lambda_1 x(t)|.$$

Если же $n = 2l+1$, $l \in \mathbb{N}$, то $\sigma_4 \Lambda_1 x(t) = \sum\limits_{k=0}^{2l+1} |x_k|$, и поэтому, $\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k| \leqslant$ $\leqslant |\sigma_4 \Lambda_1 x(t)|$. Тем самым доказано неравенство (4).

В силу ограниченности оператора растяжения в СП E и неравенства (3) имеем

$$\begin{aligned} \|H_2 y\|_E &\leqslant \ln 2 \Big\| |\sigma_4 \Lambda_1 x(t)| + |\sigma_8 \Lambda_1 x(t)| \Big\|_E \leqslant \\ &\leqslant 12 \ln 2 \|\Lambda_1 x\|_E \leqslant 24 \ln 2 \|\Lambda_1\|_E \|y\|_E. \end{aligned} \tag{5}$$

По свойству перестановок [1, разд. 2.2.12] для функции $u(t)$ получаем

$$H_1 u(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t u(s)ds \leqslant \frac{1}{t}\int\limits_0^t u^*(s)ds = H_1 u^*(t).$$

Оператор H_1 является положительным, следовательно, его норма достигается на множестве неотрицательных невозрастающих функций. То же утверждение верно и для оператора H_2.

Пусть теперь $u(s) = u^*(s) \in E$, $a > 1$. Тогда для функции

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u\left(\frac{1}{a^k}\right) X_{\left(\frac{1}{a^{k+1}},\frac{1}{a^k}\right)}(t)$$

выполняются неравенства $v(t) \leqslant u(t) \leqslant \sigma_a v(t)$. Откуда следует, что $\|v\|_E \leqslant$ $\leqslant \|u\|_E \leqslant a\|v\|_E$. В силу предыдущих рассуждений получаем

$$H_2u(t) = \int\limits_t^1 \frac{u(s)}{s}ds \leqslant \int\limits_t^1 \frac{\sigma_a v(s)}{s}ds = \int\limits_{\frac{t}{a}}^{\frac{1}{a}} \frac{v(y)}{y}dy \leqslant \int\limits_{\frac{t}{a}}^{1} \frac{v(y)}{y}dy =$$

$$= \sigma_a\left(\int\limits_t^1 \frac{v(y)}{y}dy\right) = \sigma_a(H_2 v(t)).$$

Поэтому

$$\|H_2\|_E = \sup_{\|u\|\leqslant 1} \|H_2 u\|_E \leqslant \sup_{v\in E,\ \|v\|\leqslant 1} \|\sigma_a H_2 v\|_E \leqslant a \sup_{v\in E,\ \|v\|\leqslant 1} \|H_2 v\|_E.$$

Применяя условие (5) и предыдущее неравенство со значением $a = 2$, имеем

$$\|H_2\|_E \leqslant 2 \sup_{\|v\|\leqslant 1} \|H_2 v\|_E \leqslant 48 \ln 2 \|\Lambda_1\|_E.$$

Итак, оператор H_2 ограничен в пространстве E. Поскольку мультипликатор Λ_1 является самосопряженным оператором в L_2 и из ограниченности Λ_1 в E следует его ограниченность в E', то в силу [4, формула (4)] $\|\Lambda_1\|_E = \|\Lambda_1\|_{E'}$, а значит, оператор H_2 ограничен в ассоциированном пространстве E'. Тогда оператор H_1 как сопряженный к H_2 ограничен в пространстве E.

Ограниченность операторов H_1 и H_2 в симметричном пространстве E, согласно [1], влечет выполнение условия 3). Теорема 2 доказана.

Таким образом, ограниченность мультипликатора Λ_1 в сепарабельном СП эквивалентна тому, что система Хаара образует в этом пространстве безусловный базис.

Рассмотрим следующее семейство мультипликаторов Λ_m, определяемых последовательностью:

$$\lambda_{k,i} = \begin{cases} \varepsilon_k = \pm 1, & i = m, \\ 1, & i \neq m, \ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Теорема 3. Мультипликатор Λ_m при $m \geqslant 2$, $m \in \mathbb{N}$ ограничен в любом сепарабельном симметричном пространстве.

Доказательство. Проверим, принадлежит ли последовательность $\lambda_{n,k}$ пространству W. Для этого найдем полунорму $\|\lambda\|_W$:

$$\|\lambda\|_W = \sup_{K\in A, n\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{n} |\lambda_{l,k_l} - \lambda_{l-1,k_{l-1}}| =$$

$$= \sup_{K\in A, n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k_l\neq m} |\lambda_{l,k_l} - \lambda_{l-1,k_{l-1}}| + \sum_{k_l=m} |\lambda_{l,k_l} - \lambda_{l-1,k_{l-1}}| \right).$$

В последнем выражении вторая сумма состоит из одного слагаемого. Действительно, при фиксированном $m (m \geqslant 2)$ носители функций $\chi_n^m(t)$ не пересекаются,

$$supp\ \chi_n^m(t) = \Delta_n^m = \left(\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right) = \left(\frac{2m-2}{2^{n+1}}, \frac{2m}{2^{n+1}}\right),$$

$$supp\ \chi_{n+1}^m(t) = \left(\frac{m-1}{2^{n+1}}, \frac{m}{2^{n+1}}\right).$$

Тогда в произвольной цепи K вложенных диадических интервалов

$$\Delta_1^{k_1} \supset \ldots \supset \Delta_l^{k_l} \supset \ldots \supset \Delta_n^{k_n}$$

найдется не более одного интервала с $k_l = m$. Следовательно,

$$\|\lambda\|_W = \sup_{K\in A, n\in\mathbb{N}} (|1-\varepsilon_n| + |\varepsilon_n - 1|) = 4 < \infty.$$

Согласно следствию 1, мультипликатор Λ_m ограничен в любом сепарабельном симметричном пространстве.

Литература

[1] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

[2] Кашин Б.С., Саакян А.Л. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.

[3] Novikov I., Semenov E. Haar series and linear operators. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.

[4] Брыскин И.Б., Лелонд О.В., Семенов Е.М. Мультипликаторы рядов Фурье — Хаара // Сиб. мат. журнал. 2000. Т. 41. № 4. С. 758–766.

[5] Уксусов С.Н. Мультипликаторы Фурье — Хаара в симметричных пространствах: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2006.

Поступила в редакцию 26/*XI*/2009;
в окончательном варианте — 26/*XI*/2009.

ABOUT THE BOUNDEDNESS OF THE FOURIER — HAAR MULTIPLICATORS

 R.Zh. Galimyanov, R.F. Uzbekov[2]

The boundedness of the Fourier — Haar multiplicators defined by the sequence $\lambda_{k,i} = \varepsilon_k = \pm 1$, $i = m$ and $\lambda_{k,i} = 1$, if $i \neq m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$ is considered.

The equivalent conditions to the unconditional basis of the Haar system are received.

Key words: Haar system, rearrangement invariant space, multiplicators, absolute basis, series of the Fourier — Haar.

Paper received 26/*XI*/2009.
Paper accepted 26/*XI*/2009.

[2]Galimyanov Rail Ghavdatovich (`rail_170@mail.ru`), Uzbekov Roman Fatikhovich (`uzbekov_roman@mail.ru`), Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia.