УДК 519.213, 517.936

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА ДЛЯ УСЛОВНЫХ КВАНТИЛЕЙ МНОГОМЕРНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

© 2010 И.С. Орлова[1], С.Я. Шатских[2]

Работа посвящена изучению дифференциальных уравнений Пфаффа, которые строятся на основе двумерных условных квантилей. Однако для многомерных вероятностных распределений, обладающих свойством воспроизводимости условных квантилей, решениями этих уравнений являются условные квантили значительно более высоких размерностей. Это обстоятельство позволяет (для распределений указанного класса) существенным образом сократить объем наблюдений, необходимый для построения статистических оценок многомерных условных медиан и условных квантилей.

Ключевые слова: многомерные вероятностные распределения, воспроизводимость условных квантилей, вполне интегрируемые дифференциальные уравнения Пфаффа.

1. Определение условных медиан и квантилей

В последние десятилетия условные квантили и условные медианы находят все более широкое применение в теории вероятностей и математической статистике. В частности, это связано с появлением новых статистических моделей, в которых ошибки наблюдений имеют негауссовские распределения с "тяжелыми хвостами" (см., например [1–3]). Для таких моделей предположение о существовании моментов функций распределения уже не является справедливым. Поэтому в статистической теории регрессии развивается "безмоментный" подход, в рамках которого условные квантили как функции "объясняющих факторов" используются вместо условных математических ожиданий. В настоящей работе мы изучаем свойства некоторых видов дифференциальных уравнений Пфаффа, решениями которых являются условные медианы и квантили.

[1]Орлова Ирина Сергеевна (dior3000@gmail.com), Самарский международный аэрокосмический лицей при СГАУ, 443086, Россия, г. Самара, ул. Лукачева, 45.

[2]Шатских Сергей Яковлевич (shatskih@ssu.samara.ru) кафедра теории вероятностей и математической статистики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Рассмотрим систему случайных величин

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

с условной функцией распределения[3]

$$\mathbb{P}\{X_i \leqslant x_i | X_1 = x_1, \ldots, \widehat{X_i = x_i}, \ldots, X_n = x_n\} = F_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_i | x_1, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_n),$$

которую будем считать непрерывной, строго монотонно возрастающей функцией по аргументу x_i при любом фиксированном векторе $(x_1, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Условная квантиль $q^{(p)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_1, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_n)$ уровня $p \in [0,1]$ случайной величины X_i по случайным величинам $X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_n$ определяется с помощью равенства

$$F_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(q^{(p)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_1, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_n) |\, x_1, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_n) \equiv p$$

для любого $(x_1, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Условной медианой $m_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_1, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_n)$ случайной величины X_i по случайным величинам $X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_n$ называется условная квантиль уровня $p = \frac{1}{2}$

$$m_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_1, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_n) \equiv q^{(1/2)}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_1, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_n),$$

$$F_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(m_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_1, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_n) |\, x_1, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_n) \equiv \frac{1}{2}$$

для любого $(x_1, \ldots \widehat{x}_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Условные квантили как поверхности постоянного уровня условного распределения вероятностей можно задавать указанием "отмеченной" точки $\boldsymbol{x}^\circ = (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \in \mathbb{R}^n$, через которую проходит график этой условной квантили:

$$F_{1|\,2\ldots n}\left(q^{(\boldsymbol{x}^\circ)}_{1|2\ldots n}(x_2, \ldots, x_n) |\, x_2, \ldots, x_n\right) \equiv F_{1|\,2\ldots n}(x_1^\circ |\, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ).$$

В этом случае уровень условной квантили $p = F_{1|\,2\ldots n}(x_1^\circ |\, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$.

Заметим, что для некоторых видов эллиптически контурированных и, в частности, для гауссовских многомерных распределений условные медианы совпадают с условными математическими ожиданиями (см. [3]).

[3]Знак $\hat{\ }$ над элементом $\cdot$ означает пропуск этого элемента.

2. Многомерные распределения вероятностей, обладающие свойством воспроизводимости условных квантилей. Вполне интегрируемые дифференциальные уравнения Пфаффа для "больших" условных квантилей

Рассмотрим случайный вектор $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ с распределением вероятностей $F_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n)$, строго положительной плотностью

$$f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n) > 0, \quad \text{для всех} \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

и условными распределениями

$$\mathbb{P}\{X_1 \leqslant x_1 |\, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = F_{1|2\dots n}(x_1|x_2, \dots, x_n),$$
$$\mathbb{P}\{X_i \leqslant x_i | X_j = x_j\} = F_{i|j}(x_i|x_j), \ \ i \neq j, \ \ i, j = \overline{1, n}.$$

Выбирая отмеченную точку $\boldsymbol{x}^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ) \in \mathbb{R}^n$, введем семейство условных квантилей, рассматривая их графики как поверхности или кривые постоянного уровня, определяемые точкой $\boldsymbol{x}^\circ{=}(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)$:

$$F_{1|\,2\dots n}\left(q_{1|2\dots n}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_2, \dots, x_n)|\, x_2, \dots, x_n\right) \equiv F_{1|\,2\dots n}(x_1^\circ|\, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ),$$
$$q_{1|2\dots n}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(\, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ) = x_1^\circ,$$
$$F_{i|\,j}\left(q_{i|j}^{(x_i^\circ,\, x_j^\circ)}(x_j)|\, x_j\right) \equiv F_{i|\,j}(x_i^\circ|\, x_j^\circ), \quad q_{i|j}^{(x_i^\circ,\, x_j^\circ)}(x_j^\circ) = x_i^\circ, \, i \neq j.$$

Замечание. Рассматривая условную квантиль $q_{i|j}^{(\alpha,\, \beta)}(x)$, мы всегда предполагаем, что

$$x = x_j, \ \ \alpha = x_i^\circ, \ \ \beta = x_j^\circ.$$

Определение. *Будем говорить, что для многомерного распределения вероятностей $F_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n)$ выполняется свойство воспроизводимости условных квантилей, если система тождеств*

$$\begin{array}{c} q_{1|2\dots n}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}\left(x_2, q_{3|2}^{(x_3^\circ,\, x_2^\circ)}(x_2), \dots, q_{n|2}^{(x_n^\circ,\, x_2^\circ)}(x_2)\right) \equiv q_{1|2}^{(x_1^\circ,\, x_2^\circ)}(x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{1|2\dots n}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}\left(q_{2|n}^{(x_2^\circ,\, x_n^\circ)}(x_n), \dots, q_{n-1|n}^{(x_{n-1}^\circ,\, x_n^\circ)}(x_n), \, x_n\right) \equiv q_{1|n}^{(x_1^\circ,\, x_n^\circ)}(x_n) \end{array} \tag{1}$$

имеет место для любой отмеченной точки $\boldsymbol{x}^\circ{=}(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ) \in \mathbb{R}^n$.

Геометрически свойство воспроизводимости условных квантилей (1) означает, что кривые, параметризованные "малыми" условными квантилями

$$\gamma_k(\boldsymbol{x}^\circ, t) = \{q_{1|k}^{(x_1^\circ, x_k^\circ)}(t), \dots, q_{k-1|k}^{(x_{k-1}^\circ, x_k^\circ)}(t), t, q_{k+1|k}^{(x_{k+1}^\circ, x_k^\circ)}(t), \dots, q_{n|k}^{(x_n^\circ, x_k^\circ)}(t)\}, \ k = \overline{2, n},$$

лежат на графике "большой" условной квантили:

$$\Gamma^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_2, \dots, x_n) = \{q_{1|2\dots n}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n\}.$$

Обозначая через $\mathbf{e}_i$ базисные орты пространства $\mathbb{R}^n$, введем определитель

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}^\circ) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \dots & \mathbf{e}_{n-1} & \mathbf{e}_n \\ \dot{q}_{1|2}^{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ) & 1 & \dot{q}_{3|2}^{(x_3^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ) & \dots & \dot{q}_{n-1|2}^{(x_{n-1}^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ) & \dot{q}_{n|2}^{(x_n^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{q}_{1|n}^{(x_1^\circ,x_n^\circ)}(x_n^\circ) & \dot{q}_{2|n}^{(x_2^\circ,x_n^\circ)}(x_n^\circ) & \dot{q}_{3|n}^{(x_3^\circ,x_n^\circ)}(x_n^\circ) & \dots & \dot{q}_{n-1|n}^{(x_{n-1}^\circ,x_n^\circ)}(x_n^\circ) & 1 \end{vmatrix},$$

для которого запишем разложение по элементам первой строки

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{x}^\circ) = \sum_{k=1}^{n} A_{1k}(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)\,\mathbf{e}_k,$$

здесь A_{1k} — алгебраическое дополнение орта $\mathbf{e}_k$, а точкой "над" обозначено дифференцирование условной квантили по соотвествующей переменной x_j в точке x_j°.

Заменяя отмеченную точку $\boldsymbol{x}^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)$ произвольной точкой $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, введем дифференциальную 1-форму

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} A_{1k}(x_1, \dots, x_n)dx_k, \tag{2}$$

для которой запишем дифференциальное уравнение Пфаффа (см. [10]):

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} A_{1k}(x_1, \dots, x_n)dx_k = 0.$$

Теорема 1. *Если распределение вероятностей $F_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n)$ с положительной на $\mathbb{R}^n$ совместной плотностью обладает свойством воспроизводимости условных квантилей (1), а коэффициент $A_{11}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, то дифференциальное уравнение Пфаффа*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} A_{1i}(x_1, \dots, x_n)dx_i = 0 \tag{3}$$

вполне интегрируемо. Решением уравнения (3), проходящим через отмеченную точку $\boldsymbol{x}^\circ$, является "большая" условная квантиль $x_1 = q_{1|2\dots n}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_2, \dots, x_n)$.

Доказательство. Рассмотрим "большую" условную квантиль

$$x_1 = q_{1|2\dots n}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_2, \dots, x_n),$$

проходящую через отмеченную точку $\boldsymbol{x}^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ) \in \mathbb{R}^n$:

$$F_{1|\,2\dots n}\left(q_{1|2\dots n}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_2, \dots, x_n)|\, x_2, \dots, x_n\right) \equiv F_{1|\,2\dots n}(x_1^\circ|\, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ).$$

Используя свойство воспроизводимости условных квантилей, будем иметь

$$F_{1|\,2\dots n}\left(q_{1|2}^{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_2)|\, x_2, q_{3|2}^{(x_2^\circ,x_3^\circ)}(x_2), \dots, q_{n|2}^{(x_2^\circ,x_n^\circ)}(x_2)\right) \equiv F_{1|\,2\dots n}(x_1^\circ|\, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (4)$$

$$F_{1|\,2\,\dots\,n}\left(q_{1|n}^{(x_1^\circ,x_n^\circ)}(x_n)|q_{2|n}^{(x_2^\circ,x_n^\circ)}(x_n),\dots,q_{n-1|n}^{(x_{n-1}^\circ,x_n^\circ)}(x_n),\,x_n\right)\equiv F_{1|\,2\dots n}(x_1^\circ|\,x_2^\circ,\dots,x_n^\circ).$$

Считая функцию $y=F_{1|\,2\dots n}(x_1|x_2,\dots,x_n)$ дифференцируемой достаточное число раз по всем аргументам, продифференцируем первое тождество системы (4) по x_2 в точке x_2°, второе тождество по x_3 в точке x_3° и так далее, последнее тождество по x_n в точке x_n° :

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}\,\dot q_{1|2}^{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ)+\frac{\partial y}{\partial x_2}+\frac{\partial y}{\partial x_3}\,\dot q_{3|2}^{(x_2^\circ,x_3^\circ)}(x_2^\circ)+\dots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\,\dot q_{n|2}^{(x_n^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ)\equiv 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (5)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}\,\dot q_{1|n}^{(x_1^\circ,x_n^\circ)}(x_n^\circ)+\frac{\partial y}{\partial x_2}\,\dot q_{2|n}^{(x_2^\circ,x_n^\circ)}(x_n^\circ)+\dots+\frac{\partial y}{\partial x_{n-1}}\,\dot q_{n-1|n}^{(x_{n-1}^\circ,x_n^\circ)}(x_n^\circ)+\frac{\partial y}{\partial x_n}\equiv 0.$$

Преобразуем систему (5) к виду

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}+\frac{\partial y}{\partial x_3}\,\dot q_{3|2}^{(x_2^\circ,x_3^\circ)}(x_2^\circ)+\dots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\,\dot q_{n|2}^{(x_n^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ)\equiv-\frac{\partial y}{\partial x_1}\,\dot q_{1|2}^{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}\,\dot q_{2|n}^{(x_2^\circ,x_n^\circ)}(x_n^\circ)+\dots+\frac{\partial y}{\partial x_{n-1}}\,\dot q_{n-1|n}^{(x_{n-1}^\circ,x_n^\circ)}(x_n^\circ)+\frac{\partial y}{\partial x_n}\equiv-\frac{\partial y}{\partial x_1}\,\dot q_{1|n}^{(x_1^\circ,x_n^\circ)}(x_n^\circ).$$

Определитель этой системы, состоящий из коэффициентов при частных производных $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ (для $i=\overline{2,n}$), равен $A_{11}(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ)$. Будем считать, что[4]

$$A_{11}(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ)\neq 0, \qquad (6)$$

тогда с помощью правил Крамера можно получить соотношения между частными производными условной функции распределения

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=\frac{\partial F_{1|\,2\dots n}(x_1|x_2,\dots,x_n)}{\partial x_i}$$

в точке $\boldsymbol{x}^\circ=(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ)$:

$$\left.\frac{\partial F_{1|\,2\dots n}(x_1|x_2,\dots,x_n)}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}^\circ}=\left.\frac{\partial F_{1|\,2\dots n}(x_1|x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}^\circ}\cdot\frac{A_{1i}(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ)}{A_{11}(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ)},$$

где $i=\overline{2,n}$. Эти равенства означают, что для уравнения Пфаффа (3) функция

$$\mu=\left.\frac{\partial F_{1|\,2\dots n}(x_1|x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}^\circ}\cdot\frac{1}{A_{11}(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ)}$$

является интегрирующим множителем

$$\left.\frac{\partial F_{1|\,2\dots n}(x_1|x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}^\circ}\cdot\frac{1}{A_{11}(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ)}\cdot\omega=\left.dF_{1|\,2\dots n}(x_1|x_2,\dots,x_n)\right|_{\boldsymbol{x}^\circ}.$$

[4] В случае, когда $A_{11}(x_1^\circ,\dots,x_n^\circ)=0$, следует воспользоваться теоремой Дарбу, см. § 3.

Ясно, что это равенство будет выполняться, если вместо точки $\boldsymbol{x}^\circ$ мы возьмем произвольную точку $\boldsymbol{x}$, лежащую на "большой" условной квантили

$$x_1 = q_{1|2\ldots n}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_2, \ldots, x_n).$$

Таким образом, решением уравнения Пфаффа (3), проходящим через точку $\boldsymbol{x}^\circ$, является "большая" условная квантиль

$$F_{1|\,2\ldots n}(x_1|x_2, \ldots, x_n) = F_{1|\,2\ldots n}(x_1^\circ|\,x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ).$$

Теорема доказана.

Хорошо известно (теорема Фробениуса (см. [4, с. 302]), что необходимым и достаточным условием полной интегрируемости уравнения Пфаффа

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} A_{1i}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i = 0$$

является равенство

$$d\omega \wedge \omega = 0, \tag{7}$$

здесь $\wedge-$ внешнее произведение, а $d\omega-$ внешний дифференциал 1-формы ω. При $n = 3$ соотношение (7) принимает следующий вид: векторное поле

$$\boldsymbol{F}\,(x_1, x_2, x_3) = \{A_{11}(x_1, x_2, x_3), A_{12}(x_1, x_2, x_3), A_{13}(x_1, x_2, x_3)\}$$

ортогонально своему ротору

$$\langle\, \boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3),\ \boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3),\, \rangle \equiv 0. \tag{8}$$

В работе [10] на примере распределения Гумбела попарно независимых, но зависимых в совокупности случайных величин, показано, что условие (8) не является достаточным для воспроизводимости условных квантилей. Для распределения Гумбела имеет место равенство (8), однако свойство воспроизводимости условных квантилей не выполняется.

Приведем несколько простых примеров решения уравнений Пфаффа для распределений вероятностей, обладающих свойством воспроизводимости условных квантилей. Интегрирование этих уравнений проводилось с помощью известных элементарных методов (см., например [12]).

2.1. Многомерное гауссовское распределение

Рассмотрим гауссовский случайный вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ с невырожденной плотностью (см. [8, с. 177; 9, с. 105])

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det[\sigma_{ij}]}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)\right],$$

где $(m_1, \ldots, m_n)$ — вектор математических ожиданий, $[\sigma_{ij}] = [cov(X_i - m_i)(X_j - m_j)]$ — ковариационная матрица, $[\sigma^{ij}]$ — матрица, обратная ковариационной: $[\sigma^{ij}] = [\sigma_{ij}]^{-1}$.

Двумерные условные квантили:

$$x_i = q_{i|j}^{(x_i^\circ, x_j^\circ)}(x_j) = x_i^\circ + \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{jj}}(x_j - x_j^\circ) \quad \text{и} \quad \dot{q}_{i|j}^{(x_i^\circ, x_j^\circ)}(x_j) \equiv \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{jj}}\,, \quad i \neq j.$$

Отсюда получаем выражение для определителя

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \dots & \mathbf{e}_{n-1} & \mathbf{e}_n \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} & \dots & \sigma_{(n-1)2} & \sigma_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \sigma_{3n} & \dots & \sigma_{(n-1)n} & \sigma_{nn} \end{vmatrix} \cdot \prod_{i=2}^{n} \sigma_{ii}^{-1}$$

и алгебраических дополнений

$$A_{1k} = \sigma^{1k} \det[\sigma_{ij}] \cdot \prod_{i=2}^{n} \sigma_{ii}^{-1}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Заметим, что

$$A_{11} = S_{2n} \cdot \det[\sigma_{ij}]_{i,j=\overline{2,n}} > 0$$

в силу критерия Сильвестра для положительно определенной ковариационной матрицы $[\sigma_{ij}]$.

Воспроизводимость условных квантилей многомерных невырожденных гауссовских распределений установлена в работе [11]. Уравнение Пфаффа гауссовского распределения принимает вид

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \sigma^{1k} dx_k = 0.$$

Ввиду постоянства коэффициентов, условие теоремы Фробениуса выполняется. Решение этого уравнения, проходящее через точку $\boldsymbol{x}^\circ$, имеет вид

$$x_1 = x_1^\circ - \sum_{k=2}^{n} \frac{\sigma^{1k}}{\sigma^{11}} (x_k - x_k^\circ).$$

Осталось заметить (см. [8, с. 184]), что

$$q_{1|2\dots n}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_2, \dots, x_n) = x_1^\circ - \sum_{k=2}^{n} \frac{\sigma^{1k}}{\sigma^{11}} (x_k - x_k^\circ).$$

2.2. Многомерное негауссовское распределение, у которого все двумерные распределения гауссовские

Рассмотрим тройку (X_1, X_2, X_3) случайных величин с плотностью

$$f_{123}(x_1, x_2, x_3) = g_{123}(x_1, x_2, x_3) + h(x_1)h(x_2)h(x_3),$$

где

$$g_{123}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\right],$$

$$h(x_i) = \frac{10\, x_i}{\sqrt{\pi}(1 + x_i^2)} \exp\left(-100\, x_i^2\right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда двумерные плотности

$$f_{ij}\,(x_i, x_j) = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi} \exp\left[-\frac{1}{8}(3x_i^2 + 2x_ix_j + 3x_j^2)\right], \; i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

будут совпадать с соответствующими двумерными плотностями трехмерного гауссовского распределения $g_{123}(x_1, x_2, x_3)$. Следовательно, распределения с плотностями $f_{123}(x_1, x_2, x_3)$ и $g_{123}(x_1, x_2, x_3)$ будут иметь одинаковые наборы двумерных условных квантилей. Поэтому для уравнения Пфаффа, построенного по двумерным квантилям распределения $f_{123}(x_1, x_2, x_3)$, будет выполняться условие полной интегрируемости (8), причем это уравнение будет иметь своим решением "большую" (линейную) квантиль гауссовского распределения $g_{123}(x_1, x_2, x_3)$, которая отлична от "большой" (нелинейной) квантили распределения $f_{123}(x_1, x_2, x_3)$. Заметим, что "большую" (линейную) квантиль гауссовского распределения $g_{123}(x_1, x_2, x_3)$ можно рассматривать в качестве линейной оценки (построенной на основе парных наблюдений) для "большой" (нелинейной) квантили распределения $f_{123}(x_1, x_2, x_3)$.

2.3. Многомерное распределение Коши

Ограничимся распределением Коши в $\mathbb{R}^3$ с плотностью (см. [9, с. 219])

$$f_{123}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\pi^2(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2}.$$

Условная функция распределения имеет вид

$$F_{1|23}(x_1|x_2, x_3) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\pi} B\left(\frac{1+x_3^2+x_2^2}{1+x_3^2+x_2^2+x_1^2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), & x_1 \geqslant 0, \\ \frac{1}{\pi} B\left(\frac{1+x_3^2+x_2^2}{1+x_3^2+x_2^2+x_1^2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), & x_1 \leqslant 0, \end{cases}$$

где $B(u, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ — бета-распределение.

Условные квантили и их производные:

$$q_{1|23}^{(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)}(x_2, x_3) = x_1^\circ \left[\frac{1 + x_2^2 + x_3^2}{1 + (x_2^\circ)^2 + (x_3^\circ)^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad q_{i|j}^{(x_i^\circ, x_j^\circ)}(x_j) = x_i^\circ \left[\frac{1 + x_j^2}{1 + (x_j^\circ)^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\dot{q}_{i|j}^{(x_i, x_j)}(x_j) = \frac{x_i x_j}{1 + x_j^2}, \quad i \neq j.$$

Условие воспроизводимости условных квантилей

$$q_{1|23}^{(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)}(q_{2|3}^{(x_2^\circ, x_3^\circ)}(x_3), x_3) \equiv q_{1|3}^{(x_1^\circ, x_3^\circ)}(x_3)$$

легко проверяется простой подстановкой. Вычисляя определитель $\mathbf{W}(\boldsymbol{x})$, получаем уравнение Пфаффа для распределения Коши

$$\omega = (1 + x_2^2 + x_3^2)dx_1 - x_1 x_2 dx_2 - x_1 x_3 dx_3 = 0. \tag{9}$$

Так как для векторного поля

$$\boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3) = \{1 + x_2^2 + x_3^2,\ -x_1 x_2,\ -x_1 x_3\}, \quad \langle \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F} \rangle = 0,$$

то уравнение (9) вполне интегрируемо. Используя известные элементарные методы решения уравнений Пфаффа, получим решение уравнения (9)

$$x_1 = x_1^\circ \left[\frac{1 + x_2^2 + x_3^2}{1 + (x_2^\circ)^2 + (x_3^\circ)^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

проходящее через точку $(x_1^\circ,\, x_2^\circ,\, x_3^\circ)$. Это решение совпадает с "большой" условной квантилью.

2.4. Многомерное логистическое распределение

Плотность распределения в $\mathbb{R}^3$ задается соотношением (см. [9, с. 551])

$$f_{123}\,(x_1,x_2,x_3)=\frac{6\,e^{-(x_1+x_2+x_3)}}{\Big(1+e^{-x_1}+e^{-x_2}+e^{-x_3}\Big)^4},\ \ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3.$$

Условные распределения, условные квантили и их производные:

$$F_{1|23}(x_1|x_2,x_3)=\left[\frac{e^{x_1}\left[e^{x_2}+e^{x_3}+e^{(x_2+x_3)}\right]}{e^{(x_2+x_3)}+e^{x_1}\left[e^{x_2}+e^{x_3}+e^{(x_2+x_3)}\right]}\right]^3,$$

$$F_{i|j}(x_i|x_j)=\left(\frac{1+e^{x_j}}{1+e^{x_j}+e^{x_j-x_i}}\right)^2,$$

$$q_{1|23}^{(x_1^\circ,x_2^\circ,x_3^\circ)}(x_2,x_3)=x_1^\circ+(x_2-x_2^\circ)+(x_3-x_3^\circ)-\ln\left[\frac{e^{x_2}+e^{x_3}(1+e^{x_2})}{e^{x_2^\circ}+e^{x_3^\circ}(1+e^{x_2^\circ})}\right],$$

$$q_{i|j}^{(x_i^\circ,x_j^\circ)}(x_j)=x_i^\circ+(x_j-x_j^\circ)-\ln\frac{1+e^{x_j}}{1+e^{x_j^\circ}},\qquad \dot q_{i|j}^{(x_i,x_j)}(x_j)=\frac{1}{1+e^{x_j}},\ \ i\neq j.$$

Условие воспроизводимости условных квантилей легко проверяется простой подстановкой. Вычисляя определитель $\mathbf{W}(\boldsymbol{x})$, получаем уравнение Пфаффа для многомерного логистического распределения

$$\omega=(e^{x_2}+e^{x_3}+e^{x_2+x_3})dx_1-e^{x_3}dx_2-e^{x_2}dx_3=0. \tag{10}$$

Так как для векторного поля

$$\boldsymbol{G}(x_1,x_2,x_3)=\{e^{x_2}+e^{x_3}+e^{x_2+x_3},\,-e^{x_3},\,-e^{x_2}\},\quad \langle \boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{G}\rangle=0,$$

то уравнение (10) вполне интегрируемо. Решение уравнения (10), проходящее через точку $(x_1^\circ,\, x_2^\circ,\, x_3^\circ)$, имеет вид

$$F_{1|23}(x_1|x_2,x_3)\equiv F_{1|23}(x_1^\circ|x_2^\circ,x_3^\circ).$$

Это решение совпадает с "большой" условной квантилью $x_1 = q_{1|23}^{(x_1^\circ,x_2^\circ,x_3^\circ)}(x_2,x_3)$.

2.5. Многомерное распределение Парето

Плотность 3-мерного распределения Парето первого рода (см. [9, с. 577]).

$$f_{123}(x_1,x_2,x_3)=\frac{6}{(x_1+x_2+x_3-2)^4},\qquad x_1\geqslant 1,\ x_2\geqslant 1,\ x_3\geqslant 1.$$

Условные распределения, условные квантили и их производные:

$$F_{1|23}(x_1|x_2,x_3)=1-\left[\frac{-1+x_2+x_3}{-2+x_1+x_2+x_3}\right]^3,$$

$$F_{i|j}(x_i|x_j) = \frac{(-1+x_i)(-1+2x_j+x_i)}{(-1+x_j+x_i)^2},$$

$$q_{1|23}^{(x_1^\circ,x_2^\circ,x_3^\circ)}(x_2,x_3) = 1-(1-x_1^\circ)\frac{-1+x_2+x_3}{-1+x_2^\circ+x_3^\circ}, \quad q_{i|j}^{(x_i^\circ,x_j^\circ)}(x_j) = 1-(1-x_i^\circ)\frac{x_j}{x_j^\circ},$$

$$\dot q_{i|j}^{(x_i,x_j)}(x_j) = \frac{x_i-1}{x_j}, \quad i \neq j.$$

Свойство воспроизводимости условных квантилей легко проверяется подстановкой. Вычисляя определитель $\mathbf{W}(\boldsymbol{x})$, получаем уравнение Пфаффа для многомерного распределения Парето

$$(x_2+x_3-1)dx_1 + (1-x_1)dx_2 + (1-x_1)dx_3 = 0. \tag{11}$$

Так как для векторного поля

$$\boldsymbol{H}(x_1,x_2,x_3) = \{x_2+x_3-1,\, 1-x_1,\, 1-x_1\}, \quad \langle \boldsymbol{rot\,H},\, \boldsymbol{H}\rangle = 0,$$

то уравнение (11) вполне интегрируемо. Применяя элементарные методы, нетрудно получить решение уравнения (11), проходящее через точку $(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)$:

$$x_1 = 1-(1-x_1^\circ)\frac{-1+x_2+x_3}{-1+x_2^\circ+x_3^\circ}\,,$$

которое совпадает с "большой" условной квантилью.

Будем рассматривать кривые (параметризованные условными квантилями), проходящие через отмеченную точку $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_n)$:

$$\gamma_k(\boldsymbol{v},t) = \{q_{1|k}^{(v_1,v_k)}(t),\ldots,\, q_{k-1|k}^{(v_{k-1},v_k)}(t),\, t,\, q_{k+1|k}^{(v_{k+1},v_k)}(t),\, \ldots,\, q_{n|k}^{(v_n,v_k)}(t)\}.$$

Теорема 2. Для любой точки $\boldsymbol{x}^\circ = (x_1^\circ,\ldots,x_n^\circ) \in \mathbb{R}^n$ кривые

$$\gamma_2(\boldsymbol{x}^\circ,x_2) = \{q_{1|2}^{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_2),\ x_2,\ q_{3|2}^{(x_3^\circ,x_2^\circ)}(x_2),\,\ldots,\, q_{n-1|2}^{(x_{n-1}^\circ,x_2^\circ)}(x_2),\ q_{n|2}^{(x_n^\circ,x_2^\circ)}(x_2)\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_n(\boldsymbol{x}^\circ,x_n) = \{q_{1|n}^{(x_1^\circ,x_n^\circ)}(x_n),\, q_{2|n}^{(x_2^\circ,x_n^\circ)}(x_n),\, q_{3|n}^{(x_3^\circ,x_n^\circ)}(x_n),\ldots,\, q_{n-1|n}^{(x_{n-1}^\circ,x_n^\circ)}(x_n),\ x_n\}$$

являются решениями дифференциального уравнения Пфаффа (3).

Доказательство. Приведем доказательство для кривой $\gamma_2(\boldsymbol{x}^\circ,x_2)$. Для остальных кривых доказательства аналогичны. Рассмотрим касательный вектор к кривой $\gamma_2(\boldsymbol{x}^\circ,x_2)$ в точке $\boldsymbol{x}^\circ$:

$$\dot\gamma_2(\boldsymbol{x}^\circ,x_2^\circ) = \{\dot q_{1|2}^{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ), 1,\, \dot q_{3|2}^{(x_3^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ),\ldots,\, \dot q_{n-1|2}^{(x_{n-1}^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ),\, \dot q_{n|2}^{(x_n^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ)\}.$$

Ясно, что выполняется свойство ортогональности

$$\langle \mathbf{W}(\boldsymbol{x}^\circ), \dot\gamma_2(\boldsymbol{x}^\circ,x_2^\circ)\rangle = A_{11}(x_1^\circ,\ldots,x_n^\circ)\,\dot q_{1|2}^{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ) + A_{12}(x_1^\circ,\ldots,x_n^\circ) +$$

$$+\sum_{k=3}^{n} A_{1k}(x_1^\circ,\ldots,x_n^\circ)\,\dot q_{k|2}^{(x_k^\circ,x_2^\circ)}(x_2^\circ) = 0. \tag{12}$$

Покажем, что для произвольного x_2

$$\langle \mathbf{W}(\boldsymbol{x}), \dot\gamma_2(\boldsymbol{x}^\circ,x_2)\rangle = 0,$$

где

$$\dot\gamma_2(\boldsymbol{x}^\circ, x_2) = \{\dot q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(x_2), 1,\, \dot q_{3|2}^{(x_3^\circ, x_2^\circ)}(x_2), \dots,\, \dot q_{n-1|2}^{(x_{n-1}^\circ, x_2^\circ)}(x_2),\, \dot q_{n|2}^{(x_n^\circ, x_2^\circ)}(x_2)\}.$$

Фиксируя произвольное x_2, введем числа $x_1, x_3, \dots, x_n$:

$$x_1 := q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(x_2),\ \ x_3 := q_{3|2}^{(x_3^\circ, x_2^\circ)}(x_2),\ \dots,\ \ x_n := q_{n|2}^{(x_n^\circ, x_2^\circ)}(x_2), \tag{13}$$

тогда

$$x_1 = q_{1|2}^{(x_1, x_2)}(x_2),\ x_3 = q_{3|2}^{(x_3, x_2)}(x_2),\ \dots,\ \ x_n = q_{n|2}^{(x_n, x_2)}(x_2). \tag{14}$$

Ввиду строгой монотонности условных распределений $F_{i|j}(x_i|x_j)$ для любого u_2 справедливы равенства (см. [5]):

$$q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(x_2) = q_{1|2}^{(q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(u_2), u_2)}(x_2),\ \dots\dots,\ q_{n|2}^{(x_n^\circ, x_2^\circ)}(x_2) = q_{n|2}^{(q_{n|2}^{(x_n^\circ, x_2^\circ)}(u_2), u_2)}(x_2).$$

Дифференцируя эту систему равенств по x_2, для любого u_2 будем иметь

$$\dot q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(x_2) = \dot q_{1|2}^{(q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(u_2), u_2)}(x_2),\ \dots\dots,\ \dot q_{n|2}^{(x_n^\circ, x_2^\circ)}(x_2) = \dot q_{n|2}^{(q_{n|2}^{(x_n^\circ, x_2^\circ)}(u_2), u_2)}(x_2).$$

Положим $u_2 = x_2$, тогда ввиду (13)

$$\dot q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(x_2) = \dot q_{1|2}^{(x_1, x_2)}(x_2),\ \dots\dots,\ \dot q_{n|2}^{(x_n^\circ, x_2^\circ)}(x_2) = \dot q_{n|2}^{(x_n, x_2)}(x_2). \tag{15}$$

Отсюда ввиду (13)–(15)

$$A_{1k}(q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(x_2), x_2, q_{3|2}^{(x_3^\circ, x_2^\circ)}(x_2), \dots, q_{n|2}^{(x_n^\circ, x_2^\circ)}(x_2))\, \dot q_{k|2}^{(x_k^\circ, x_2^\circ)}(x_2) =$$
$$= A_{1k}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\, \dot q_{k|2}^{(x_k, x_2)}(x_2).$$

Аналогично равенству (12)

$$\langle \mathbf{W}(\boldsymbol{x}), \dot\gamma_2(\boldsymbol{x}, x_2)\rangle = A_{11}(x_1, \dots, x_n)\, \dot q_{1|2}^{(x_1, x_2)}(x_2) +$$
$$+ A_{12}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=3}^{n} A_{1k}(x_1, \dots, x_n)\, \dot q_{k|2}^{(x_k, x_2)}(x_2) = 0,$$

имеем

$$\langle \mathbf{W}(\boldsymbol{x}), \dot\gamma_2(\boldsymbol{x}^\circ, x_2)\rangle = A_{11}(x_1, \dots, x_n)\, \dot q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(x_2) +$$
$$+ A_{12}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=3}^{n} A_{1k}(x_1, \dots, x_n)\, \dot q_{k|2}^{(x_k^\circ, x_2^\circ)}(x_2) = 0.$$

Следовательно,

$$A_{11}(x_1, \dots, x_n)\, \dot q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(x_2)\, dx_2 + A_{12}(x_1, \dots, x_n)\, dx_2 +$$
$$+ \sum_{k=3}^{n} A_{1k}(x_1, \dots, x_n)\, \dot q_{k|2}^{(x_k^\circ, x_2^\circ)}(x_2)\, dx_2 = 0$$

и ввиду (13)

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} A_{1k}(x_1, \dots, x_n) dx_k = 0$$

на кривой $\gamma_2(\boldsymbol{x}^\circ, x_2)$. Теорема доказана.

3. Применение теоремы Дарбу для решения дифференциальных уравнений Пфаффа в случае отсутствия полной интегрируемости

В том случае, когда уравнение Пфаффа (3) не является вполне интегрируемым, для нахождения интегральных многообразий максимальной размерности можно воспользоваться теоремой Дарбу (см., например, [6, с. 146; 7, с. 119]). Для этого необходимо найти внешнюю степень r дифференциальной 1-формы ω такую, что

$$(d\omega)^r \wedge \omega \neq 0, \text{ но } (d\omega)^{r+1} \wedge \omega = 0.$$

Зная величину r, можно утверждать, что наименьшее число независимых переменных, от которых может зависеть форма ω, равно $2r+1$ (класс Дарбу дифференциальной 1-формы ω):

$$\omega = dy_1 + y_2 dy_3 + \ldots + y_{2r} dy_{2r+1},$$

а интегральные многообразия уравнения (3) максимальной размерности $n-r-1$ задаются уравнениями

$$y_1(\boldsymbol{x}) = C_1 = const, \; y_3(\boldsymbol{x}) = C_3 = const, \ldots, y_{2r+1}(\boldsymbol{x}) = C_{2r+1} = const.$$

Заметим, что для вполне интегрируемых уравнений Пфаффа (3) параметр $r = 0$, поэтому для таких уравнений максимальная размерность интегральных многообразий равна $n-1$, что фактически и утверждается в теореме 1. Если параметр r дифференциальной 1-формы ω равен $n-1$, то максимальная размерность интегральных многообразий уравнения Пфаффа (3) равна 1. Примеры таких многообразий даны в теореме 2.

В качестве примера уравнения Пфаффа, у которого нет полной интегрируемости, рассмотрим уравнения Пфаффа для смеси многомерных гауссовских распределений.

Введем смесь двух гауссовских плотностей

$$f_{1234}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}\, g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \frac{3}{4}\, g_2(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

где

$$g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4\sqrt{13}\,\pi^2} \exp\left(-\frac{1}{26}\, Q_1\right),$$

$$Q_1 = 21x_1^2 + 8x_2^2 + 7x_3^2 + 5x_4^2 - 2x_1(5x_2 + x_4) - 2x_2(2x_3 + x_4) - 2x_3(3x_4 - 2x_1),$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4\sqrt{10}\,\pi^2} \exp\left(-\frac{1}{20}\, Q_2\right),$$

$$Q_2 = 16x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_3^2 + 5x_4^2 - 4x_1(2x_2 + x_3) - 2x_3(2x_2 - 5x_4).$$

Тогда трехмерное распределение этой смеси имеет "чисто" гауссовскую плотность

$$f_{123}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\sqrt{10}\,\pi^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{10}\left(8x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_3(x_1 + x_2)\right)\right]$$

и

$$F_{4|123}(x_4|x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4}\left[3\Phi\left(\frac{x_4-x_3}{\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{5x_4-3x_3-x_1-x_2}{\sqrt{65}}\right)\right].$$

Опуская подробные вычисления двумерных условных распределений и квантилей, приведем формулы для производных двумерных условных квантилей

$$\dot{q}_{1|2}^{(x_1,x_2)}(x_2) \equiv \frac{1}{3}, \;\; \dot{q}_{1|3}^{(x_1,x_3)}(x_3) \equiv \frac{1}{4}, \;\; \dot{q}_{2|1}^{(x_1,x_2)}(x_1) \equiv 1, \;\; \dot{q}_{2|3}^{(x_2,x_3)}(x_3) \equiv \frac{1}{2},$$

$$\dot{q}_{3|1}^{(x_1,x_3)}(x_1) \equiv 1, \quad \dot{q}_{3|2}^{(x_2,x_3)}(x_2) \equiv \frac{2}{3}, \quad \dot{q}_{4|1}^{(x_1,x_4)}(x_1) \equiv 1, \;\; \dot{q}_{4|2}^{(x_2,x_4^\circ)}(x_2) \equiv \frac{2}{3},$$

$$\dot{q}_{4|3}^{(x_3,x_4)}(x_3) = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{22}\,e^{\frac{(x_4-x_3)^2}{4}} + 22e^{\frac{(4x_4-3x_3)^2}{88}}}{2\sqrt{22}\,e^{\frac{(x_4-x_3)^2}{4}} + 33e^{\frac{(4x_4-3x_3)^2}{88}}}\right).$$

Обозначим $y_2(x_3,x_4) := \frac{2}{3}\,\dot{q}_{4|3}^{(x_3,x_4)}(x_3)$. Вычисляя определитель $W(\boldsymbol{x})$, получим уравнение Пфаффа для гауссовской смеси

$$\omega = \left(-\frac{1}{3} + y_2(x_3,x_4)\right)dx_1 + \left(-\frac{1}{3} + y_2(x_3,x_4)\right)dx_2 +$$

$$+\left(\frac{1}{4} - y_2(x_3,x_4)\right)dx_3 + \frac{5}{12}\,dx_4 = 0.$$

Для внешнего дифферециала 1-формы ω вычисления показывают[5], что

$$d\omega\wedge\omega \neq 0, \;\; d\omega\wedge d\omega = 0.$$

Таким образом, класс Дарбу дифференциальной 1-формы ω равен трем. Нетрудно видеть, что уравнение Пфаффа для гауссовской смеси можно представить в следующем виде:

$$\omega = dy_1(x_1,x_2,x_3,x_4) + y_2(x_3,x_4)\,dy_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0, \tag{16}$$

где

$$y_1(x_1,x_2,x_3,x_4) := -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} + \frac{5}{12}\,x_4, \;\; y_3(x_1,x_2,x_3) := \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3,$$

а функция $y_2(x_3,x_4)$ была определена выше. Для системы функций

$$\{y_1(x_1,x_2,x_3,x_4),\, y_2(x_3,x_4),\, y_3(x_1,x_2,x_3)\} \tag{17}$$

ранг матрицы Якоби принимает максимальное значение, равное 3. Поэтому система (17) функционально независима. Следовательно, используя теорему Дарбу, можно утверждать, что в уравнении (16) дифференциальная 1-форма ω приведена к нормальной форме. Поэтому функции $y_1(x_1,x_2,x_3,x_4)$ и $y_3(x_1,x_2,x_3)$ являются первыми интегралами уравнения

[5] Проверка условий полной интегрируемости и вычисление классов Дарбу дифференциальных форм проводились с помощью "MAPLE-13" и "MATHEMATICA-7".

Пфаффа (16), а его интегральное многообразие $M \subset \mathbb{R}^4$ максимально возможной размерности 2 задается уравнениями

$$y_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} + \frac{5}{12} x_4 = C_1,$$
$$y_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = C_3,$$

или

$$M = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \, x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \tilde{C}_1, \, x_4 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \tilde{C}_2 \}.$$

Заметим, что

$$F_{4|123} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \tilde{C}_2 \middle| x_1, x_2, \frac{x_1 + x_2}{2} + \tilde{C}_1 \right) =$$
$$= \frac{1}{4} \left[3\Phi \left(\frac{\tilde{C}_2 - \tilde{C}_1}{\sqrt{2}} \right) + \Phi \left(\frac{5\tilde{C}_2 - 3\tilde{C}_1}{\sqrt{65}} \right) \right] = const.$$

Таким образом, для смеси гауссовских распределений интегральное многообразие M является частью "большой" условной квантили

$$M \subset \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_4 = q^{(p)}_{4|123}(x_1, x_2, x_3) \}$$

уровня

$$p = \frac{1}{4} \left[3\Phi \left(\frac{\tilde{C}_2 - \tilde{C}_1}{\sqrt{2}} \right) + \Phi \left(\frac{5\tilde{C}_2 - 3\tilde{C}_1}{\sqrt{65}} \right) \right].$$

Кроме того, используя формулы для трехмерных условных квантилей

$$q^{(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)}_{3|12}(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} + x_3^\circ - \frac{x_1^\circ + x_2^\circ}{2},$$
$$q^{(x_1^\circ, x_2^\circ, x_4^\circ)}_{4|12}(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} + x_4^\circ - \frac{x_1^\circ + x_2^\circ}{2},$$

можно утверждать, что у дифференциального уравнения (16) интегральное многообразие максимально возможной размерности, проходящее через отмеченную точку $(x_1^\circ, \, x_2^\circ, \, x_3^\circ, \, x_4^\circ)$, имеет вид

$$M_\circ = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_3 = q^{(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)}_{3|12}(x_1, x_2), \, x_4 = q^{(x_1^\circ, x_2^\circ, x_4^\circ)}_{4|12}(x_1, x_2) \}.$$

При этом выполняется следующее свойство воспроизводимости:

$$q^{(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ, x_4^\circ)}_{4|123}(x_1, \, x_2, \, q^{(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)}_{3|12}(x_1, x_2)) \equiv q^{(x_1^\circ, x_2^\circ, x_4^\circ)}_{4|12}(x_1, x_2).$$

Литература

[1] Adler R.J., Feldman R.E., Taqqu M.S. (eds.) A practical guide to heavy tailes: statistical tehniques and application. Boston: Birkhauser, 1998. 533 p.

[2] Poiraud-Casanova S., Thomas-Agan Ch. Quantiles conditionnels // Journal de la Société Française de Statistiques. 1998. T. 139. № 4. P. 31–41.

[3] Anderson T.W. Nonnormal multivariate distributions: inference based on ellipticaly contoured distributions // Multivariate Analysis: Futur Directions. Amsterdam: Elsevier Science Publishers (ed. C.R. Rao), 1993, P. 1400–1422.

[4] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: МИР, 1971. 392 с.

[5] Комлев А.Н., Шатских С.Я. Условные распределения вероятностей как преобразования независимости случайных величин // Вестник СамГУ. 2007. № 6(56). С. 204–222.

[6] Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 28. С. 297.

[7] Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. С. 188.

[8] Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967. С. 632.

[9] Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. Continuous multivariate distribution (2 ed.). N.Y.: Wiley, 2000. V. 1. P. 722.

[10] Шатских С.Я. Необходимое условие воспроизводимости условных квантилей многомерных вероятностных распределений // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 2000. Т. 4. № 4. С. 67–72.

[11] Шатских С.Я. Об одном варианте преобразования независимости // Мера и интеграл, Самара: Изд-во "Самарский университет", 1995. С. 99–112.

[12] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. 8-е изд. М.: Физматгиз, 1959. С. 472.

Поступила в редакцию $10/II/2010$;
в окончательном варианте — $5/V/2010$.

PFAFFIAN DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR CONDITIONAL QUANTILES OF MULTIDIMENTIONAL PROBABILITY DISTRIBUTIONS

 I.S. Orlova,[6] S.Ya. Shatskikh[7]

Our work is devoted to the study of Pfaff differential equations, which are constructed on the basis of two-dimensional conditional quantiles. However for some multidimentional probability distributions (distributions having the property of conditional quantiles reproducibility) solutions of these equations are the conditional quantiles of significantly higher dimensions. This fact allows us (for distributions of the pointed class) to reduce significantly the number of observations needed to build statistical estimations for multidimentional conditional medians and conditional quantiles.

Key words: multidimentional probability distributions, reproducibility of conditional quantiles, completely integrable Pfaff's differential equations.

Paper received 10/II/2010.
Paper accepted 5/V/2010.

[6]Orlova Irina Sergeevna (dior3000@gmail.com), Samara International Aerospace Lyceum, Samara, 443086, Russia.

[7]Shatskikh Sergei Yakovlevich (shatskih@ssu.samara.ru), Dept. of Theory Probability and Mathematical Statistics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.