УДК 517.44

ВЕКТОРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ, ГАРМОНИЧЕСКИХ В ШАРЕ

© 2010 Ю.А. Парфенова[1]

В работе вводятся оператор L_Γ и обратный ему L_Γ^{-1}, которые используются при нахождении операторов преобразования и решении конкретных краевых задач в однородных сферически симметричных областях. В данной работе предлагается операторный метод решения векторных краевых задач, в частности, найдено решение третьей краевой задачи для уравнения Лапласа в шаре.

Ключевые слова: оператор преобразования, векторные краевые задачи, гармонические функции.

1. Пусть вектор-функция

$$u(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} u_1(x_1,x_2,x_3)\\ \dots\\ u_n(x_1,x_2,x_3)\end{pmatrix}$$

гармоническая в шаре $B_1=\left\{(x_1,x_2,x_3)/x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 1\right\}$.

Оператор L_Γ определим равенством:

$$L_\Gamma\left[u(x_1,x_2,x_3)\right]=\Gamma u(x_1,x_2,x_3)+\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i},$$

где

$$\Gamma=(\gamma_{ij})_{n\times n}$$

есть заданная матрица

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}\\ \cdots\\ \frac{\partial u_n(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}\end{pmatrix},\quad i=1,2,3.$$

Теорема 1. Если вектор-функция $u=u(x_1,x_2,x_3)$ гармоническая в шаре B_1, то вектор-функция $v(x_1,x_2,x_3)=L_\Gamma\left[u(x_1,x_2,x_3)\right]$ также гармоническая в шаре B_1.

[1]Парфенова Юлия Алексеевна (julia5507@mail.ru), кафедра математического анализа Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского, 440602, Россия, г. Пенза, ул. Лермонтова, 37.

Доказательство. Непосредственным вычислением найдем:

$$\Delta v(x_1,x_2,x_3)=\Delta L_\Gamma\left[u(x_1,x_2,x_3)\right]=L_\Gamma\left[\Delta u(x_1,x_2,x_3)\right].$$

Поскольку вектор-функция $u=u(x_1,x_2,x_3)$ гармоническая в шаре B_1, то $\Delta u(x_1,x_2,x_3)=0$. Тогда $\Delta v(x_1,x_2,x_3)=0$. Теорема доказана.

Теорема 2. (см. [1]). Если вектор-функция $u=u(x_1,x_2,x_3)$ гармоническая в B_1, то ее можно представить в виде

$$u(x_1,x_2,x_3)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x_1,x_2,x_3),$$

где $P_k(x_1,x_2,x_3)$ — однородные гармонические степени k многочлены; при этом ряд сходится абсолютно и равномерно внутри шара B_1.

Теорема 3. Пусть для вектор-функции $u=u(x_1,x_2,x_3)$ дано разложение в ряд однородных векторных полиномов:

$$u(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} u_1(x_1,x_2,x_3)\\ \dots\\ u_n(x_1,x_2,x_3)\end{pmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x_1,x_2,x_3),$$

тогда оператор $L_\Gamma\left[u(x_1,x_2,x_3)\right]$ задается равенством:

$$L_\Gamma\left[u(x_1,x_2,x_3)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}(\Gamma+kE)\,P_k(x_1,x_2,x_3),$$

где E — единичная матрица порядка n.

Доказательство.

Так как $P_k(x_1,x_2,x_3)$ — однородная функция степени k, то [2]

$$L_0\left[P_k(x_1,x_2,x_3)\right]=k\cdot P_k(x_1,x_2,x_3),$$

где $L_0=\sum\limits_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Теорема доказана.

Теорема 4. В сферической системе координат, определяемой равенствами:

$$\begin{cases} x_1=r\sin\psi\cos\varphi, & 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant\psi\leqslant\pi,\\ x_2=r\sin\psi\sin\varphi, & 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant\psi\leqslant\pi,\\ x_3=r\cos\psi, & 0\leqslant\psi\leqslant\pi,\end{cases}$$

оператор $L_\Gamma\left[u(x_1,x_2,x_3)\right]$ принимает вид:

$$L_\Gamma\left[u(r,\varphi,\psi)\right]=\Gamma u(r,\varphi,\psi)+r\frac{\partial u(r,\varphi,\psi)}{\partial r}.$$

Доказательство проводится прямым вычислением выражения $L_\Gamma\left[u(x_1,x_2,x_3)\right]$.

Поставим цель — определить оператор L_Γ^{-1}, обратный к оператору L_Γ. Будем различать несколько случаев.

Теорема 5. Если $L_\Gamma\left[u(x_1,x_2,x_3)\right]=v(x_1,x_2,x_3)$ и если функция $v(x_1,x_2,x_3)$ представима в виде ряда $v(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_k(x_1,x_2,x_3)$, где

$P_k(x_1, x_2, x_3)$, $v(x_1, x_2, x_3)$ — вектор-функции, а матрица $(\Gamma + kE)$ — невырожденная при всех значениях $k \in N$, то

$$u(x_1, x_2, x_3) = L_\Gamma^{-1}[v(x_1, x_2, x_3)] = \sum_{k=0}^{\infty} (\Gamma + kE)^{-1} P_k(x_1, x_2, x_3).$$

Доказательство следует из теоремы 3.

Напомним, что число λ называется собственным числом матрицы Γ, если $\det(\Gamma - \lambda E) = 0$.

Следствие 1. Если все собственные значения матрицы Γ имеют положительные действительные части, то есть $Re\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, то

$$L_\Gamma^{-1}[v(x_1, x_2, x_3)] = \int_0^1 \varepsilon^{\Gamma - E} v(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon x_3)\, d\varepsilon,$$

где

$$\varepsilon^{\Gamma - E} = \exp((\Gamma - E)\ln\varepsilon).$$

Доказательство. Пусть $v = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(x_1, x_2, x_3)$, тогда

$$\int_0^1 \varepsilon^{\Gamma - E} v(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon x_3)\, d\varepsilon = \int_0^1 \varepsilon^{\Gamma - E} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x_1, x_2, x_3)\varepsilon^k d\varepsilon,$$

так как $P_k(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon x_3) = \varepsilon^k P_k(x_1, x_2, x_3)$. Ввиду равномерной сходимости ряда по ε имеем:

$$\int_0^1 \varepsilon^{\Gamma - E} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x_1, x_2, x_3) \cdot \varepsilon^k d\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \varepsilon^{\Gamma - E} \cdot \varepsilon^k P_k(x_1, x_2, x_3) d\varepsilon.$$

Заметим, что $\int\limits_0^1 \varepsilon^{\Gamma - E} \cdot \varepsilon^k d\varepsilon = (\Gamma + kE)^{-1}$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \varepsilon^{\Gamma - E} \cdot \varepsilon^k P_k(x_1, x_2, x_3) d\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} (\Gamma + kE)^{-1} P_k(x_1, x_2, x_3).$$

По теореме 5

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\Gamma + kE)^{-1} P_k(x_1, x_2, x_3) = L_\Gamma^{-1}[v(x_1, x_2, x_3)].$$

Следствие доказано.

Замечание 1. В скалярном случае

$$L_\gamma^{-1}[v(x_1, x_2, x_3)] = \int_0^1 \varepsilon^{\gamma - 1} \cdot v(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon x_3)\, d\varepsilon,$$

где γ — скаляр.

Пример 1. Выберем $\Gamma = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$. Собственные значения этой матрицы равны 2 и 1, тогда матрицу Γ можно привести к диагональному виду [3]:
$\Gamma = T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T$, где $T = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Воспользуемся формулой [3]:

$$e^{\Gamma} = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} T,$$

в результате чего получаем:

$$e^{(\Gamma - \mathrm{E})\ln\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3\varepsilon & 2\varepsilon-2 \\ 6-6\varepsilon & 4\varepsilon-3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$, тогда

$$L_{\Gamma}^{-1}[\nu] = \begin{pmatrix} 4\int\limits_0^1 \nu_1(\varepsilon x)\,d\varepsilon - 3\int\limits_0^1 \varepsilon\nu_1(\varepsilon x)\,d\varepsilon + 2\int\limits_0^1 \varepsilon\nu_2(\varepsilon x)\,d\varepsilon - 2\int\limits_0^1 \nu_2(\varepsilon x)\,d\varepsilon \\ 6\int\limits_0^1 \nu_1(\varepsilon x)\,d\varepsilon - 6\int\limits_0^1 \varepsilon\nu_1(\varepsilon x)\,d\varepsilon + 4\int\limits_0^1 \varepsilon\nu_2(\varepsilon x)\,d\varepsilon - 3\int\limits_0^1 \nu_2(\varepsilon x)\,d\varepsilon \end{pmatrix},$$

где

$$\nu(x) = v(x_1, x_2, x_3), \nu(\varepsilon x) = v(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon x_3).$$

Пример 2. Пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, причем $\alpha_{11} \neq \alpha_{22}$.

Найдем $\varepsilon^{\Gamma - E}$.

Для этого решим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}' = \Gamma\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}(1) = E. \end{cases}$$

В результате имеем

$$\varepsilon^{\Gamma - E} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\alpha_{11}-1} & \alpha_{12}\frac{\varepsilon^{\alpha_{22}-1} - \varepsilon^{\alpha_{11}-1}}{\alpha_{22}-\alpha_{11}} \\ 0 & \varepsilon^{\alpha_{22}-1} \end{pmatrix}.$$

С учетом замечания 1 имеем

$$\begin{cases} u_1(x) = L_{\alpha_{11}}^{-1}[v_1(\varepsilon x)] + \alpha_{12} L_{\alpha_{11}}^{-1} \cdot L_{\alpha_{11}}^{-1}[v_2(\varepsilon x)], \\ u_2(x) = L_{\alpha_{22}}^{-1}[v_2(\varepsilon x)]. \end{cases}$$

Пример 3. Пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{11} \end{pmatrix}$, тогда

$$\varepsilon^{\Gamma - E} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\alpha_{11}-1} & -\alpha_{12}\varepsilon^{\alpha_{11}-1} \cdot \ln\varepsilon \\ 0 & \varepsilon^{\alpha_{11}-1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} u_1(x) = L_{\alpha_{11}}^{-1}[v_1(\varepsilon x)] + \alpha_{12} L_{\alpha_{11}}^{-1} \cdot L_{\alpha_{11}}^{-1}[v_2(\varepsilon x)], \\ u_2(x) = L_{\alpha_{11}}^{-1}[v_2(\varepsilon x)]. \end{cases}$$

При этом использовано представление

$$-\int_0^1 \varepsilon^{\alpha_{11}-1} \ln \varepsilon \cdot v_2(\varepsilon x)\, d\varepsilon = L_{\alpha_{11}}^{-1} \cdot L_{\alpha_{11}}^{-1}[v_2(\varepsilon x)].$$

Следствие 2. Если среди собственных значений матрицы Γ нет целых отрицательных и если $-(m+1) < \min Re\lambda_i < -m$, где m — некоторое натуральное число или нуль, то

$$L_\Gamma^{-1}[v(x_1,x_2,x_3)] = \sum_{k=0}^{m} (\Gamma + kE)^{-1} P_k(x_1,x_2,x_3) +$$

$$+\int_0^1 \varepsilon^{\Gamma-E} \left(v(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon x_3) - \sum_{k=0}^{m} P_k(x_1,x_2,x_3)\, \varepsilon^k \right) d\varepsilon.$$

Доказательство. Если матрица $(\Gamma + kE)$ невырожденная при всех $k \in \mathrm{N}$ и $-(m+1) < \min Re\lambda_i < -m$, то по теореме 5 имеем:

$$v(x_1,x_2,x_3) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Gamma + kE)^{-1} P_k(x_1,x_2,x_3) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (\Gamma + kE)^{-1} P_k(x_1,x_2,x_3) + \sum_{k=m+1}^{\infty} (\Gamma + kE)^{-1} P_k(x_1,x_2,x_3).$$

Преобразуем

$$\int_0^1 \varepsilon^{\Gamma-E} \left(v(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon x_3) - \sum_{k=0}^{m} P_k(x_1,x_2,x_3)\, \varepsilon^k \right) d\varepsilon =$$

$$= \int_0^1 \varepsilon^{\Gamma-E} \sum_{k=m+1}^{\infty} P_k(x_1,x_2,x_3)\, \varepsilon^k d\varepsilon.$$

Аналогично доказательству следствия 1 получаем

$$\int_0^1 \varepsilon^{\Gamma-E} \sum_{k=m+1}^{\infty} P_k(x_1,x_2,x_3) \cdot \varepsilon^k d\varepsilon = \sum_{k=m+1}^{\infty} \int_0^1 \varepsilon^{\Gamma-E} \cdot \varepsilon^k P_k(x_1,x_2,x_3) d\varepsilon =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{\infty} (\Gamma + kE)^{-1} P_k(x_1,x_2,x_3).$$

Следствие доказано.

Лемма 1. Число натуральных значений k, при которых матрица $(\Gamma + kE)$ вырождена, равно числу целых отрицательных собственных значений матрицы Γ без учета их кратности. При этом соответствующие значения k противоположны по знаку целым отрицательным собственным значениям матрицы Γ.

В случае, когда матрица $(\Gamma + kE)$ вырожденная для некоторго натурального значения k, задача

$$L_{\Gamma}\left[u\left(x_1,x_2,x_3\right)\right] = v\left(x_1,x_2,x_3\right),$$

вообще говоря, не разрешима.

Пример 4. Если матрица $\Gamma = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, а вектор $v = \begin{pmatrix} P_2(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, где $P_2(x)$ — любой однородный гармонический полином степени 2, то задача

$$L_{\Gamma}\left[u\left(x\right)\right] = v\left(x\right)$$

не имеет решений.

В самом деле

$$\begin{cases} -2u_1(x) + u_2(x) + L_0\left[u_1(x)\right] = P_2(x), \\ 4u_2(x) + L_0\left[u_1(x)\right] = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем: $u_2(x) = 0,\ x \in B_1,$ тогда

$$-2u_1(x) + L_0\left[u_1(x)\right] = P_2(x),$$

и указанная задача не имеет решений в классе гармонических в шаре B_1 функций.

Теорема 6. Если среди собственных значений матрицы Γ есть целые отрицательные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p,\ 1 \leqslant p \leqslant n$ и если выполнены достаточные условия разрешимости $P_k(x_1,x_2,x_3) = \theta,\ k = k_1, k_2, ..., k_p,\quad k_l = -\lambda_l,$ $l = 1, ..., p,\ \theta$ — нулевой вектор порядка $n \times 1$, то

$$u\left(x_1,x_2,x_3\right) = \sum_{k=0}^{\infty}{}'(\Gamma + kE)^{-1} P_k\left(x_1,x_2,x_3\right) + \\ + \sum_{k}{}'' c_k \cdot e_k \cdot q_k\left(x_1,x_2,x_3\right),$$

где знак $'$ у суммы означает, что слагаемые с номерами $k_1, ..., k_p$ пропущены, а знак $''$, что суммирование ведется по слагаемым $k_1, ..., k_p$; $e_k = \begin{pmatrix} e_{1k} \\ \vdots \\ e_{nk} \end{pmatrix}$ — собственный вектор матрицы Γ, соответствующий собственному значению $-k$; $q_k(x_1,x_2,x_3)$ — произвольный однородный гармонический полином степени k; c_k — произвольная постоянная.

Доказательство проводится по образцу следствия 1.

Следствие 3. Если матрица $(\Gamma + kE)$ вырождена и $-(m+1) < \min Re\lambda_i < -m$, где m — некоторое натуральное число или нуль, то для разрешимости задачи

$$L_{\Gamma}\left[u\left(x_1,x_2,x_3\right)\right] = v\left(x_1,x_2,x_3\right)$$

достаточно условий $P_k(x_1,x_2,x_3) = \theta,\ k = k_1, k_2, ..., k_p$; θ — нулевой вектор порядка $n \times 1$. При этом

$$u\left(x_1,x_2,x_3\right) = \sum_{k=0}^{\infty}{}'(\Gamma + kE)^{-1} P_k\left(x_1,x_2,x_3\right) +$$

$$+\int\limits_0^1 \varepsilon^{\Gamma-E}\left(v\left(x_1,x_2,x_3\right)-\sum_{k=0}^{m} P_k\left(x_1,x_2,x_3\right)\varepsilon^k\right)d\varepsilon+$$
$$+\sum_k{}'' c_k\cdot e_k\cdot q_k\left(x_1,x_2,x_3\right),$$

где знак $'$ у суммы означает, что слагаемые с номерами $k_1,...,k_p$ пропущены, а знак $''$, что суммирование ведется по слагаемым $k_1,...,k_p$; $e_k = \begin{pmatrix} e_{1k} \\ \vdots \\ e_{nk} \end{pmatrix}$ — собственный вектор матрицы Γ, соответствующий собственному значению $-k$; $q_k\left(x_1,x_2,x_3\right)$ — произвольный однородный гармонический полином степени k; c_k — произвольная постоянная.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством следствия 1.

Замечание. Операторы L_Γ и L_Γ^{-1} служат векторным аналогом операторов L_γ и L_γ^{-1}, теория которых развита в монографиях [4, 5].

Третья векторная краевая задача для уравнения Лапласа в шаре из R^3 заключается в определении вектор-функции

$$u\left(r,\varphi,\psi\right)=\begin{pmatrix} u_1\left(r,\varphi,\psi\right) \\ ... \\ u_n\left(r,\varphi,\psi\right)\end{pmatrix},$$

гармонической в шаре B_1, являющейся решением уравнения Лапласа

$$\Delta u\left(r,\varphi,\psi\right)=0,$$

с граничным условием

$$\Gamma u\left(r,\varphi,\psi\right)+\left.\frac{\partial u\left(r,\varphi,\psi\right)}{\partial n}\right|_{r=1}=f\left(\varphi,\psi\right),$$

где $f\left(\varphi,\psi\right)$ — заданная на сфере S_1 непрерывная функция, Γ — невырожденная квадратная матрица размерности n, $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали.

Лемма 2. Для сферы S_1 имеет место равенство

$$\left.\frac{\partial u\left(r,\varphi,\psi\right)}{\partial n}\right|_{r=1}=r\left.\frac{\partial u\left(r,\varphi,\psi\right)}{\partial r}\right|_{r=1}.$$

Доказательство. Доказательство следует из того факта, что внешняя нормаль к сфере направлена по радиус-вектору, приложенному в данную точку.

Лемма доказана.

Теорема 7. Если у матрицы Γ нет отрицательных собственных значений, то решение третьей краевой задачи для уравнения Лапласа в шаре из R^3 имеет вид:

$$u\left(r,\varphi,\psi\right)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{1}\varepsilon^{\Gamma-E}\frac{\left(1-\varepsilon^2r^2\right)\sin\Psi f\left(\Phi,\Psi\right)}{\left(1-2r\varepsilon\cos\gamma+\varepsilon^2r^2\right)^{3/2}}d\varepsilon d\Psi d\Phi, \qquad (1)$$

где
$$\cos\gamma = \sin\psi \sin\Psi \cos(\varphi - \Phi) + \cos\psi \cos\Psi.$$

Доказательство. Введем следующее обозначение:
$$\Gamma u(r,\varphi,\psi) + r\frac{\partial u(r,\varphi,\psi)}{\partial r} = v(r,\varphi,\psi),$$
то есть $v(r,\varphi,\psi) = L_\Gamma[u(r,\varphi,\psi)]$, и по теореме 1 функция $v(r,\varphi,\psi)$ является гармонической в шаре B_1. Кроме того, по лемме 2 выполнено условие $v(r,\varphi,\psi)|_{r=1} = f(\varphi,\psi)$. Таким образом, для функции $v(r,\varphi,\psi)$ имеем задачу Дирихле для уравнения Лапласа в шаре:
$$\Delta v(r,\varphi,\psi) = 0$$
с граничным условием
$$v(r,\varphi,\psi)|_{r=1} = f(\varphi,\psi).$$

Решение этой задачи известно [6] и имеет следующий вид:
$$v(r,\varphi,\psi) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\left(1-r^2\right)\sin\Psi f(\Phi,\Psi)}{\left(1-2r\cos\gamma + r^2\right)^{3/2}} d\Psi d\Phi, \tag{2}$$
где
$$\cos\gamma = \sin\psi \sin\Psi \cos(\varphi - \Phi) + \cos\psi \cos\Psi.$$

Произведем обратную замену и с учетом следствия 1 для случая, когда у матрицы Γ нет отрицательных собственных значений, получим:
$$u(r,\varphi,\psi) = L_\Gamma^{-1}[v(r,\varphi,\psi)] = \int\limits_0^1 \varepsilon^{\Gamma - E} v(\varepsilon r,\varphi,\psi)\, d\varepsilon.$$
Тогда с учетом (2) решение третьей векторной краевой задачи для уравнения Лапласа в шаре будет иметь вид (1).

Теорема доказана.

Следствие 4. Если у матрицы Γ нет целых отрицательных собственных значений, то решение третьей краевой задачи для уравнения Лапласа в шаре имеет вид:
$$u(r,\varphi,\psi) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} L_\Gamma^{-1}\left[\frac{\left(1-\varepsilon^2 r^2\right)\sin\Psi f(\Phi,\Psi)}{\left(1-2r\varepsilon\cos\gamma + \varepsilon^2 r^2\right)^{3/2}}\right] d\Psi d\Phi.$$

Таким образом, найдено решение третьей краевой задачи для уравнения Лапласа в шаре из R^3.

Литература

[1] Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Иностр. лит., 1952. 476 с.

[2] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 2. 800 с.

[3] Гандмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 575 с.

[4] Баврин И.И. Операторный метод в комплексном анализе. М.: Прометей, 1991. 200 с.

[5] Баврин И.И., Яремко О.Э. Операторы преобразования и краевые задачи теории гармонических и бигармонических функций // Доклады РАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 439–444.

[6] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.

Поступила в редакцию 16/*XI*/2009;
в окончательном варианте — 25/*I*/2010.

VECTOR TRANSFORMATION OPERATORS FOR HARMONIC FUNCTIONS IN A BALL

 Y.A. Parfenova[2]

The operator L_Γ and the inverse operator L_Γ^{-1} are investigated; they are used at finding transformation operators and at the solution of concrete boundary value problems in homogeneous spherically symmetric areas. The operational solution method of vector boundary value problems is offered. In particular, the solution of the third boundary value problem in ball for the Laplace equation is found.

Key words: transformation operator, vector boundary value problems, harmonic functions.

Paper received 16/*XI*/2009.
Paper accepted 25/*I*/2010.

[2]Parfenova Yulia Alexeevna (julia5507@mail.ru), Dept. of Mathematical Analysis, Penza State Pedagogical University V.G. Belinskiy by name, Penza, 443011, Russia.