УДК 517.5

# О ДВОИЧНОМ МУЛЬТИВСПЛЕСКОВОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ

© 2010 П.Г. Северов[1]

В статье вводятся непрерывное и двоичное мультивсплесковые преобразования, а также понятие двоичного мультивсплеска. Рассматривается условие допустимости. Доказана теорема о восстановлении сигнала по его разложению по мультивсплескам, а также аналоги ряда важных теорем теории всплесков.

**Ключевые слова**: мультивсплеск, мультимасштабирующая функция, кратномасшабный анализ размерности $r$, непрерывное мультивсплесковое преобразование, двоичное мультивсплесковое преобразование.

## 1. Предварительные сведения

Теория мультивсплесков связана с действительными вектор-значными функциями. В дальнейшем векторы будем обозначать жирным шрифтом.

Рассмотрим следующие пространства [1]:

$$L^2(\mathcal{R})^r = \{\mathbf{f} = (f_0,\, f_1,\, \ldots,\, f_{r-1})^T : f_i \in L^2(\mathcal{R}), i = 0,\, \ldots,\, r-1\};$$

$$\begin{aligned} l^2(\mathcal{Z})^r \;\; = \;\; & \{\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_k\}_{k\in\mathcal{Z}} = (c_0,\, c_1,\, \ldots,\, c_{r-1})^T : \\ & c_i = \{c_i^k\}_{k\in\mathcal{Z}} \in l^2(\mathcal{Z}), i = 0,\, \ldots,\, r-1\}. \end{aligned}$$

Нормы этих пространств определяются следующим образом:

$$\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(\mathcal{R})^r} = \sum_{i=0}^{r-1} \|f_i\|^2_{L^2(\mathcal{R})} = \sum_{i=0}^{r-1} \int_{\mathcal{R}} |f_i(x)|^2 dx,$$

$$\|\mathbf{c}\|^2_{l^2(\mathcal{Z})^r} = \sum_{i=0}^{r-1} \|c_i\|^2_{l^2(\mathcal{Z})} = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k\in\mathcal{Z}} |c_i^k|^2.$$

[1]Северов Павел Григорьевич (severovpg@gmail.com), кафедра функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета, 394006, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

Пусть $H$ — квадратная комплекснозначная матрица, тогда $|H|^2 = HH^*$, где $*$ обозначает транспонирование матрицы и взятие комплексного сопряжение каждого ее элемента. Преобразование фурье-функции $\mathbf{f} \in L^2(\mathcal{R})^r$ — вектор преобразования Фурье каждого компонента:

$$\widehat{\mathbf{f}}(\omega) = \Big(\widehat{f}_0(\omega), \ldots, \widehat{f}_{r-1}(\omega)\Big)^T = \Big(\int\limits_{\mathcal{R}} f_0(t)e^{-i\omega t}dt, \ldots, \int\limits_{\mathcal{R}} f_{r-1}(t)e^{-i\omega t}dt\Big)^T.$$

Носитель функции $g$ определяется как замыкание множества

$$\{x : g(x) \neq 0\}.$$

Носитель вектор-функции $\mathbf{f}$ определяется как

$$supp\mathbf{f} = \bigcup_k supp f_k.$$

## 2. Мультимасштабирующая функция

**Определение 2.1.** Вектор-функция

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{r-1})^T,$$

где

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{r-1} \in L_1 \bigcap L_2,$$

называется мультимасштабирующей, если она удовлетворяет мультимасштабирующему уравнению

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \sqrt{2}\sum_k H_k \boldsymbol{\varphi}(2t-k),\ k \in \mathcal{Z}, \tag{2.1}$$

где $H_k$ — матричные коэффициенты мультимасштабирующего уравнения размерности $r \times r$.

**Определение 2.2.** Количество компонент в мультимасштабирующей вектор-функции будем называть размерностью соответствующей вектор-функции и обозначать

$$r = \dim(\boldsymbol{\varphi}).$$

Мультимасштабирующая вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется ортогональной, если

$$\int \boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\varphi}(x-k)^* dx = \delta_{0k} I,$$

где результат интегрирования есть матрица размера $r \times r$, $I$ — единичная матрица.

В формуле (2.1) мы имеем счетное число коэффициентов. Будем предполагать в дальнейшем, что $\varphi_i$ имеет компактный носитель для всех $i = 0, \ldots, r-1$. В этом случае число ненулевых коэффициентов будет финитным.

**Определение 2.3.** Маской мультимасштабирующего уравнения назовем матрицу, состоящую из тригонометрических полиномов

$$H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=k_0}^{k_1} H_k e^{-\mathcal{I}k\xi}. \tag{2.2}$$

В образах Фурье (2.2) примет вид

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\xi) = H(\xi/2)\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\xi/2). \tag{2.3}$$

**Теорема 2.1.** Необходимым условием ортогональности является равенство

$$\sum_k H_k H^*_{k-2l} = \delta_{0l} I$$

или, что эквивалентно

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi+\pi)|^2 = I.$$

## 3. Кратномасшабный анализ и мультивсплески

**Определение 3.4.** Кратномасштабным анализом (КМА) размерности $r$ называется последовательность вложенных замкнутых подпространств $L^2(\mathcal{R})$

$$\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots,$$

удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(\mathcal{R})$.
2. $\bigcap_j V_j = \{0\}$.
3. $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ для всех $j \in \mathcal{Z}$.
4. $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x - \frac{k}{2^j}) \in V_j$ для всех $j, k \in \mathcal{Z}$.
5. Существует вектор-функция $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{r-1})^T$ такая, что

$$\{\varphi_l(\cdot - k) : l = 0, \ldots, r-1, k \in \mathcal{Z}\} \tag{3.4}$$

образуют базис Рисса в пространстве $V_0$, т. е. существуют две константы $A$ и $B$, где $0 < A \leqslant B < \infty$, такие, что

$$A\|\boldsymbol{c}\|^2_{l^2(\mathcal{Z})^r} \leqslant \left\| \sum_{k\in\mathcal{Z}} \sum_{i=0}^{r-1} c_i^k \varphi_i(\cdot - k) \right\|^2_{L^2(\mathcal{R})} \leqslant B\|\boldsymbol{c}\|^2_{l^2(\mathcal{Z})^r}$$

для любой последовательности $c = \{c_k\}_{k\in\mathcal{Z}} \in l^2(\mathcal{Z})^r$.

Вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется мультимасштабирующей. Если (3.4) образует ортогональный базис, КМА называется ортогональным.

Из свойств 3–5 определения 3.4 следует

$$V_j = \overline{\operatorname{span}\{2^{j/2}\varphi_i(2^j\cdot -k) : 0 \leqslant i \leqslant r-1,\, k,\, j \in \mathcal{Z}\}}.$$

Ортогональный проектор произвольной функции $f \in L^2$ на $V_n$ определяется формулой в векторном виде

$$P_n f(x) = \sum_k \langle f, \boldsymbol{\varphi}_{nk}\rangle \boldsymbol{\varphi}_{nk}(x),$$

где $\boldsymbol{\varphi}_{nk}(x) = \Big(2^{n/2}\varphi_0(2^n x - k),\, 2^{n/2}\varphi_1(2^n x - k),\, \cdots,\, 2^{n/2}\varphi_{r-1}(2^n x - k)\Big)^T$, и $\|\varphi_i\| = 1$ для всех $i = 0, \ldots, r-1$, либо, если записать поэлементно

$$P_n f(x) = \sum_{k\in\mathcal{Z}} \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{j,\,n,\,k}\varphi_{j,\,n,\,k}(x),$$

где

$$\alpha_{j,\,n,\,k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j,\,n,\,k}(x) f(x)dx, \quad \varphi_{j,\,n,\,k}(x) = 2^{n/2}\varphi_j(2^n x - k).$$

$P_n f$ называется приближением $f$ в масштабе $2^{-n}$.

Пусть

$$Q_n f(x) = P_{n+1} f(x) - P_n f(x),$$

Здесь $Q_n$ — ортогональный проектор на замкнутое подпространство, которое мы обозначим $W_n$. Пространство $W_n$ — ортогональное дополнение $V_n$ до $V_{n+1}$, а $V_{n+1}$ — прямая сумма $V_n$ и $W_n$

$$V_{n+1} = V_n \oplus W_n.$$

Так же, как и в скалярном случае, можно записать

$$V_n = \bigoplus_{k=-\infty}^{n-1} W_k.$$

Последовательность пространств $W_n$ удовлетворяет условиям, подобным условиям из определения 3.4.

**Теорема 3.2.** Для ортогонального КМА размерности $r$ с мультимасштабирующей функцией $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_0,\, \varphi_1,\, \cdots,\, \varphi_{r-1})^T$ имеют место следующие свойства:

1. $\overline{\bigoplus_j W_j} = L^2(\mathcal{R})$.

2. $W_k \perp W_j$ если $k \neq n$.

3. $f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2x) \in W_{j+1}$ для всех $j \in \mathcal{Z}$.

4. $f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(x - \frac{k}{2^j}) \in W_j$ для всех $j,\, k \in \mathcal{Z}$.

5. Существует вектор-функция $\boldsymbol{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_{r-1})^T \in L^2(\mathcal{R})^r$, ортогональная $\boldsymbol{\varphi}$, такая, что

$$\{\psi_l(\cdot - k) : l = 0, \ldots, r-1, k \in \mathcal{Z}\}$$

образуют базис Рисса в пространстве $W_0$.

Теорема (3.2.) доказана в [2].

Так как $\psi_i \in V_1$, можно записать

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \sqrt{2} \sum_k G_k \boldsymbol{\varphi}(2x - k), \tag{3.5}$$

где $G_k$ — матричные коэффициенты мультимасштабирующего уравнения размерности $r \times r$.

**Определение 3.5.** Вектор-функция $\boldsymbol{\psi}$ из теоремы (3.2) называется мультивсплеском размерности $r$.

Построение мультивсплеска, в отличие от скалярного случая, несколько сложнее. Более того, для одной мультимасштабирующей функции можно получить несколько мультивсплесков, т. е. построение мультивсплеска неоднозначно.

Для мультивсплеска $\boldsymbol{\psi}$ запишем

$$G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=k_0}^{k_1} G_k e^{-\mathcal{I}k\xi}. \tag{3.6}$$

Взяв преобразование Фурье от обеих частей уравнения (3.5), получим

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}}(\xi) = G(\xi/2)\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\xi/2). \tag{3.7}$$

**Теорема 3.3.** Ортогональность $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ означает

$$\sum_k H_k H_{k-2l}^* = \delta_{0l} I, \tag{3.8}$$

$$\sum_k G_k G_{k-2l}^* = \delta_{0l} I, \tag{3.9}$$

$$\sum_k H_k G_{k-2l}^* = \sum_k G_k H_{k-2l}^* = 0, \tag{3.10}$$

что эквивалентно

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = I,$$
$$|G(\xi)|^2 + |G(\xi + \pi)|^2 = I,$$
$$H(\xi)G(\xi)^* + H(\xi + \pi)G(\xi + \pi)^* = 0,$$
$$G(\xi)H(\xi)^* + G(\xi + \pi)H(\xi + \pi)^* = 0.$$

Относительно мультивсплесковой функции проектор $Q_n$ можно записать

$$Q_n f(x) = \sum_k \langle f, \boldsymbol{\psi}_{nk} \rangle \boldsymbol{\psi}_{nk}(x),$$

где $\boldsymbol{\psi}_{nk}(x) = \Big(2^{n/2}\psi_0(2^n x - k),\, 2^{n/2}\psi_1(2^n x - k),\, \cdots,\, 2^{n/2}\psi_{r-1}(2^n x - k)\Big)^T$ либо, если записать поэлементно

$$Q_n f(x) = \sum_{k\in\mathcal{Z}}\sum_{j=0}^{r-1} \beta_{j,\,n,\,k}\psi_{j,\,n,\,k}(x).$$

Здесь

$$\beta_{j,\,n,\,k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,\,n,\,k}(x) f(x)dx, \quad \psi_{j,\,n,\,k}(x) = 2^{n/2}\psi_j(2^n x - k).$$

# 4. Непрерывное мультивсплесковое преобразование

**Определение 4.6.** Непрерывным мультивсплесковым преобразованием назовем совокупность сверток

$$\{(f * \overline{\psi}_0^s)(\xi),\, (f * \overline{\psi}_1^s)(\xi),\, \cdots,\, (f * \overline{\psi}_{r-1}^s)(\xi)\},$$

где $f \in L_2$ и $\overline{\psi}_i^s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi_i^*(\frac{-t}{s})$.

Для сверток имеем

$$W_i f(\xi,\, s) = (f * \overline{\psi_i^s})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{s}}\int\limits_R f(t)\psi_i^*\left(\frac{t-\xi}{s}\right)dt,$$

где $s \neq 0$.

**Теорема 4.4.** Пусть $\psi \in L^2(\mathcal{R})^r$ — вещественная вектор-функция, такая, что

$$C_\psi = \int\limits_0^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{|\widehat{\psi}_i(\omega)|^2}{\omega}d\omega < \infty.$$

Любая $f \in L^2(\mathcal{R})$ удовлетворяет равенствам

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1} W_i f(\xi,\, s)\frac{1}{\sqrt{s}}\psi_i\Big(\frac{t-\xi}{s}\Big)d\xi\frac{ds}{s^2}; \tag{4.11}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\Big|W_i f(\xi,\, s)\Big|^2 d\xi\frac{ds}{s^2}. \tag{4.12}$$

**Доказательство.** Докажем сначала (4.11). Обозначим правую часть за $b(t)$. Заменим подынтегральное выражение на свертку

$$b(t) = \frac{1}{C_\psi}\int\limits_0^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1} W_i f(\cdot,\, s) \star \psi_i^s(t)\frac{ds}{s^2} = \frac{1}{C_\psi}\int\limits_0^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1} f \star \overline{\psi_i^s} \star \psi_i^s(t)\frac{ds}{s^2},$$

где $\psi_i^s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi_i(\frac{t}{s})$.

Для доказательства (4.11) покажем равенство преобразований Фурье $\widehat{b} = \widehat{f}$. Имеем

$$\widehat{b}(\omega) = \frac{1}{C_\psi}\int\limits_0^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\widehat{f}(\omega)\sqrt{s}\widehat{\psi_i^*}(s\omega)\sqrt{s}\widehat{\psi}_i(s\omega)\frac{ds}{s^2} = \frac{\widehat{f}(\omega)}{C_\psi}\int\limits_0^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1}|\widehat{\psi}_i(s\omega)|^2\frac{ds}{s^2}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $|\widehat{\psi}_i(\omega)|^2 = |\widehat{\psi}_i(-\omega)|^2$, в силу того, что $\psi_i$ — вещественные функции. Замена переменных $\xi = s\omega$ приводит к равенству

$$\widehat{b}(\omega) = \frac{\widehat{f}(\omega)}{C_\psi}\int\limits_0^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{|\widehat{\psi}_i(\xi)|^2}{\xi}d\xi = \widehat{f}(\omega).$$

Теперь покажем истинность (4.12). Применяем равенство Планшереля

$$\frac{1}{C_\psi}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\Big|W_i f(\xi,\, s)\Big|^2 d\xi\frac{ds}{s^2} = \frac{1}{2\pi C_\psi}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1}|\widehat{f}(\omega)\sqrt{s}\widehat{\psi_i^*}(s\omega)|^2 d\omega\frac{ds}{s^2}.$$

Меняем порядок интегрирования, делаем замену переменных во внутреннем интеграле, как при доказательстве предыдущей формулы, и еще раз, применив формулу Планшереля, получим

$$\frac{1}{2\pi C_\psi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(\omega)|^2\int\limits_0^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{|\widehat{\psi}_i(\xi)|^2}{\xi}d\xi d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega = \|f\|^2.$$

Теорема доказана.

Предположение

$$C_\psi = \int\limits_0^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{|\widehat{\psi}_i(\omega)|^2}{\omega}d\omega < \infty$$

называется условием допустимости. Это условие выполняется благодаря тому, что $\widehat{\psi}_i(0) = 0$, что, в свою очередь, верно в силу нулевого среднего.

Заметим также, что

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{|\widehat{\psi}_i(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega = \int\limits_0^{+\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{|\widehat{\psi}_i(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega.$$

## 5. Двоичное мультивсплесковое преобразование

Определим двоичное непрерывное мультивсплесковое преобразование, полагая масштабный параметр $\eta$ равным двоичной последовательности $\{2^{-j}\}_{j\in\mathcal{Z}}$. В результате получим для каждого $i = 0, \ldots, r-1$ последовательность функций

$$W_i f(\xi,\, 2^{-j}) = (f * \overline{\psi}_i^{2^{-j}})(\xi) = \sqrt{2^j}\int\limits_R f(t)\psi_i^*\left(\frac{t-\xi}{2^{-j}}\right)dt. \tag{5.13}$$

**Определение 5.7.** Мультивсплеск $\boldsymbol{\psi} \in L^2(\mathcal{R})^r$ называется двоичным, если существуют две константы $A$ и $B$ такие, что $0 < A \leqslant B < \infty$ и для всех $\omega \in \mathcal{R}\backslash\{0\}$

$$A \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}|\widehat{\psi}_i(2^{-j}\omega)|^2 \leqslant B. \tag{5.14}$$

Условие (5.14) называется условием устойчивости.

Определим новый двоичный мультивсплеск в преобразованиях Фурье следующим образом:

$$\widehat{\widetilde{\psi}}_i(\omega) := \frac{\widehat{\psi}_i(\omega)}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{r-1}|\widehat{\psi}_i(2^{-k}\omega)|^2}. \tag{5.15}$$

Для любой функции $f \in L^2(\mathcal{R})$ можно записать

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2^{3j/2} \quad W_i f(\xi,\, 2^{-j})\widetilde{\psi}\Big(2^j(x-\xi)\Big)d\xi = \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2^{3j/2}\widehat{f_i^j}(\omega)2^{-j}\widehat{\widetilde{\psi}}(2^{-j}\omega)e^{\mathcal{I}x\omega}d\omega = \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2^{j/2}\sqrt{2^{-j}}\widehat{\psi}_i^{\,*}(2^{-j}\omega)\widehat{f}(\omega)\widehat{\widetilde{\psi}}(2^{-j}\omega)e^{\mathcal{I}x\omega}d\omega = \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(\omega)\widehat{\psi}_i^{\,*}(2^{-j}\omega)\widehat{\psi}_i(2^{-j}\omega)}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{r-1}|\widehat{\psi}_i(2^{-k-j}\omega)|^2}e^{\mathcal{I}x\omega}d\omega = \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(\omega)|\widehat{\psi}_i(2^{-j}\omega)|^2}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{r-1}|\widehat{\psi}_i(2^{-k}\omega)|^2}e^{\mathcal{I}x\omega}d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{\mathcal{I}x\omega}d\omega = f(x).
\end{aligned}$$

**Определение 5.8.** Вектор-функция $\widetilde{\boldsymbol{\psi}} \in L^2(\mathcal{R})^r$ называется двоичным двойственным двоичного мультивсплеска $\boldsymbol{\psi}$, если для каждой функции $f \in L^2(\mathcal{R})$ справедливо равенство:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2^{3j/2}W_i f(\xi,\, 2^{-j})\widetilde{\psi}\Big(2^j(x-\xi)\Big)d\xi.$$

**Теорема 5.5.** Пусть $\boldsymbol{\psi}$ — двоичный мультивсплеск, тогда вектор-функция $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}$, компоненты преобразования Фурье которой даются формулой (5.15), является двоично двойственным $\boldsymbol{\psi}$. Более того, $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}$ также двоичный мультивсплеск, и выполняется двойное неравенство:

$$\frac{1}{B} \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{r-1} |\widehat{\widetilde{\psi}}_i(2^{-j}\omega)|^2 \leqslant \frac{1}{A}.$$

**Доказательство.** Из (5.14) следует

$$\frac{1}{B} \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{r-1} |\widehat{\psi}_i(2^{-j}\omega)|^2} \leqslant \frac{1}{A}; \ \frac{|\widehat{\psi}_i(\omega)|}{B} \leqslant \frac{|\widehat{\psi}_i(\omega)|}{\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{r-1} |\widehat{\psi}_i(2^{-j}\omega)|^2} \leqslant \frac{|\widehat{\psi}_i(\omega)|}{A};$$

$$\frac{|\widehat{\psi}_i(\omega)|^2}{B^2} \leqslant |\widehat{\widetilde{\psi}}_i(\omega)|^2 \leqslant \frac{|\widehat{\psi}_i(\omega)|^2}{A^2};$$

$$\frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{r-1} |\widehat{\psi}_i(2^{-k}\omega)|^2}{B^2} \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{r-1} |\widehat{\widetilde{\psi}}_i(2^{-k}\omega)|^2 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{r-1} |\widehat{\psi}_i(2^{-k}\omega)|^2}{A^2}.$$

Из двойного неравенства и (5.14) следует

$$\frac{1}{B} \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{r-1} |\widehat{\widetilde{\psi}}_i(2^{-k}\omega)|^2 \leqslant \frac{1}{A},$$

а это и означает, что $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}$ является двоичным мультивсплеском.

Теорема доказана.

**Теорема 5.6.** Если $\boldsymbol{\psi}$ — двоичный мультивсплеск, тогда

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{r-1} 2^j \|W_i f(\xi, 2^{-j})\|^2 \leqslant B\|f\|^2.$$

Если для любого $\omega \in \mathcal{R}\backslash\{0\}$, $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \widehat{\psi_i^*}(2^{-j}\omega)\widehat{\widetilde{\psi}}_i(2^{-j}\omega) = 1, \tag{5.16}$$

то

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{r-1} 2^j W_i f(\cdot, 2^{-j}) \star \widehat{\widetilde{\psi}_i^{2^{-j}}}(t). \tag{5.17}$$

**Доказательство.** Обозначим

$$f_i^j(\xi) = W_i f(\xi, 2^{-j}).$$

Из преобразования Фурье (5.13) относительно $\xi$ следует

$$\widehat{f_i^j}(\omega) = \sqrt{2^{-j}}\,\widehat{\psi}_i^{\,*}(2^{-j}\omega)\widehat{f}(\omega). \tag{5.18}$$

Умножим (5.14) на $|\widehat{f}(\omega)|^2$ и применим (5.18)

$$A|\widehat{f}(\omega)|^2 \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\sqrt{2^j}|\widehat{f_i^j}(\omega)|^2 \leqslant B|\widehat{f}(\omega)|^2.$$

Интегрируем по $\omega$ и, применив равенство Парсеваля, получим

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}2^j\|W_i f(\xi,\, 2^j)\|^2 \leqslant B\|f\|^2.$$

Теперь докажем (5.17). Для доказательства возьмем преобразование Фурье от обеих его частей, учитывая (5.18)

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}2^j\widehat{f_i^j}(\omega)\sqrt{2^{-j}}\widehat{\widetilde{\psi}}_i(2^{-j}\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\widehat{f}(\omega)\widehat{\psi}_i^{\,*}(2^{-j}\omega).\widehat{\widetilde{\psi}}_i(2^{-j}\omega).$$

Подставляя (5.16), получим

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(\omega),$$

откуда следует истинность (5.17).

Теорема доказана.

Теорема (5.6) доказывает, что если частотная ось полностью покрывается растянутыми двоичными преобразованиями Фурье мультивсплесков, то это обеспечивает полное и устойчивое представление.

**Теорема 5.7.** Пусть $H(\xi) = \{h_{ij}(\xi)\}$ и $G(\xi) = \{g_{ij}(\xi)\}$ определяются равенствами (2.2) и (3.6) соответственно. Если

$$\sum_{i=0}^{r-1}\Big(|h_{ij}(\xi/2)|^2 + |g_{ij}(\xi/2)|^2\Big) = 1, \tag{5.19}$$

для всех $j = 0, \ldots, r-1$ и

$$\sum_{i=0}^{r-1}\Big(h_{ij}(\xi/2)\overline{h_{im}(\xi/2)} + g_{ij}(\xi/2)\overline{g_{im}(\xi/2)}\Big) = 0, \tag{5.20}$$

для всех $m = 0, \ldots, r-1,\ j = 0, \ldots, r-1,\ j \neq m$,
тогда

$$\sum_{i=0}^{r-1}\Big(|\widehat{\varphi}_i(\xi)|^2 + |\widehat{\psi}_i(\xi)|^2\Big) = \sum_{i=0}^{r-1}|\widehat{\varphi}_i(\xi/2)|^2,\ \xi \in \mathcal{R}. \tag{5.21}$$

**Доказательство.** Из (2.3) и (3.7) получим

$$\widehat{\varphi}_i(\xi) = \sum_{j=0}^{r-1}h_{ij}(\xi/2)\widehat{\varphi_j}(\xi/2), \tag{5.22}$$

$$\widehat{\psi}_i(\xi) = \sum_{j=0}^{r-1}g_{ij}(\xi/2)\widehat{\varphi_j}(\xi/2). \tag{5.23}$$

Учитывая (5.22) и (5.23), левую часть равенства (5.21) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^{r-1}\left(\Big|\sum_{j=0}^{r-1}h_{ij}(\xi/2)\widehat{\varphi_j}(\xi/2)\Big|^2+\Big|\sum_{j=0}^{r-1}g_{ij}(\xi/2)\widehat{\varphi_j}(\xi/2)\Big|^2\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{m=0}^{r-1}\Big(h_{ij}(\xi/2)\widehat{\varphi_j}(\xi/2)\overline{h_{im}(\xi/2)\widehat{\varphi_m}(\xi/2)}+$$

$$+\ g_{ij}(\xi/2)\widehat{\varphi_j}(\xi/2)\overline{g_{im}(\xi/2)\widehat{\varphi_m}(\xi/2)}\Big)=$$

$$=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{m=0}^{r-1}\widehat{\varphi_j}(\xi/2)\overline{\widehat{\varphi_m}(\xi/2)}\Big(h_{ij}(\xi/2)\overline{h_{im}(\xi/2)}+g_{ij}(\xi/2)\overline{g_{im}(\xi/2)}\Big).$$

Сумму из последнего равенства распишем на две, в первой из которых $j=m$, а во второй $j\neq m$. В результате получим

$$\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}|\widehat{\varphi_j}(\xi/2)|^2\Big(|h_{ij}(\xi/2)|^2+|g_{ij}(\xi/2)|^2\Big)+$$

$$+\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{m=0}^{r-1}\widehat{\varphi_j}(\xi/2)\overline{\widehat{\varphi_m}(\xi/2)}\Big(h_{ij}(\xi/2)\overline{h_{im}(\xi/2)}+g_{ij}(\xi/2)\overline{g_{im}(\xi/2)}\Big).$$

Поменяв индекс суммирования в правой части равенства (5.21) на $j$ и порядок суммирования в последнем выражении, запишем

$$\sum_{j=0}^{r-1}|\widehat{\varphi_j}(\xi/2)|^2\sum_{i=0}^{r-1}\Big(|h_{ij}(\xi/2)|^2+|g_{ij}(\xi/2)|^2\Big)+$$

$$+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{m=0}^{r-1}\widehat{\varphi_j}(\xi/2)\overline{\widehat{\varphi_m}(\xi/2)}\Big(h_{ij}(\xi/2)\overline{h_{im}(\xi/2)}+g_{ij}(\xi/2)\overline{g_{im}(\xi/2)}\Big)=$$

$$=\sum_{j=0}^{r-1}|\widehat{\varphi_j}(\xi/2)|^2. \tag{5.24}$$

Из (5.24) следует, что если выполняются условия (5.19) и (5.20), то выполняется и (5.21).

Теорема доказана.

**Теорема 5.8.** Если в уравнениях (2.1) и (3.5) число ненулевых коэффициентов равно двум, тогда условия теоремы (5.7) выполняются автоматически.

**Доказательство.** Из (3.8)–(3.10) запишем соотношения между матричными коэффициентами

$$H^{(0)}H^{(0)T}+H^{(1)}H^{(1)T}=I; \tag{5.25}$$

$$G^{(0)}G^{(0)T}+G^{(1)}G^{(1)T}=I; \tag{5.26}$$

$$H^{(0)}G^{(0)T} + H^{(1)}G^{(1)T} = 0; \tag{5.27}$$

$$G^{(0)}H^{(0)T} + G^{(1)}H^{(1)T} = 0. \tag{5.28}$$

Из (2.2) получим

$$H(\xi) = \{h_{ij}(\xi)\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(H^{(0)} + H^{(1)}e^{-\mathcal{I}\xi}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{h_{ij}^{(0)} + h_{ij}^{(1)}e^{-\mathcal{I}\xi}\}. \tag{5.29}$$

Аналогично из (3.6) получим

$$G(\xi) = \{g_{ij}(\xi)\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(G^{(0)} + G^{(1)}e^{-\mathcal{I}\xi}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{g_{ij}^{(0)} + g_{ij}^{(1)}e^{-\mathcal{I}\xi}\}. \tag{5.30}$$

Применим полученные равенства (5.29) и (5.30)

$$\Big|h_{ij}(\xi/2)\Big|^2 = \frac{1}{2}\left(\Big(h_{ij}^{(0)}\Big)^2 + h_{ij}^{(0)}h_{ij}^{(1)}(e^{\mathcal{I}\xi} + e^{-\mathcal{I}\xi}) + \Big(h_{ij}^{(1)}\Big)^2\right);$$

$$\Big|g_{ij}(\xi/2)\Big|^2 = \frac{1}{2}\left(\Big(g_{ij}^{(0)}\Big)^2 + g_{ij}^{(0)}g_{ij}^{(1)}(e^{\mathcal{I}\xi} + e^{-\mathcal{I}\xi}) + \Big(g_{ij}^{(1)}\Big)^2\right).$$

Учитывая полученные равенства для левой части (5.19), покажем истинность равенства

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{r-1}\left(\Big(h_{ij}^{(0)}\Big)^2 + \Big(g_{ij}^{(0)}\Big)^2 + \Big(h_{ij}^{(1)}\Big)^2 + \Big(g_{ij}^{(1)}\Big)^2 + \Big(h_{ij}^{(0)}h_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(0)}g_{ij}^{(1)}\Big)(e^{\mathcal{I}\xi} + e^{-\mathcal{I}\xi})\right) = 1. \tag{5.31}$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$U = \begin{pmatrix} H^{(0)} & H^{(1)} \\ G^{(0)} & G^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матричное произведение

$$UU^T = \begin{pmatrix} H^{(0)}H^{(0)T} + H^{(1)}H^{(1)T} & H^{(0)}G^{(0)T} + H^{(1)}G^{(1)T} \\ G^{(0)}H^{(0)T} + G^{(1)}H^{(1)T} & G^{(0)}G^{(0)T} + G^{(1)}G^{(1)T} \end{pmatrix}.$$

Учитывая соотношения (5.25)–(5.28), получаем, что $UU^T = I$. Следовательно, $U$ — ортогональная матрица. Ортогональная матрица $U$ является также нормальной, т. е. $UU^T = U^TU = I$. Запишем соотношения, которые следуют из нормальности матрицы $U$:

$$H^{(0)T}H^{(0)} + G^{(0)T}G^{(0)} = I; \tag{5.32}$$

$$H^{(1)T}H^{(1)} + G^{(1)T}G^{(1)} = I; \tag{5.33}$$

$$H^{(0)T}H^{(1)} + G^{(0)T}G^{(1)} = 0; \tag{5.34}$$

$$H^{(1)T}H^{(0)} + G^{(1)}G^{(0)T} = 0. \tag{5.35}$$

Из (5.32)–(5.35) следует, что

$$\sum_{i=0}^{r-1}\left(\left(h_{ij}^{(0)}\right)^2+\left(g_{ij}^{(0)}\right)^2\right)=\sum_{i=0}^{r-1}\left(\left(h_{ij}^{(1)}\right)^2+\left(g_{ij}^{(1)}\right)^2\right)=1$$

и

$$\sum_{i=0}^{r-1}\left(h_{ij}^{(0)}h_{ij}^{(1)}+g_{ij}^{(0)}g_{ij}^{(1)}\right)=0$$

для всех $j=0,\,\ldots,\,r-1$, что, в свою очередь, доказывает истинность (5.31) и, следовательно, (5.19).

Теперь покажем равенство (5.20). Подставляя (5.29) и (5.30), получаем

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{r-1}\left((h_{ij}^{(0)}+h_{ij}^{(1)}e^{-\mathcal{I}\xi})(h_{im}^{(0)}+h_{im}^{(1)}e^{\mathcal{I}\xi})+(g_{ij}^{(0)}+g_{ij}^{(1)}e^{-\mathcal{I}\xi})(g_{im}^{(0)}+g_{im}^{(1)}e^{\mathcal{I}\xi})\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{r-1}\left((h_{ij}^{(0)}h_{im}^{(0)}+g_{ij}^{(0)}g_{im}^{(0)})+(h_{ij}^{(1)}h_{im}^{(0)}+g_{ij}^{(1)}g_{im}^{(0)})e^{-\mathcal{I}\xi}+(h_{ij}^{(0)}h_{im}^{(1)}+g_{ij}^{(0)}g_{im}^{(1)})e^{\mathcal{I}\xi}\right). \tag{5.36}$$

Из (5.32)–(5.35) получим

$$\sum_{i=0}^{r-1}(h_{ij}^{(0)}h_{im}^{(0)}+g_{ij}^{(0)}g_{im}^{(0)})=0;$$

$$\sum_{i=0}^{r-1}(h_{ij}^{(1)}h_{im}^{(0)}+g_{ij}^{(1)}g_{im}^{(0)})=0;$$

$$\sum_{i=0}^{r-1}(h_{ij}^{(0)}h_{im}^{(1)}+g_{ij}^{(0)}g_{im}^{(1)})=0,$$

откуда следует, что (5.36) равно нулю, что доказывает истинность (5.20).

Теорема доказана.

**Теорема 5.9.** Пусть условия теоремы (5.7) выполнены, тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}|\widehat{\psi}_i(2^k\omega)|^2=1.$$

**Доказательство** Из теоремы (5.7) следует

$$\sum_{i=0}^{r-1}|\widehat{\psi}_i(\xi)|^2=\sum_{i=0}^{r-1}\left(|\widehat{\varphi}_i(\xi/2)|^2-|\widehat{\varphi}_i(\xi)|^2\right),$$

тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}|\widehat{\psi}_i(2^k\omega)|^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\left(|\widehat{\varphi}_i(2^{k-1}\omega)|^2-|\widehat{\psi}_i(2^k\omega)|^2\right).$$

Распишем правую часть последнего равенства

$$\cdots+\sum_{i=0}^{r-1}\left|\widehat{\phi}_i\left(\frac{w}{4}\right)\right|^2-\sum_{i=0}^{r-1}\left|\widehat{\phi}_i\left(\frac{w}{2}\right)\right|^2+\sum_{i=0}^{r-1}\left|\widehat{\phi}_i\left(\frac{w}{2}\right)\right|^2-\sum_{i=0}^{r-1}|\widehat{\phi}_i(w)|^2+$$

$$+\sum_{i=0}^{r-1}|\widehat{\phi}_i(w)|^2-\sum_{i=0}^{r-1}\left|\widehat{\phi}_i(2w)\right|^2+\sum_{i=0}^{r-1}\left|\widehat{\phi}_i(2w)\right|^2-\sum_{i=0}^{r-1}\left|\widehat{\phi}_i(4w)\right|^2+\cdots.$$

Упрощая, получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}|\widehat{\psi}_i(2^k\omega)|^2=\sum_{i=0}^{r-1}\left(|\widehat{\varphi}_i(0)|^2-|\widehat{\psi}_i(\infty)|^2\right)=1.$$

В последнем равенстве мы воспользовались свойством преобразования фурье-функций с компактным носителем

$$|\widehat{\phi}_i(\infty)|^2=0 \quad \text{для всех} \quad i=0,\,\ldots,\,r-1$$

и тем, что

$$\sum_{i=0}^{r-1}|\widehat{\phi}_i(0)|^2=1.$$

Теорема доказана.

*Автор выражает благодарность профессору ВГУ Новикову Игорю Яковлевичу за постановку задачи.*

## Литература

[1] Cotronei M., Montefusco L., Puccio L. Multiwavelet Analysis and Signal Processing // IEEE Trans. on Circuits and Systems II. 1998. V. 45. P. 970–987.

[2] Keinert F. Wavelet and Multiwavelet. London: Chapman & Hall/CRC, 2004.

[3] Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.

Поступила в редакцию 16/$XI$/2009;
в окончательном варианте — 16/$XI$/2009.

# ON DYADIC MULTIWAVELET TRANSFORM

© 2010 P.G. Severov[2]

In the paper continuous and dyadic multiwavelet transforms and dyadic multiwavelets are defined. The author considers admissibility condition. The theorem about signal reconstruction from its multiwavelet decomposition and analogs of other theorems from the theory of wavelets are proved.

**Key words**: multiwavelet, multiscaling function, multiresolution analysis of multiplicity $r$, continuous multiwavelet transformation, dyadic multiwavelet transformation.

Paper received 16/*XI*/2009.
Paper accepted 16/*XI*/2009.

[2]Severov Pavel Grigorievich (`severovpg@gmail.com`), Department of Functional Analysis and Operation Equations, Voronezh State University, Voronezh, 394006, Russia.