УДК 512.815.4

АЛГЕБРА ИНВАРИАНТОВ ПРИСОЕДИНЕННОГО ДЕЙСТВИЯ УНИТРЕУГОЛЬНОЙ ГРУППЫ В НИЛЬРАДИКАЛЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПОДАЛГЕБРЫ[1]

© 2010 В.В Севостьянова[2]

В работе изучается алгебра инвариантов присоединенного действия унитреугольной группы в нильрадикале параболической подалгебры. Поставлена гипотеза о строении алгебры инвариантов. Гипотеза проверена для параболических подалгебр специального вида.

Ключевые слова: алгебра инвариантов, параболическая подалгебра, треугольная группа, присоединенное представление.

Рассмотрим полную матричную группу $\mathrm{GL}(n,K)$, определенную над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики. Пусть B (соотв. N) ее борелевская (соотв. максимальная унипотентная) подгруппа, состоящая из треугольных матриц с ненулевыми (соотв. единичными) элементами по диагонали. Фиксируем параболическую подгруппу P, содержащую B. Обозначим через $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ подалгебры Ли в $\mathfrak{gl}(n,K)$, соответствующие P, B, N. Разложим $\mathfrak{p}=\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{m}$ в виде суммы нильрадикала $\mathfrak{m}$ и блочно-диагональной подалгебры $\mathfrak{r}$ с размерами блоков $(n_1,\ldots,n_s)$. Подалгебра $\mathfrak{m}$ инвариантна относительно присоединенного действия группы P (и, следовательно, ее подгруппы N). Рассмотрим регулярное представление группы N в алгебре $K[\mathfrak{m}]$ и поле $K(\mathfrak{m})$. Подалгебра $\mathfrak{m}$ содержит открытую по Зарискому P-орбиту [1], которая называется орбитой Ричардсона, следовательно, алгебра инвариантов $K[\mathfrak{m}]^P=K$. В настоящей работе мы будем обсуждать вопрос о строении алгебры инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$. В случае $P=B$ алгебра инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$ является алгеброй многочленов $K[x_{12},x_{23},\ldots,x_{n-1,n}]$. Случай, когда $\mathfrak{r}$ является суммой двух блоков, может быть найден, например, в работе [2]. В работе [5] дается полный ответ о строении поля инвариантов $K(\mathfrak{m})^N$. Вопрос о строении $K[\mathfrak{m}]^N$ в случае произвольной параболической подалгебры остается открытым. Не известно

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ 08-01-00151-а.

[2]Севостьянова Виктория Владимировна (berlua@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

даже, будет ли алгебра инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$ конечно порождена. В предлагаемой работе мы выписываем серию полиномов (теорема 9), которые лежат в алгебре инвариантов, и ставим гипотезу, в которой говорим, что эта серия порождает $K[\mathfrak{m}]^N$. Справедливость гипотезы проверена для параболической подалгебры специального вида (см. теорему 11).

Сначала сформулируем необходимые в дальнейшем определения. Каждый положительный корень γ в $\mathfrak{gl}(n, K)$ имеет вид [3]

$$\gamma = \varepsilon_i - \varepsilon_j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Отождествим γ с парой (i, j) и множество положительных корней Δ^+ с множеством пар (i, j), $i < j$. Система положительных корней $\Delta^+_{\mathfrak{r}}$ редуктивной подалгебры $\mathfrak{r}$ является подсистемой в Δ^+.

Рассмотрим стандартный базис $\{E_{i,j} : \ i < j\}$ в $\mathfrak{n}$. Будем использовать также обозначение E_γ для базисного элемента $E_{i,j}$, если $\gamma = (i, j)$.

Определим отношение в Δ^+, для которого $\gamma' \succ \gamma$, если $\gamma' - \gamma \in \Delta^+$. Обозначим через M множество тех $\gamma \in \Delta^+$, таких, что $E_\gamma \in \mathfrak{m}$. Отождествим $K[\mathfrak{m}]$ с алгеброй многочленов от переменных $x_{i,j}$, $(i, j) \in M$.

Определение 1. Подмножество S в M будем называть *базой*, если элементы S попарно не сравнимы и для любого $\gamma \in M \setminus S$ существует $\xi \in S$ такой, что $\gamma \succ \xi$.

Отметим, что M имеет единственную базу S, которая строится следующим образом. Образуем множество S_1 минимальных (в смысле $\succ$) элементов в M, то есть таких элементов $\gamma \in M$, что для любого $\xi \in M$ выполняется $\xi \succ \gamma$, либо корни ξ и γ попарно не сравнимы. По определению, $S_1 \subset S$. Образуем множество M_1, которое получается из M удалением S_1 и всех

$$\{\gamma \in M : \ \exists \ \xi \in S_1, \ \gamma \succ \xi\}.$$

Подмножество минимальных элементов S_2 в M_1 также содержится в S и т. д. Продолжая процесс дальше, мы получаем базу S.

Определение 2. Упорядоченный набор положительных корней

$$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$$

будем называть *цепочкой*, если $\gamma_1 = (a_1, a_2)$, $\gamma_2 = (a_2, a_3)$, $\gamma_3 = (a_3, a_4)$ и т. д.

Определение 3. Будем говорить, что два корня $\xi, \xi' \in S$ образуют *допустимую пару* $q = (\xi, \xi')$, если существует $\alpha_q \in \Delta^+_{\mathfrak{r}}$ такой, что набор корней $\{\xi, \alpha_q, \xi'\}$ является цепочкой. Заметим, что корень α_q находится по допустимой паре q однозначно.

Образуем множество $Q = Q(\mathfrak{p})$, состоящее из допустимых пар корней из S. По каждой допустимой паре $q = (\xi, \xi')$ построим положительный корень $\varphi_q = \alpha_q + \xi'$. Рассмотрим подмножество $\Phi = \{\varphi_q : \ q \in Q\}$.

Мы будем строить по параболической подалгебре диаграмму, представляющую собой $n \times n$ матрицу, на которой корни из S отмечены символом $\otimes$, а корни из Φ — символом $+$. Остальные места в диаграмме не заполняются. Ниже приведена диаграмма (рис. 1) для параболической подалгебры, редуктивная часть которой состоит из блоков размерами (2, 1, 3, 2).

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\
\hline
1 & & & & \otimes & & & & 1 \\
 & 1 & \otimes & & & & & & 2 \\
 & & 1 & \otimes & & & & & 3 \\
 & & & 1 & & & + & + & 4 \\
 & & & & 1 & & + & \otimes & 5 \\
 & & & & & 1 & \otimes & & 6 \\
 & & & & & & 1 & & 7 \\
 & & & & & & & 1 & 8
\end{array}
$$

Рис. 1

Рассмотрим формальную матрицу $\mathbb{X}$, в которой на местах $(i,j) \in M$ стоят переменные $x_{i,j}$, а остальные элементы равны нулю. Для любого положительного корня $\gamma = (a,b)$ обозначим через S_γ множество тех $\xi = (i,j)$, содержащихся в S, что $i > a$ и $j < b$. Предположим

$$S_\gamma = \{(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)\}.$$

Обозначим через M_γ минор M_I^J матрицы $\mathbb{X}$ с упорядоченными системами строк $I = \{a, i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцов $J = \{j_1, \ldots, j_k, b\}$.

По каждой допустимой паре $q = (\xi, \xi')$ построим многочлен

$$L_q = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta_{\mathfrak{r}}^+ \cup \{0\} \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_q}} M_{\xi+\alpha_1} M_{\alpha_2+\xi'}. \qquad (1)$$

Теорема 4 [4]. *Для произвольной параболической подалгебры система многочленов*

$$\Big\{ M_\xi, \ \xi \in S; \ L_q, \ q \in Q \Big\}$$

содержится в $K[\mathfrak{m}]^N$ *и алгебраически независима над* K.

Обозначим через $\mathcal{Y}$ подмножество в $\mathfrak{m}$, состоящее из матриц вида

$$\sum_{\xi \in S} c_\xi E_\xi + \sum_{\varphi \in \Phi} c'_\varphi E_\varphi, \ \text{ где } c_\xi \neq 0, \ c'_\varphi \neq 0.$$

Определение 5. Будем называть матрицы из $\mathcal{Y}$ *каноническими.*

В работе [5] доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Существует непустое открытое по Зарискому подмножество $U \subset \mathfrak{m}$ такое, что N-орбита любого $x \in U$ пересекает $\mathcal{Y}$ в единственной точке.*

Пусть $\mathcal{S}$ — множество знаменателей, порожденное минорами M_ξ, $\xi \in S$. Образуем локализацию $K[\mathfrak{m}]^N_{\mathcal{S}}$ алгебры инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$ по $\mathcal{S}$. Поскольку миноры M_ξ являются N-инвариантами, то $K[\mathfrak{m}]^N_{\mathcal{S}} = (K[\mathfrak{m}]_S)^N$.

Теорема 7 [5]**.** *Кольцо $K[\mathfrak{m}]^N_{\mathcal{S}}$ является кольцом многочленов от $M_\xi^{\pm 1}$, $\xi \in S$, и L_q, $q \in Q$.*

Отсюда немедленно следует следующий результат.

Теорема 8 [5]**.** *Поле инвариантов $K(\mathfrak{m})^N$ — поле рациональных функций от M_ξ, $\xi \in S$, и L_q, $q \in Q$.*

Выписанные многочлены M_ξ, $\xi \in S$, и L_q, $q \in Q$, образуют поле инвариантов, но, конечно, не алгебру инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$. Ниже мы приведем пример параболической подалгебры, для которой

$$K[M_\xi, L_q]_{\substack{\xi\in S\\ q\in Q}} \neq K[\mathfrak{m}]^N,$$

и укажем многочлен, который необходимо добавить к указанному списку многочленов, чтобы получить алгебру инвариантов.

Пусть $\mathfrak{p}$ — произвольная параболическая подалгебра. Предположим, что ее редуктивная часть состоит из блоков, размеры которых $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$. Тогда $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_s$. Обозначим $R_k = \sum_{t=1}^{k} r_t$. Всякий корень $(i,j) \in M$, удовлетворяющий условию

$$R_{k-1} < i \leqslant R_k \ \text{ и } \ R_k < j \leqslant n,$$

назовем *корнем, лежащим правее k-го блока в* $\mathfrak{r}$. Если для корня $(i,j) \in M$ справедливо

$$1 \leqslant i \leqslant R_{k-1} \ \text{ и } \ R_{k-1} < j \leqslant R_k,$$

назовем его *корнем, лежащим выше k-го блока в* $\mathfrak{r}$.

Далее мы выпишем серию полиномов, которые не содержатся в алгебре $K[M_\xi, L_q]_{\substack{\xi\in S\\ q\in Q}}$ и лежат в $K[\mathfrak{m}]^N$.

Пусть корень $(i,j) \in S \cup \Phi$. Обозначим

$$L_{i,j} = \begin{cases} L_{(\xi,\xi')}, \text{ если } (i,j) \in \Phi \text{ и соответствует допустимой паре } (\xi,\xi'); \\ M_{(a,i)} \cdot M_{(i,j)}, \text{ если } (i,j) \in S \text{ и существует число } a \text{ такое, что } \\ \hfill (a,i) \in S. \end{cases}$$

Предположим, что для некоторых номеров $m < l$ и $i < j$ корни

$$(m,i), (l,i), (m,j), (l,j) \tag{2}$$

содержатся в $S \cup \Phi$. Очевидно, что тогда корень (m,i) лежит в системе корней Φ. Предположим, что корню (m,i) соответствует некоторая допустимая пара $(\xi,\xi') \in Q$ для некоторых корней $\xi, \xi' \in S$. Обозначим

$$A_m^{i,j} = \frac{L_{m+1,i}L_{m,j} - L_{m+1,j}L_{m,i}}{M_\xi}. \tag{3}$$

Предположим, что для корней (2) выполнено следующее условие: не существует номера $\widetilde{i}$, $i<\widetilde{i}<j$ такого, что $(m,\widetilde{i})\in S\cup\Phi$. Обозначим

$$B^i_{m,l}=\frac{L_{m,j}L_{l,i}-L_{l,j}L_{m,i}}{M_{\xi'}}, \tag{4}$$

$$C^i_m=\frac{L_{m+1,i}L_{m,j}-L_{m+1,j}L_{m,i}}{M_\xi\cdot M_{\xi'}}. \tag{5}$$

Очевидно, что все рациональные функции (3)–(5) лежат в локализации $K[\mathfrak{m}]^N_{\mathcal{S}}$. Ниже мы докажем, что эти функции являются многочленами.

Теорема 9. $A^{i,j}_m$, $B^i_{m,l}$, $C^i_m\in K[\mathfrak{m}]^N$.

Доказательство.

I часть. Сначала покажем, что C^i_m является полиномом. Пусть корень (m,i) лежит правее k-го блока в $\mathfrak{r}$, то есть $R_{k-1}<m\leqslant R_k$. Предположим, что выше k-го блока лежит p корней из S, нетрудно убедиться, что тогда они имеют следующий вид:

$$(i_1,R_{k-1}+1),(i_2,R_{k-1}+2),\ldots,(i_p,R_{k-1}+p) \tag{6}$$

для некоторых $i_1>i_2>\ldots>i_p$. Заметим, что для первого корня в этом списке выполняется $i_1=R_{k-1}$. Пусть правее k-го блока находится q корней из S:

$$(R_k,j_1),(R_k-1,j_2),\ldots,(R_k-q+1,j_q) \tag{7}$$

для некоторых $j_1<j_2<\ldots<j_q$. Для первого корня в этом списке верно равенство $j_1=R_k+1$. Заметим, что в каждой из строк с номерами

$$R_{k-1}+1,R_{k-1}+2,\ldots,R_{k-1}+p$$

обязательно лежит корень из Φ. Действительно, пусть для некоторых номеров a и b таких, что $1\leqslant a\leqslant p$ и $1\leqslant b\leqslant q$, выполняется

$$R_{k-1}+a<R_k-b+1,\ \text{то есть}\ a<r_k-b+1.$$

Тогда пара корней $\Big((i_a,R_{k-1}+a),(R_k-b+1,j_b)\Big)$ является допустимой. Следовательно, корень $(R_{k-1}+a,j_b)$ лежит в системе Φ.

Изобразим часть диаграммы для $\mathfrak{p}$, содержащую следующие строки:

$$i_p<i_{p-1}<\ldots<i_1=R_{k-1}<R_{k-1}+1<R_{k-1}+2<\ldots<R_k$$

и столбцы

$$R_{k-1}+1<R_{k-1}+2<\ldots<R_k<R_k+1=j_1<j_2<\ldots<j_q.$$

				R_k	j_1	j_2	...	j_q	
$+$	$+$	...	$+$	$\otimes$					i_p
		...	$\otimes$						i_{p-1}
...	...	...							...
	$\otimes$								i_2
$\otimes$									$i_1 = R_{k-1}$
1					$+$	$+$	...	$+$	$R_{k-1}+1$
	1				$+$	$+$	...	$+$	$R_{k-1}+2$
		...			...	...	...	...	
		...			$+$	$+$	...	$\otimes$	...
			...		...	...	...		
			1			$\otimes$			$R_k - 1$
				1	$\otimes$				R_k

Пусть X — матрица общего вида из множества $\mathcal{Y}$.

$$X = \begin{pmatrix}
\cdots & & & & & & & & & & \\
& d_{p,1} & \cdots & d_{p,p-1} & a_p & & & & & & \\
& d_{p-1,1} & \cdots & a_{p-1} & 0 & & & 0 & & & \\
& \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & \\
& a_1 & \cdots & 0 & 0 & & & & & & \\
& & & & & c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots & c_{1,q} & \\
& & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
& & & & & c_{p,1} & c_{p,2} & \cdots & \cdots & b_q & \\
& & & & & 0 & 0 & b_{r_k-p} & \cdots & 0 & \\
& & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
& & 0 & & & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & \\
& & & & & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
& & & & & & & & & & \cdots
\end{pmatrix}$$

Так как $X \in \mathcal{Y}$, все значения a_u, b_v, $c_{u,v}$ и $d_{u,v}$ не равны нулю.

Корень (m, i) лежит правее k-го блока в $\mathfrak{r}$. Отметим, что $i = j_v$ для некоторого $1 \leqslant v \leqslant q$. Обозначим $u = m - R_{k-1}$ (здесь $1 \leqslant u \leqslant p$). Тогда справедливо неравенство $u + v \leqslant r_k - q + p$. Обозначим

$$\begin{array}{ll}
I = \{i_{u+1}, i_u, \ldots, i_1\}, & I' = \{R_k - v + 2, R_k - v + 3, \ldots, R_k\}, \\
J = \{j_1, j_2, \ldots, j_v, j_{v+1}\}, & J' = \{R_{k-1} + 1, R_{k-1} + 2, \ldots, R_{k-1} + u - 1\}.
\end{array}$$

Тогда $|I| = u+1$, $|J| = v+1$, $|I'| = v-1$, $|J'| = u-1$. Рассмотрим следующий определитель порядка $(u+v)$:

$$\widetilde{C}_m^i = \left| \begin{array}{c|c} M_I^{J'}(X) & M_I^J(X^2) \\ \hline 0 & M_{I'}^J(X) \end{array} \right|,$$

где $M_I^J(X)$ — минор матрицы X, стоящий на пересечении строк I и столбцов J. Покажем, что $\widetilde{C}_m^i \in K[\mathfrak{m}]^N$. Заметим, что любой многочлен из $K[\mathfrak{m}]$

является N-инвариантом, если он инвариантен относительно действия всех однопараметрических подгрупп $g_k(t) = 1+t\cdot E_{k,k+1}$, $1 \leqslant k < n$. Присоединенное действие $g_k(t)$ на матрицу $\mathbb{X}$ сводится к композиции двух элементарных преобразований: к k-й строке прибавляется $(k+1)$-я строка, умноженная на $-t$, и к $(k+1)$-му столбцу прибавляется k-й столбец, умноженный на t.

Для минора $M_I^{J'}(X)$ справедливы следующие два свойства:

1. Если $a > \min I$, $a \notin I$ и $b \in J'$, то элемент матрицы X, находящийся на месте (a, b), равен нулю.

2. Если $b < \max J'$, $b \notin J'$ и $a \in I$, то элемент матрицы X, находящийся на месте (a, b), равен нулю.

Аналогичные свойства верны для миноров $M_{I'}^{J}(X)$ и $M_I^J(X^2)$. Кроме того, миноры $M_I^{J'}(X)$ и $M_I^J(X^2)$ (соотв. $M_{I'}^J(X)$ и $M_I^J(X^2)$) образованы одинаковым набором строк (соотв. столбцов). Поэтому, так как $(gXg^{-1})^2 = gX^2g^{-1}$, присоединенное действие $g_k(t)$ не меняет минор $\widetilde{C}_m^i$.

Покажем теперь, что $\widetilde{C}_m^i = C_m^i$. Элементарными преобразованиями минор $M_I^J(X^2)$ приводится к следующему минору:

$$M_I^J(X^2) = \begin{vmatrix} a_{u+1}c_{u+1,1} & a_{u+1}c_{u+1,2} & \dots & a_{u+1}c_{u+1,v+1} \\ a_u c_{u,1} & a_u c_{u,2} & \dots & a_u c_{u,v+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 c_{2,1} & a_2 c_{2,2} & \dots & a_2 c_{2,v+1} \\ a_1 c_{1,1} & a_1 c_{1,2} & \dots & a_1 c_{1,v+1} \end{vmatrix}.$$

Минор $M_I^{J'}(X)$ матрицы X теми же элементарными преобразованиями может быть приведен к следующему минору:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{u-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислим значение минора $\widetilde{C}_m^i$:

$$\widetilde{C}_m^i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{u-1} & & & M_I^J(X^2) & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & & & & & & \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & & & & & & \\ & & & & 0 & 0 & \dots & b_{v-1} & 0 & 0 \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & & & 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{s=1}^{u+1} a_s \cdot \prod_{t=1}^{v-1} b_t \cdot (c_{u+1,v}c_{u,v+1} - c_{u+1,v+1}c_{u,v}). \qquad (8)$$

Непосредственная проверка показывает, что значение C_m^i на X в точности равно (8).

Рассмотрим отображение проектирования

$$\pi : K[\mathfrak{m}]^N \to K[\mathcal{Y}], \quad \pi(f) = f|_{\mathcal{Y}}.$$

Покажем, что оно является вложением. Действительно, если $f \in \operatorname{Ker}\pi$, то $f(\operatorname{Ad}_N \mathcal{Y}) = 0$. Поскольку, согласно теореме 6, $\operatorname{Ad}_N \mathcal{Y}$ содержит открытое по Зарискому подмножество, то $f \equiv 0$. Следовательно, π — вложение.

Далее, значения инвариантов $\widetilde{C}_m^i$ и C_m^i совпадают на X, следовательно, они совпадают и на прообразе $\pi^{-1}(X)$. Так как минор $\widetilde{C}_m^i$, построенный по произвольной матрице из $\mathfrak{m}$, является многочленом, то $C_m^i \in K[\mathfrak{m}]^N$.

II часть. Пусть корни (m,i), (m,j), $(m+1,i)$ и $(m+1,j)$ содержатся в системе корней $S \cup \Phi$ и лежат правее k-го блока в $\mathfrak{r}$. Покажем, что $A_m^{i,j} \in K[\mathfrak{m}]$. Доказательство проведем по индукции.

Как и раньше, предположим, что выше и правее k-го блока лежат корни (6) и (7) соответственно. Для некоторого w выполняется равенство $j = j_w$. Пусть корень (m, j_w) соответствует допустимой паре (ξ, ξ'). При фиксированном m справедливо следующее равенство для любых $1 \leqslant w < q$:

$$L_{m+1,i} M_{\xi'} C_m^{j_w} = A_m^{i,j_{w+1}} L_{m+1,j_w} - A_m^{i,j_w} L_{m+1,j_{w+1}}. \qquad (9)$$

Очевидно, что левая часть равенства (9) лежит в $K[\mathfrak{m}]$. Но $A_m^{i,j_{w+1}}$ содержится в кольце $K[\mathfrak{m}]$, если только $A_m^{i,j_w} \in K[\mathfrak{m}]$.

Для доказательства $A_m^{i,j_w} \in K[\mathfrak{m}]$ достаточно показать, что A_m^{i,j_1} является многочленом. Заметим, что $A_m^{i,j_1} = -A_m^{j_1,i}$. Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что $A_m^{j_1,i}$ лежит в алгебре $K[\mathfrak{m}]$, если $A_m^{j_1,j_2} \in K[\mathfrak{m}]$. Но

$$A_m^{j_1,j_2} = C_m^{j_1} \cdot M_\gamma \in K[\mathfrak{m}],$$

где корень $\gamma \in S$ такой, что допустимая пара (ξ, γ) соответствует корню $(m, j_1) \in \Phi$. Таким образом $A_m^{i,j} \in K[\mathfrak{m}]$.

Проводя аналогичные рассуждения, убеждаемся $B_{m,l}^i \in K[\mathfrak{m}]$. □

Гипотеза 10. Алгебра инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$ порождается многочленами M_ξ, $\xi \in S$, L_q, $q \in Q$, и элементами (3), (4), (5).

Ниже мы докажем эту гипотезу в случае параболической подалгебры, редуктивная часть которой состоит из трех клеток размерами $(2,k,2)$ (см. теорему 11).

Выпишем все корни, составляющие базу и систему корней Φ:

$$S = \Big\{(1,4),(2,3),(k+1,k+4),(k+2,k+3)\Big\},$$

$$\Phi = \Big\{(3,k+3),(3,k+4),(4,k+3),(4,k+4)\Big\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$M_1 = M_{(2,3)},\ \ M_2 = M_{(1,4)},\ \ N_1 = M_{(k+2,k+3)},\ \ N_2 = M_{(k+1,k+4)};$$

$$L_{11} = L_{\left((2,3),(k+2,k+3)\right)},\ \ L_{12} = L_{\left((2,3),(k+1,k+4)\right)},$$

$$L_{21} = L_{\left((1,4),(k+2,k+3)\right)},\ \ L_{22} = L_{\left((1,4),(k+1,k+4)\right)}.$$

Изо всех многочленов (3)–(5) определен только $D = C_3^{k+3}$.

Диаграмма, построенная по параболической подалгебре $\mathfrak{p}$, имеет следующий вид (рис. 2).

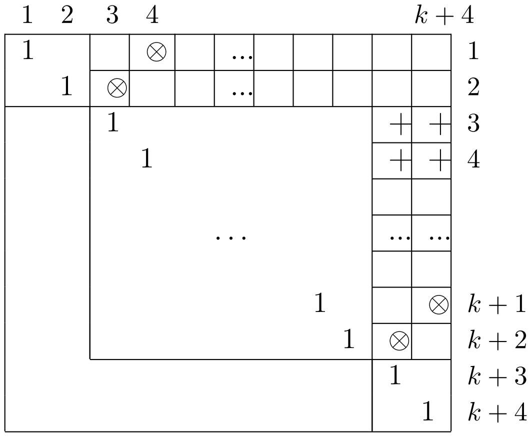

Рис. 2

Теорема 11. Для параболической подалгебры, редуктивная часть которой состоит из трех блоков размерами $(2,k,2)$, алгебра инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$ порождается многочленами M_i, N_i, L_{ij}, где $i,j = 1,2$, и элементом D.

Доказательство. Обозначим множество

$$\mathcal{B} = K[M_i, N_j, L_{ij}, D]_{i,j=1,2} \subset K[\mathfrak{m}]^N.$$

Покажем, что справедливо $K[\mathfrak{m}]^N \subset \mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{S}$ — множество знаменателей, порожденное минорами M_i, N_i, где $i = 1,2$. Из теоремы 7 следует, что локализация $K[\mathfrak{m}]^N_{\mathcal{S}}$ алгебры N-инвариантов по $\mathcal{S}$ совпадает с алгеброй многочленов Лорана

$$K\left[(M_i)^{\pm 1},\ (N_i)^{\pm 1},\ L_{ij}\right]_{i,j=1,2}.$$

Если $f \in K[\mathfrak{m}]^N$, то существуют натуральные k_1, k_2, l_1, l_2 такие, что

$$f \cdot M_1^{k_1} M_2^{k_2} N_1^{l_1} N_2^{l_2} \in K[\mathfrak{m}].$$

Утверждение $f \in \mathcal{B}$ будет доказано, если показать, что для любого минора M из набора $\{M_i, N_i\}_{i=1,2}$ выполнено следующее свойство сокращения: если $f \in K[\mathfrak{m}]$ и $M \cdot f \in \mathcal{B}$, то $f \in \mathcal{B}$.

Проведем доказательство в случае $M = M_1$. Случаи $M = M_2, N_1, N_2$ доказываются аналогично. Итак, пусть $f \in K[\mathfrak{m}]^N$ и $M_1 f \in \mathcal{B}$. Многочлен

$M_1 f$ обращается в нуль на Ann M_1. По произвольному набору чисел a_i, b_i, c_{ij}, $i, j = 1, 2$, построим матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_i, b_i, c_{ij} \in K$. Прямые вычисления показывают:

$$M_1(Q) = 0,\ \ M_2(Q) = a_1 a_2,\ \ N_1(Q) = b_1,\ \ N_2(Q) = -b_1 b_2;$$

$$L_{11}(Q) = a_1 c_{21},\ \ L_{12}(Q) = -a_1 b_1 c_{22},\ \ L_{21}(Q) = a_1 a_2 c_{21},\ \ L_{22}(Q) = a_1 a_2 b_1 c_{22},$$
$$D(Q) = a_1 a_2 (c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}).$$

Рассмотрим алгебру многочленов $\mathcal{A} = K[u_1, u_2, v_1, v_2, w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}, z]$ от 9 переменных. Так как многочлен $f M_1$ содержится в $\mathcal{B}$, то существует многочлен $p(u_1, u_2, v_1, v_2, w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}, z)$ в алгебре $\mathcal{A}$ такой, что

$$f M_1 = p(M_1, M_2, N_1, N_2, L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}, D). \qquad (10)$$

Так как $f M_1 = 0$ на $\operatorname{Ann} M_1$, то $(f M_1)(Q) = 0$. Подставим матрицу Z в последнее уравнение, получаем следующее выражение:

$$0 = (f M_1)(Q) =$$
$$= p\Big(0, a_1 a_2, b_1, -b_1 b_2, a_2 c_{21}, -a_2 b_1 c_{22}, a_1 a_2 c_{21}, -a_1 a_2 b_1 c_{22}, a_1 a_2 (c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21})\Big).$$

Обозначим через $\mathcal{Z}$ подмножество в K^9, состоящее из наборов вида

$$\Big(0, a_1 a_2, b_1, -b_1 b_2, a_2 c_{21}, -a_2 b_1 c_{22}, a_1 a_2 c_{21}, -a_1 a_2 b_1 c_{22}, a_1 a_2 (c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21})\Big),$$

где $a_i, b_j, c_{ij} \in K$.

Нетрудно убедиться, что многочлены u_1 и $w_{11} w_{22} - w_{12} w_{21}$ обращаются в нуль на $\mathcal{Z}$. Покажем, что идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} = \Big\{\varphi \in \mathcal{A} : \varphi(\mathcal{Z}) = 0\Big\}$ порождается этими многочленами.

Обозначим через $\mathcal{I}$ идеал, порожденный многочленами $u_1, w_{11} w_{22} - w_{12} w_{21}$. Заметим, что идеал $\mathcal{I}$ является простым. Действительно, многочлен $w_{11} w_{22} - w_{12} w_{21}$ — неприводимый, тогда алгебра

$$\begin{aligned} \mathcal{A}/\mathcal{I} &= \mathcal{A}/\langle u_1, w_{11} w_{22} - w_{12} w_{21} \rangle = \\ &= K[u_2, v_1, v_2, w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}, z]/\langle w_{11} w_{22} - w_{12} w_{21} \rangle \end{aligned} \qquad (11)$$

есть область целостности. Следовательно, идеал $\mathcal{I}$ — простой.

Так как многочлены $u_1, w_{11} w_{22} - w_{12} w_{21}$ обращаются в нуль на множестве $\mathcal{Z}$, то $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}$ и $\operatorname{Ann} \mathcal{I} \supset \mathcal{Z}$. Вычислим размерности многообразий

$\mathrm{Ann}\,\mathcal{I}$ и $\mathcal{Z}$. Размерность $\mathrm{Ann}\,\mathcal{I}$ равна степени трансцендентности поля частных алгебры (11) над основным полем K, то есть $\dim \mathrm{Ann}\,\mathcal{I} = 7$.

Очевидно, что $\dim \mathcal{Z} = 7$, тогда $\dim \mathrm{Ann}\,\mathcal{I} = \dim \mathcal{Z}$. Так как $\mathrm{Ann}\,\mathcal{I} \supset \mathcal{Z}$, то $\mathrm{Ann}\,\mathcal{I} = \overline{\mathcal{Z}}$. Покажем теперь, что $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}$. Предположим, что $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}$. Тогда по теореме Гильберта о нулях существует натуральное число N такое, что $f^N \in \mathcal{I}$. Так как идеал $\mathcal{I}$ простой, то $f \in \mathcal{I}$, следовательно, $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \subset \mathcal{I}$. Учитывая $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}$, заключаем $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} = \mathcal{I}$.

Таким образом, поскольку $p|_{\mathcal{Z}} = 0$, то $p \in \mathcal{I}$ и, следовательно, существуют многочлены p_1 и p_2 в алгебре $\mathcal{A}$ такие, что

$$p = p_1 u_1 + p_2(w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}).$$

Подставляя последнее выражение в (10), получаем

$$fM_1 = p_1 M_1 + p_2\Big(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}\Big) = p_1 M_1 + p_2 M_1 N_1 D.$$

Далее, сокращая на M_1, имеем $f = p_1 + p_2 N_1 D$, следовательно $f \in \mathcal{B}$. Что и требовалось доказать. $\square$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А.Н. Панову за помощь в подготовке этой статьи.

Литература

[1] Richardson R.W. Conjugacy classes in parabolic subgroups of semisimple algebraic groups // Bull. London Math. Soc. 1974. V. 6. P. 21—24.

[2] Brion M. Representations exceptionnelles des groups semi-simple // Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 1985. V. 18. P. 345—387.

[3] Гото М., Гроссханс Ф.. Полупростые алгебры Ли. М.: Мир, 1981.

[4] Панов А.Н., Севостьянова В.В. Регулярные N-орбиты в нильрадикале параболической подалгебры: труды международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80 летию В.Е. Воскресенского. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2007. С. 152—161.

[5] Севостьянова В.В. Поле инвариантов присоединенного действия унитреугольной группы в нильрадикале параболической подалгебры // Зап. науч. семин. ПОМИ (в печати).

Поступила в редакцию $10/II/2010$;
в окончательном варианте — $10/II/2010$.

THE INVARIANT ALGEBRA OF THE ADJOINT ACTION OF THE UNITRIANGULAR GROUP IN THE NILRADICAL OF A PARABOLIC SUBALGEBRA

© 2010 V.V. Sevostyanova[3]

In the paper the invariant algebra of the adjoint action of the triangular group in the nilradical of a parabolic subalgebra is studied. We formulate a conjecture on the structure of the invariant algebra. The conjecture is proved for parabolic subalgebras of a special case.

Key words: Invariant algebra, Parabolic subalgebras, Triangular group, Adjoint representation.

Paper received 10/*II*/2010.
Paper accepted 10/*II*/2010.

[3]Senostyanova Victoria Vladimirovna (`berlua@mail.ru`), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.