УДК 517.956

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2010 Е.А. Уткина[1]

В прямоугольном параллелепипеде рассматривается задача Дирихле для псевдопараболического уравнения шестого порядка с двукратной старшей частной производной. Решение осуществляется редукцией к системе уравнений Фредгольма.

Ключевые слова: псевдопараболические уравнения, задача Дирихле.

1. Предварительные сведения

Задача Дирихле, возникшая в теории уравнений эллиптического типа, является одной из основных граничных задач математической физики [1, 2]. Для гиперболических уравнений она исследовалась в [3–6]. В данной статье речь идет об уравнении

$$L(u) = \sum_{i,j,k=0}^{2} a_{ijk}(x,y,z) D_x^i D_y^j D_z^k u(x,y,z) = f(x,y,z), a_{222} \equiv 1, \tag{1.1}$$

которое можно считать обобщением уравнений Манжерона [7] и Буссинеска — Лява из теории колебаний [8, формула (20)], а также усложнением уравнения Бианки [9], связанного с интегральным представлением одних дифференциальных операторов через другие [10] и играющего важную роль в теориях аппроксимации и отображений [11, с. 109].

Используя обозначения, введенные в [8], считаем, что

$$D_t^k \varphi = \begin{cases} D_t^k \varphi \equiv \partial^k \varphi / \partial t^k, \text{ если } k = 1, 2, ...; \\ \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{-k-1}\varphi(\tau)}{(-k-1)!} d\tau, \text{ если } k = -1, -2, ...; \\ \text{оператор тождественного преобразования, если } k = 0. \end{cases}$$

[1]Уткина Елена Анатольевна (Eutkina1@yandex.ru), кафедра информационных технологий в образовании Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета, 420021, Россия, г. Казань, ул. Татарстан, 2.

2. Основной результат

Пусть $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1, 0 < z < z_1\}$. Обозначим через X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1 грани D при $x = 0$, $x = x_1$, $y = 0$, $y = y_1$, $z = 0$, $z = z_1$ соответственно. Полагаем, что гладкость коэффициентов из (1.1) определяется включениями $a_{\alpha\beta\gamma} \in C^{\alpha,\beta,\gamma}\left(\overline{D}\right), f \in C^{0,0,0}\left(\overline{D}\right)$, где $C^{\alpha,\beta,\gamma}$ есть класс непрерывных в $\overline{D}$ вместе с их производными $\partial^{r+s+t}/\partial x^r \partial y^s \partial z^t$ $(r = 0,..,\alpha; s = 0,..,\beta; t = 0,..,\gamma)$ функций.

Задача. Найти функцию $u\,(x,y,z) \in C^{2,2,2}\,(D) \cap C^{1,0,0}\left(D \cup \overline{X_0}\right) \cap$ $\cap C^{0,1,0}\left(D \cup \overline{Y_0}\right) \cap C^{0,0,1}\left(D \cup \overline{Z_0}\right) \cap C^{0,0,0}\left(\overline{D}\right)$, являющуюся в D решением уравнения (1.1) и удовлетворяющую условиям

$$u\,|_{X_0} = \varphi_0\,(y,z)\,, u\,|_{Y_0} = \psi_0\,(x,z)\,, u\,|_{Z_0} = \theta_0\,(x,y), \tag{2.1}$$

$$u\,|_{X_1} = \varphi_2\,(y,z)\,, u\,|_{Y_1} = \psi_2\,(x,z)\,, u\,|_{Z_1} = \theta_2\,(x,y)\,. \tag{2.2}$$

Для принадлежности $u \in C^{0,0,0}\,(D)$ предположим

$$\varphi_0\,(0,z) = \psi_0\,(0,z)\,, \varphi_0\,(y,0) = \theta_0\,(0,y)\,, \psi_0\,(x,0) = \theta_0\,(x,0)\,,$$
$$\varphi_0\,(y_1,z) = \psi_2\,(0,z)\,, \varphi_0\,(y,z_1) = \theta_2\,(0,y)\,,$$
$$\psi_0\,(x_1,z) = \varphi_2\,(0,z)\,, \varphi_2\,(y,0) = \theta_2\,(x_1,y)\,.$$

При этом будем считать согласующиеся значения непрерывно дифференцируемыми.

В данной работе выводятся достаточные условия однозначной разрешимости сформулированной задачи. Это делается с помощью редукции к системе уравнений Фредгольма и использования метода априорных оценок.

1. Нам потребуется решение задачи Гурса с условиями (2.1) и

$$u_x\,|_{X_0} = \varphi_1\,(y,z)\,, \quad u_y\,|_{Y_0} = \psi_1\,(x,z)\,, u_z\,|_{Z_0} = \theta_1\,(x,y)\,, \tag{2.3}$$

которое существует и единственно. Оно дается формулой из [12]:

$$\begin{gathered} u(x,y,z) = D_x^{-2} D_y^{-2} D_z^{-2}\,[Rf] + D_x^{-1} D_y^{-1} D_z^{-1}\,[\omega] + \varphi_0\,(y,z) + \\ +\psi_0\,(x,z) + \theta_0\,(x,y) - \varphi_0\,(0,z) - \psi_0\,(x,0) - \theta_0\,(0,y) + \varphi_0\,(0,0)\,. \end{gathered} \tag{2.4}$$

где

$$\omega\,(x,y,z,x,y,z) = \sum_{i_1=0}^{2} \sum_{i_2=0}^{2} \sum_{i_3=0}^{2} (-1)^{i_1+i_2+i_3} \times$$
$$\times \Big[D_y^{i_2-1} D_z^{i_3-1} \Big(\varphi_{i_1-1}\,(y,z) \Big)\, Q_{i_1 i_2 i_3}\,(x_0,y,z)\, zn\,(i_1 = 0) +$$
$$+ D_x^{i_1-1} D_z^{i_3-1} \Big(\psi_{i_2-1}(x,z) \Big)\, Q_{i_1 i_2 i_3}(x,0,z) zn(i_2 = 0) +$$
$$+ D_x^{i_1-1} D_y^{i_2-1} (\theta_{i_3-1}(x,y)) Q_{i_1 i_2 i_3}(x,y,0) zn(i_3 = 0) -$$
$$- D_y^{i_2-1} D_z^{i_3-1} (\varphi_{i_1-1}(0,z)) Q_{i_1 i_2 i_3}(0,0,z) zn(i_1 = 0) zn(i_2 = 0) -$$
$$- D_x^{i_1-1} D_y^{i_2-1} (\theta_{i_3-1}(0,y)) Q_{i_1 i_2 i_3}(0,y,0) zn\,(i_1 = 0)\, zn(i_3 = 0) -$$

$$-D_x^{i_1-1}D_z^{i_3-1}\left(\psi_{i_2-1}(x,0)\right)Q_{i_1i_2i_3}(x,0,0)\,zn\,(i_3=0)\,zn\,(i_2=0)+$$
$$+D_y^{i_2-1}D_z^{i_3-1}\left(\varphi_{i_1-1}(0,0)\right)Q_{i_1i_2i_3}(0,0,0)\ zn\,(i_1=0)\,zn(i_2=0)zn(i_3=0)\right],$$
$$Q_{i_1i_2i_3}(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{\alpha_1=i_1}^{2}\sum_{\alpha_2=i_2}^{2}\sum_{\alpha_3=i_3}^{2}(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\times$$
$$\times D_x^{\alpha_1-i_1}D_y^{\alpha_2-i_2}D_z^{\alpha_3-i_3}\left(a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\alpha,\beta,\gamma)\ R(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)\right).$$

При этом $zn\,(i_1=0)=0$, если $i_1=0$ и слагаемое зависит от $x_0=0$, и $zn\,(i_1=0)=1$ в остальных случаях. Аналогично понимается $zn\,(i_2=0)=$ $=0$ и $zn\,(i_3=0)=0$, только слагаемое зависит уже от $y_0=0$ и $z_0=0$ соответственно. Здесь R — функция Римана.

Проинтегрируем $\omega\,(x,y,z,x,y,z)$ по одному разу по каждой из переменных и подставим в (2.4). Введем операторы

$$\begin{aligned}(F_1\varphi_1)(x,y,z) &= \varphi_1(y,z)\,D_x^{-1}Q_{222}(0,y,z)-\\ &- D_z^{-1}\left[\varphi_1(y,z)\,D_x^{-1}\left[\sum_{j=1}^{2}D_z^{j-1}Q_{22j}(0,y,z)\right]\right]-\\ &- D_y^{-1}\left[\varphi_1(y,z)\,D_x^{-1}\left[\sum_{i=1}^{2}D_y^{i-1}Q_{2i2}(0,y,z)\right]\right]+\\ &+ D_y^{-1}D_z^{-1}\left[\varphi_1(y,z)D_x^{-1}\left[\sum_{i,j=1}^{2}D_y^{i-1}D_z^{j-1}Q_{2ij}(0,y,z)\right]\right]+\end{aligned}$$
$$+D_y^{-2}\left[\varphi_1(y,z)D_x^{-1}\left[Q_{202}(0,y,z)\right]\right]-$$
$$-D_y^{-2}D_z^{-1}\left[\varphi_1(y,z)D_x^{-1}\left[\sum_{j=1}^{2}D_z^{j-1}Q_{20j}(0,y,z)\right]\right]+$$
$$+D_y^{-2}D_z^{-2}\left[\varphi_1(y,z)D_x^{-1}\left[Q_{200}(0,y,z)\right]\right]-$$
$$-D_y^{-1}D_z^{-2}\left[\varphi_1(y,z)D_x^{-1}\left[\sum_{i=1}^{2}D_y^{i-1}Q_{2i0}(0,y,z)\right]\right]+$$
$$+D_z^{-2}\left[\varphi_1(y,z)D_x^{-1}\left[Q_{220}(0,y,z)\right]\right],$$
$$(F_2\psi_1)(x,y,z)=\psi_1(x,z)D_y^{-1}Q_{222}(x,0,z)-$$
$$-D_z^{-1}\left[\psi_1(x,z)D_y^{-1}\left[\sum_{j=1}^{2}D_z^{j-1}Q_{22j}(x,0,z)\right]\right]-$$
$$-D_x^{-1}\left[\psi_1(x,z)D_y^{-1}\left[\sum_{i=1}^{2}D_x^{i-1}Q_{i22}(x,0,z)\right]\right]+$$

$$+D_x^{-1}D_z^{-1}\left[\varphi_1(x,z)D_y^{-1}\left[\sum_{i,j=1}^{2}D_x^{i-1}D_z^{j-1}Q_{i2j}(x,0,z)\right]\right]+$$
$$+D_x^{-2}\left[\psi_1(x,z)D_y^{-1}\left[Q_{022}(x,0,z)\right]\right]-$$
$$-D_x^{-2}D_z^{-1}\left[\psi_1\left(x,z\right)D_y^{-1}\left[\sum_{j=1}^{2}D_z^{j-1}Q_{02j}\left(x,0,z\right)\right]\right]+$$
$$+D_x^{-2}D_z^{-2}\left[\psi_1\left(x,z\right)D_y^{-1}\left[Q_{020}\left(x,0,z\right)\right]\right]-$$
$$-D_x^{-1}D_z^{-2}\left[\psi_1(x,z)D_y^{-1}\left[\sum_{i=1}^{2}D_x^{i-1}Q_{i20}(x,0,z)\right]\right]+$$
$$+D_z^{-2}\left[\psi_1(x,z)D_y^{-1}\left[Q_{220}(x,0,z)\right]\right],$$
$$(F_3\theta_1)(x,y,z)=\theta_1(x,y)D_z^{-1}Q_{222}(x,y,0)-$$
$$-D_y^{-1}\left[\theta_1(x,y)D_z^{-1}\left[\sum_{j=1}^{2}D_y^{j-1}Q_{2j2}(x,y,0)\right]\right]-$$
$$-D_x^{-1}\left[\theta_1(x,y)D_z^{-1}\left[\sum_{i=1}^{2}D_x^{i-1}Q_{i22}(x,y,0)\right]\right]+$$
$$+D_x^{-1}D_y^{-1}\left[\theta_1(x,y)D_z^{-1}\left[\sum_{i,j=1}^{2}D_x^{i-1}D_y^{j-1}Q_{ij2}(x,y,0)\right]\right]+$$
$$+D_x^{-2}\left[\theta_1(x,y)D_z^{-1}\left[Q_{022}(x,y,0)\right]\right]-$$
$$-D_x^{-2}D_y^{-1}\left[\theta_1(x,y)D_z^{-1}\left[\sum_{j=1}^{2}D_y^{j-1}Q_{0j2}(x,y,0)\right]\right]+$$
$$+D_x^{-2}D_y^{-2}\left[\theta_1\left(x,y\right)D_z^{-1}\left[Q_{002}\left(x,y,0\right)\right]\right]-$$
$$-D_x^{-1}D_y^{-2}\left[\theta_1\left(x,y\right)D_z^{-1}\left[\sum_{i=1}^{2}D_x^{i-1}Q_{i02}\left(x,y,0\right)\right]\right]+$$
$$+D_y^{-2}\left[\theta_1\left(x,y\right)D_z^{-1}\left[Q_{202}\left(x,0,z\right)\right]\right].$$

Тогда (2.4) можно переписать в виде:

$$(F_1\varphi_1)(x,y,z)+(F_2\psi_1)(x,y,z)+(F_3\theta_1)(x,y,z)+$$
$$+\frac{\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^z R(0,0,0,\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi}{\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{z_1} R(0,0,0,\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi}\left(I_1\left(x_1,y_1,z_1\right)-\right.$$
$$\left.-(F_1\varphi_1)(x_1,y_1,z_1)-(F_2\psi_1)(x_1,y_1,z_1)-(F_3\theta_1)(x_1,y_1,z_1)\right)=I_1\left(x,y,z\right),\tag{2.5}$$

где $I_1\left(x,y,z\right)$ зависит только от известных функций.

Считая (2.4) общим представлением искомого решения через φ_k, ψ_k, θ_k, $k=0,1$, подставим в (2.5) аргументы точек (x_1,y,z), (x,y_1,z), (x,y,z_1),

(x_1, y_1, z_1). С учетом того, что значения (2.1), (2.2) известны, приходим к системе интегральных уравнений:

$$\begin{gathered}
(F_1\varphi_1)(x_1,y,z)+(F_2\psi_1)(x_1,y,z)+(F_3\theta_1)(x_1,y,z)+\\
+\frac{\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y}\int\limits_0^{z} R(0,0,0,\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi}{\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{z_1} R(0,0,0,\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi}(I_1\left(x_1,y_1,z_1\right)-\\
-(F_1\varphi_1)(x_1,y_1,z_1)-(F_2\psi_1)(x_1,y_1,z_1)-(F_3\theta_1)(x_1,y_1,z_1))=I_1\left(x_1,y,z\right),\\
(F_1\varphi_1)(x,y_1,z)+(F_2\psi_1)(x,y_1,z)+(F_3\theta_1)(x,y_1,z)+\\
+\frac{\int\limits_0^{x}\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{z} R(0,0,0,\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi}{\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{z_1} R(0,0,0,\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi}(I_1\left(x_1,y_1,z_1\right)-\\
-(F_1\varphi_1)(x_1,y_1,z_1)-(F_2\psi_1)(x_1,y_1,z_1)-(F_3\theta_1)(x_1,y_1,z_1))=I_1\left(x,y_1,z\right),\\
(F_1\varphi_1)(x,y,z_1)+(F_2\psi_1)(x,y,z_1)+(F_3\theta_1)(x,y,z_1)+\\
+\frac{\int\limits_0^{x}\int\limits_0^{y}\int\limits_0^{z_1} R(0,0,0,\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi}{\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{z_1} R(0,0,0,\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi}(I_1\left(x_1,y_1,z_1\right)-\\
-(F_1\varphi_1)(x_1,y_1,z_1)-(F_2\psi_1)(x_1,y_1,z_1)-(F_3\theta_1)(x_1,y_1,z_1))=I_1\left(x,y,z_1\right),
\end{gathered} \tag{2.6}$$

в которой искомыми функциями являются φ_1, ψ_1, θ_1. Таким образом, для нахождения каждой из функций φ_1, ψ_1, θ_1 получим уравнения фредгольмовского типа.

2. Докажем теперь единственность решения задачи (1.1)–(2.2). Для этого проверим, что при однородных условиях (2.1), (2.2) однородное уравнение (1.1) имеет только нулевое решение. Доказательство осуществляем методом априорной оценки с помощью энергетического неравенства [2].

Воспользовавшись понятиями скалярного произведения в пространстве $L_2\left[0,x_1\right]\times\left[0,y_1\right]\times\left[0,z_1\right]$ $\quad (u,v)=\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{z_1} u\left(x,y,z\right)v\left(x,y,z\right)dzdydx$ и нормы $\|u\|^2=\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{z_1} u^2\left(x,y,z\right)dzdydx$, вычислим скалярное произведение

$$\left(L\left(u\right),u\right)=(D_x^2D_y^2D_z^2u+\sum_{i=0}^{2}\sum_{\substack{j=0\\ i+j+k<4}}^{2}\sum_{k=0}^{2}a_{ijk}\left(x,y,z\right)D_x^iD_y^jD_z^ku,u)=$$

$$=\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{z_1}(D_x^2D_y^2D_z^2u\cdot u+\sum_{i=0}^{2}\sum_{\substack{j=0\\ i+j+k<4}}^{2}\sum_{k=0}^{2}a_{ijk}\left(x,y,z\right)D_x^iD_y^jD_z^ku\cdot u)dzdydx.$$

Для более компактной записи обозначим $\int\limits_{123}=\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\int\limits_0^{z_1}$. Проинтегрируем выражение в правой части последнего равенства по частям и выпишем значения получившихся в результате преобразований слагаемых:

$$\int\limits_{123} u_{xxyyzz}(x,y,z)u(x,y,z)dzdydx = -\left\|u_{xyz}\right\|^2,$$

$$\int\limits_{123} \left(a_{221}u_{xxyyz}u\right)(x,y,z)\,dzdydx = -\tfrac{1}{2}\int\limits_{123}(a_{221xxyyz}u^2 + a_{221xyz}u_xu_y+$$
$$+a_{221xyy}u_xu_z - a_{221xxy}u_yu_z)(x,y,z)dzdydx + \tfrac{1}{2}\int\limits_{123}(a_{221xxz}u_y^2 + a_{221yyz}u_x^2-$$
$$-a_{221z}u_{xy}^2)(x,y,z)dzdydx - \int\limits_{123}(a_{221x}u_{xy}u_{yz} + a_{221y}u_{xy}u_{xz})(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123} \left(a_{212}u_{xxyzz}u\right)(x,y,z)\,dzdydx = -\tfrac{1}{2}\int\limits_{123}(a_{212xxyzz}u^2 + a_{212xyz}u_xu_y+$$
$$+a_{212xzz}u_xu_y - a_{212xxz}u_yu_z)(x,y,z)dzdydx + \tfrac{1}{2}\int\limits_{123}(a_{212xxy}u_z^2 + a_{212yzz}u_x^2-$$
$$-a_{212y}u_{xz}^2)(x,y,z)dzdydx - \int\limits_{123}(a_{212x}u_{xz}u_{yz} + a_{212z}u_{xy}u_{xz})(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123} \left(a_{122}u_{xyyzz}u\right)(x,y,z)\,dzdydx = -\tfrac{1}{2}\int\limits_{123}(a_{122xyyzz}u^2 + a_{122xyz}u_yu_z+$$
$$+a_{122yzz}u_xu_y - a_{122yyz}u_xu_z)(x,y,z)dzdydx + \tfrac{1}{2}\int\limits_{123}(a_{122xyy}u_z^2+$$
$$+a_{122xzz}u_y^2 - a_{122x}u_{yz}^2)(x,y,z)dzdydx-$$
$$-\int\limits_{123}(a_{122y}u_{xz}u_{yz} + a_{122z}u_{xy}u_{yz})(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123} \left(a_{220}u_{xxyy}u\right)(x,y,z)dzdydx = -\int\limits_{123}(\tfrac{1}{2}a_{220xxyy}u^2 + a_{220xy}u_xu_y+$$
$$+\tfrac{1}{2}a_{220xx}u_y^2 + \tfrac{1}{2}a_{220yy}u_x^2 - a_{220}u_{xy}^2)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123} \left(a_{202}u_{xxzz}u\right)(x,y,z)dzdydx = -\int\limits_{123}(\tfrac{1}{2}a_{202xxzz}u^2 + a_{202xz}u_xu_z+$$
$$+\tfrac{1}{2}a_{202xx}u_z^2 + \tfrac{1}{2}a_{202zz}u_x^2 - a_{202}u_{xz}^2)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123} \left(a_{022}u_{yyzz}u\right)(x,y,z)dzdydx = -\int\limits_{123}(\tfrac{1}{2}a_{022yyzz}u^2 + a_{022yz}u_yu_z+$$
$$+\tfrac{1}{2}a_{022yy}u_z^2 + \tfrac{1}{2}a_{022zz}u_y^2 - a_{022}u_{yz}^2)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123} \left(a_{211}u_{xxyz}u\right)(x,y,z)\,dzdydx = \int\limits_{123}(\tfrac{1}{2}a_{211xxyz}u^2 + a_{211x}u_{xy}u_z-$$
$$-a_{211xz}u_xu_y - \tfrac{1}{2}a_{211yz}u_x^2 + a_{211}u_{xz}u_{xy})(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123} \left(a_{121}u_{xyyz}u\right)(x,y,z)\,dzdydx = \int\limits_{123}(\tfrac{1}{2}a_{121xyyz}u^2 + a_{121y}u_{xy}u_z-$$
$$-a_{121yz}u_xu_y - \tfrac{1}{2}a_{121xz}u_y^2 + a_{121}u_{xy}u_{yz})(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{112}u_{xyzz}u)(x,y,z)dzdydx = \int\limits_{123}(\tfrac{1}{2}a_{112xyzz}u^2 + a_{112z}u_{yz}u_x-$$
$$-a_{112xz}u_zu_y - \tfrac{1}{2}a_{112xy}u_z^2 + a_{112}u_{xz}u_{yz})(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{210}u_{xxy}u)(x,y,z)dzdydx = \int\limits_{123}(-\tfrac{1}{2}a_{210xxy}u^2+$$
$$+a_{210x}u_xu_y + \tfrac{1}{2}a_{210y}u_x^2)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{201}u_{xxz}u)x,y,z)dzdydx = \int\limits_{123}(-\tfrac{1}{2}a_{201xxz}u^2+$$
$$+a_{201x}u_xu_z + \tfrac{1}{2}a_{201z}u_x^2)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{021}u_{yyz}u)(x,y,z)dzdydx=\int\limits_{123}(-\tfrac{1}{2}a_{021yyz}u^2+$$
$$+a_{021y}u_yu_z+\tfrac{1}{2}a_{021z}u_y^2)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{120}u_{xyy}u)(x,y,z)dzdydx=\int\limits_{123}(-\tfrac{1}{2}a_{120xyy}u^2+$$
$$+a_{120y}u_xu_y+\tfrac{1}{2}a_{120x}u_y^2)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{102}u_{xzz}u)\,(x,y,z)\,dzdydx=\int\limits_{123}(-\tfrac{1}{2}a_{102xzz}u^2+$$
$$+a_{102z}u_xu_z+\tfrac{1}{2}a_{102x}u_z^2)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{012}u_{yzz}u)\,(x,y,z)\,dzdydx=\int\limits_{123}(-\tfrac{1}{2}a_{012yzz}u^2+$$
$$+a_{012z}u_yu_z+\tfrac{1}{2}a_{012y}u_z^2)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{111}u_{xyz}u)\,(x,y,z)\,dzdydx=\int\limits_{123}(-\tfrac{1}{2}a_{111xyz}u^2+$$
$$+\tfrac{1}{2}a_{111z}u_xu_y-a_{111}u_{xy}u_z)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{200}u_{xx}u)\,(x,y,z)\,dzdydx=\int\limits_{123}(\tfrac{1}{2}a_{200xx}u^2-\tfrac{1}{2}a_{200}u_x^2)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{020}u_{yy}u)\,(x,y,z)\,dzdydx=\int\limits_{123}(\tfrac{1}{2}a_{020yy}u^2-\tfrac{1}{2}a_{020}u_y^2)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{002}u_{zz}u)\,(x,y,z)\,dzdydx=\int\limits_{123}(\tfrac{1}{2}a_{002zz}u^2-\tfrac{1}{2}a_{002}u_z^2)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{110}u_{xy}u)\,(x,y,z)\,dzdydx=\int\limits_{123}(\tfrac{1}{2}a_{110xy}u^2-\tfrac{1}{2}a_{110}u_xu_y)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{101}u_{xz}u)\,(x,y,z)\,dzdydx=\int\limits_{123}(\tfrac{1}{2}a_{101xz}u^2-\tfrac{1}{2}a_{101}u_xu_z)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{011}u_{yz}u)\,(x,y,z)\,dzdydx=\int\limits_{123}(\tfrac{1}{2}a_{011yz}u^2-\tfrac{1}{2}a_{011}u_yu_z)(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{100}u_xu)\,(x,y,z)\,dzdydx=-\tfrac{1}{2}\int\limits_{123}a_{100x}u^2(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{010}u_yu)\,(x,y,z)\,dzdydx=-\tfrac{1}{2}\int\limits_{123}a_{010y}u^2(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{001}u_zu)\,(x,y,z)\,dzdydx=-\tfrac{1}{2}\int\limits_{123}a_{001z}u^2(x,y,z)dzdydx,$$

$$\int\limits_{123}(a_{000}u\cdot u)\,(x,y,z)\,dzdydx=\int\limits_{123}a_{000}u^2(x,y,z)dzdydx.$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
(L(u), u) = (f, u) = -\left\|u_{xyz}\right\|^2 - \\
-\frac{1}{2}\int\limits_{123}\sum_{\substack{i=0\\0<i+j+k<6}}^{2}\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=0}^{2}((-1)^{i+j+k+1}D_x^iD_y^jD_z^k a_{ijk}u^2)(x,y,z)dzdydx+ \\
+\int\limits_{123}(a_{000}u^2)(x,y,z)dzdydx - \frac{1}{2}\int\limits_{123}(\sum_{\substack{j=0\\j+k<4}}^{2}\sum_{k=0}^{2}(-1)^{j+k}\times \\
\times D_y^jD_z^k a_{2jk}u_x^2)(x,y,z)dzdydx- \\
-\frac{1}{2}\int\limits_{123}(\sum_{\substack{i=0\\i+k<4}}^{2}\sum_{k=0}^{2}(-1)^{i+k}D_x^iD_z^k a_{i2k}u_y^2)(x,y,z)dzdydx- \\
-\frac{1}{2}\int\limits_{123}(\sum_{\substack{i=0\\i+j<4}}^{2}\sum_{j=0}^{2}(-1)^{i+j}D_x^iD_y^j a_{ij2}u_z^2)(x,y,z)dzdydx- \\
-\int\limits_{123}\left(\frac{1}{2}a_{221z} - a_{220}\right)(x,y,z)\,u_{xy}^2\,(x,y,z)\,dzdydx- \\
-\int\limits_{123}\left(\frac{1}{2}a_{212y} - a_{202}\right)(x,y,z)\,u_{xz}^2(x,y,z)dzdydx- \\
-\int\limits_{123}\left(\frac{1}{2}a_{122x} - a_{022}\right)(x,y,z)\,u_{yz}^2\,(x,y,z)\,dzdydx+ \\
+\int\limits_{123}(u_xu_y)(x,y,z)(-\frac{1}{2}a_{221xyz} - \frac{1}{2}a_{212xzz} - \frac{1}{2}a_{122yzz} - a_{220xy}- \\
-a_{211xz} - a_{121yz} + a_{210x} + a_{120y} + \frac{1}{2}a_{111z} - \frac{1}{2}a_{110})(x,y,z)dzdydx+ \\
+\int\limits_{123}(u_yu_z)(x,y,z)\times \\
\times(\frac{1}{2}a_{221xxy} + \frac{1}{2}a_{221xxz} + \frac{1}{2}a_{122xyz} - a_{022yz} - a_{112xz} + a_{021y}+ \\
+a_{012z} - \frac{1}{2}a_{011}) + \int\limits_{123}(u_xu_z)(x,y,z)(\frac{1}{2}a_{221xyy} - \frac{1}{2}a_{212xyz} + \frac{1}{2}a_{122yyz}- \\
-a_{202xz} + a_{201x} + a_{102z} - \frac{1}{2}a_{101})(x,y,z)dzdydx+ \\
+\int\limits_{123}(u_{xy}u_{yz})(x,y,z)(-a_{221x} - a_{122z} + a_{121})(x,y,z)dzdydx+ \\
+\int\limits_{123}(u_{xy}u_{xz})(x,y,z)(-a_{212z} - a_{221y} + a_{211})(x,y,z)dzdydx+ \\
+\int\limits_{123}(u_{xz}u_{yz})(x,y,z)(-a_{122y} - a_{212x} + a_{112})(x,y,z)dzdydx+ \\
+\int\limits_{123}(u_{yz}u_x)(x,y,z)(a_{112z})(x,y,z)dzdydx+ \\
+\int\limits_{123}(u_{xy}u_z)(x,y,z)(a_{121y} + a_{211x} - a_{111})(x,y,z)dzdydx.
\end{gathered}
$$

Так как функции $a_{ijk}(x,y,z)$ являются непрерывными на компакте, то они достигают своих точных верхних и точных нижней граней. Введем обозначения $\sup\limits_{(x,y,z)\in D} a_{ijk}(x,y,z) = sa_{ijk}$, $\inf\limits_{(x,y,z)\in D} a_{ijk}(x,y) = ia_{ijk}$. Для компактности записи обозначим $\Delta_t a_{ijk} = \begin{cases} sa_{ijk}, & \text{если } t \text{ нечетное;} \\ ia_{ijk}, & \text{если } t \text{ четное.} \end{cases}$

Умножив обе части полученного равенства на -1, получаем оценку

$$-(f,u) \geqslant \|u_{xyz}\|^2 + (\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\0<i+j+k<6}}^{2}\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=0}^{2}(-1)^{i+j+k+1}\times$$

$$\times\Delta_{i+j+k+1}D_x^iD_y^jD_z^ka_{ijk} - sa_{000})\,\|u\|^2 +$$

$$+\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=0\\j+k<4}}^{2}\sum_{k=0}^{2}(-1)^{j+k}\Delta_{j+k}D_y^jD_z^ka_{2jk}\,\|u_x\|^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\i+k<4}}^{2}\sum_{k=0}^{2}(-1)^{i+k}\Delta_{i+k}D_x^iD_z^ka_{i2k}\,\|u_y\|^2 +$$

$$+\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\i+j<4}}^{2}\sum_{j=0}^{2}(-1)^{i+j}\Delta_{i+j}D_x^iD_y^ja_{ij2}\,\|u_z\|^2 + (\tfrac{1}{2}ia_{221z} - sa_{220})\,\|u_{xy}\|^2 +$$

$$+(\tfrac{1}{2}ia_{212y} - sa_{202})\,\|u_{xz}\|^2 + (\tfrac{1}{2}ia_{122x} - sa_{022})\,\|u_{yz}\|^2 +$$

$$+(\tfrac{1}{2}ia_{221xyz} + \tfrac{1}{2}ia_{212xzz} + \tfrac{1}{2}ia_{122yzz} + ia_{220xy} + ia_{211xz} + ia_{121yz} -$$

$$-sa_{210x} - sa_{120y} - \tfrac{1}{2}sa_{111z} + \tfrac{1}{2}ia_{110})\int\limits_{123}(u_xu_y)(x,y,z)dzdydx +$$

$$+(-\tfrac{1}{2}sa_{221xxy} - \tfrac{1}{2}sa_{221xxz} + \tfrac{1}{2}ia_{122xyz} + ia_{022yz} + ia_{112xz} - sa_{021y} - sa_{012z} +$$

$$+\frac{1}{2}ia_{011})\int\limits_{123}(u_yu_z)(x,y,z)dzdydx +$$

$$+(-\frac{1}{2}sa_{221xyy} + \frac{1}{2}ia_{212xyz} - \frac{1}{2}sa_{122yyz} + ia_{202xz} - sa_{201x} - sa_{102z} + \frac{1}{2}ia_{101})\times$$

$$\times\int\limits_{123}(u_xu_z)(x,y,z)dzdydx + (ia_{221x} + ia_{122z} - sa_{121})\int\limits_{123}(u_{xy}u_{yz})(x,y,z)dzdydx +$$

$$+(ia_{212z} + ia_{221y} - sa_{211})\int\limits_{123}(u_{xy}u_{xz})(x,y,z)dzdydx +$$

$$+(ia_{122y} + ia_{212x} - sa_{112})\int\limits_{123}(u_{xz}u_{yz})(x,y,z)dzdydx -$$

$$-sa_{112z}\int\limits_{123}(u_{yz}u_x)(x,y,z)dzdydx + (-sa_{121y} - sa_{211x} + ia_{111})\times$$

$$\times\int\limits_{123}(u_{xy}u_z)(x,y,z)dzdydx.$$

Обозначим $\alpha_1 = \frac{1}{2}\sum\limits_{\substack{i=0\\0<i+j+k<6}}^{2}\sum\limits_{j=0}^{2}\sum\limits_{k=0}^{2}(-1)^{i+j+k+1}\Delta_{i+j+k+1}D_x^iD_y^jD_z^ka_{ijk} - sa_{000}$,

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=0\\j+k<4}}^{2}\sum_{k=0}^{2}(-1)^{j+k}\Delta_{j+k}D_y^jD_z^ka_{2jk}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\i+k<4}}^{2}\sum_{k=0}^{2}(-1)^{i+k}\Delta_{i+k}D_x^iD_z^ka_{i2k},$$

$\alpha_4 = \frac{1}{2}\sum\limits_{\substack{i=0\\i+j<4}}^{2}\sum\limits_{j=0}^{2}(-1)^{i+j}\Delta_{i+j}D_x^iD_y^ja_{ij2}, \alpha_5 = \frac{1}{2}ia_{221z} - sa_{220}, \alpha_6 = \frac{1}{2}ia_{212y} - sa_{202}, \alpha_7 = \frac{1}{2}ia_{122x} - sa_{022}$. Используя неравенства Коши — Буняковского

$|(u,v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$, Коши "с ε": $|a \cdot b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{|b|^2}{2\varepsilon}$, справедливое при любом $\varepsilon > 0$, а также неравенство Пуанкаре — Фридрихса [2]: $\|u_x\|^2 \geqslant \frac{1}{C_1^2}\|u\|^2$ (C_1 — известная постоянная), получим

$$\varepsilon\|f\|^2 + \frac{\|u\|^2}{4\varepsilon} \geqslant -(f,u) \geqslant \|u_{xyz}\|^2 + (\alpha_1 - \varepsilon_1^1)\|u\|^2 +$$

$$+(\alpha_2 - \varepsilon_2^1)\|u_x\|^2 + (\alpha_3 - \varepsilon_3^1)\|u_y\|^2 + (\alpha_4 - \varepsilon_4^1)\|u_z\|^2 + (\alpha_5 - \varepsilon_5^1)\|u_{xy}\|^2 +$$

$$+(\alpha_6 - \varepsilon_6^1)\|u_{xz}\|^2 + (\alpha_7 - \varepsilon_7^1)\|u_{yz}\|^2,$$

где $\varepsilon_k^1 > 0$ $(k = \overline{1,7})$ представляют собой линейную комбинацию квадратов коэффициентов уравнения (1.1), в качестве множителей в которой выступают произвольные $\varepsilon > 0$ из неравенства Коши "с ε". Используя далее неравенство Пуанкаре — Фридрихса, получим

$$\varepsilon\|f\|^2 \geqslant \|u_{xyz}\|^2 (1 - (\frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon_1^1)C_1^2C_2^2C_3^2 - \varepsilon_2^1C_2^2C_3^2 - \varepsilon_3^1C_1^2C_3^2 - \varepsilon_4^1C_1^2C_2^2 - \varepsilon_5^1C_3^2 -$$

$$-\varepsilon_6^1C_2^2 - \varepsilon_7^1C_3^2) + \alpha_1\|u\|^2 + \alpha_2\|u_x\|^2 + \alpha_3\|u_y\|^2 +$$

$$+\alpha_4\|u_z\|^2 + \alpha_5\|u_{xy}\|^2 + \alpha_6\|u_{xz}\|^2 + \alpha_7\|u_{yz}\|^2.$$

Потребуем неотрицательности коэффициентов при нормах , а $1 - (\frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon_1^1)C_1^2C_2^2C_3^2 - \varepsilon_2^1C_2^2C_3^2 - \varepsilon_3^1C_1^2C_3^2 - \varepsilon_4^1C_1^2C_2^2 - \varepsilon_5^1C_3^2 - \varepsilon_6^1C_2^2 - \varepsilon_7^1C_3^2 = 0$ (в силу произвольности ε и ε_k^1 этого можно добиться). Полагаем теперь $f = 0$, получим, что функция u может быть только нулевой.

При $f \equiv 0$ $\varphi_k \equiv \psi_k \equiv 0$ $(k = 0,2)$. Система уравнений (2.6) является тоже однородной. Эта система, в силу доказанной единственности решения задачи, допускает в данном случае только нулевое решение. В силу теоремы Фредгольма [1] это означает однозначную разрешимость неоднородной системы уравнений (2.6).

Таким образом, имеет место

Теорема. Если коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют неравенствам

$\alpha_k \geqslant 0 (k = \overline{1,7})$, то задача (1.1)–(2.2) имеет единственное решение.

Условия теоремы являются существенными. В подтверждение приведем два примера уравнений с нулевыми условиями на границе области $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, которые имеют ненулевые решения задачи Дирихле в случае нарушения указанных условий. Рассмотрим уравнения $u_{xxyyzz} + \pi^2 u_{yyzz} = 0$, $u_{xxyyzz} - \pi^4 u_{xx} = 0$. Их решением, в чем можно убедиться непосредственно, является $u(x,y,z) = \sin\pi x \cdot \sin\pi y \cdot \sin\pi z$, отличная от тождественного нуля в D. В первом из них коэффициент $a_{022} = \pi^2 > 0$, а все остальные равны нулю, условие теоремы не выполнено (следует из положительности α_7). Во втором уравнении коэффициент $a_{200} = -\pi^4 < 0$, являющийся слагаемым в α_2, должен быть положительным.

Литература

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 528 с.

[2] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

[3] Березанский Ю.М. О задаче типа Дирихле для уравнения колебания струны // УМЖ. 1960. Т. 12. № 4. С. 363–372.

[4] Вахания Н.Н. Об одной краевой задаче с заданием на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебаний струны // ДАН СССР. 1957. Т. 116. № 6. С. 906–909.

[5] Фокин М.В. О задаче Дирихле для уравнения струны // Некорректные краевые задачи для неклассических уравнений мат. физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1981. С. 178–182.

[6] Abdul Latif A.I. Dirichlet, Neumann and mixed Dirichlet-Neumann value problems for $u_{xy} = 0$ in rectangles // Proc. Roy. Sos. Edinburgh. 1978. Ser. A. № 82. P. 107–110.

[7] Mangeron D. New methods for determining solution of mathematical models governing polyvibrating phenomena // Bul. Inst. politehn. Jasi. Sectia 1. 1968. V. 14. № 1–2. P. 433–436.

[8] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 547–552.

[9] Фаге М.К. Задача Коши для уравнения Бианки // Матем. сб. 1958. Т. 451(87). № 3. С. 281–322.

[10] Фаге М.К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной // Тр. Моск. матем. о-ва. 1958. Т. 7. С. 227–268.

[11] Бондаренко Б.А. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных уравнений в частных производных. Ташкент: ФАН, 1987. 146 с.

[12] Уткина Е.А. Задача Гурса для одного n-мерного уравнения // Вестник Самарского государственного университета. Спец. выпуск. 2004. С. 64–67.

[13] Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское матем. о-во, 2001. 226 с.

Поступила в редакцию $26/XI/2009$;
в окончательном варианте — $26/XI/2009$.

DIRICHLET'S PROBLEM FOR ONE 3D EQUATION

© 2010 E.A. Utkina[2]

In the paper Dirichlet's problem for pseudoparabolic equation of the 6th order in a rectangular domain is considered. The existence and uniqueness of the solution are proved.

Key words: pseudoparabolic equation, Dirichlet's problem.

Paper received 26/*XI*/2009.
Paper accepted 26/*XI*/2009.

[2]Utkina Elena Anatolievna (Eutkina1@yandex.ru), Dept. of Information Technologies in Education, Tatar State Humanitarian-Pedagogical University, Kazan, 420021, Russia.