

УДК 621.37:621.391

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УСТАНОВЛЕНИЯ РЕЖИМА СИНХРОНИЗАЦИИ ДВ-ОСЦИЛЛЯТОРА**© 2010 С.А. Агибалов, В.В. Зайцев, А.В. Карлов-младший<sup>1</sup>

Для исследования процессов захвата и удержания частоты автоколебательной системы в дискретном времени предложено использовать метод медленно меняющихся амплитуд. Методика ММА, применяемая в аналоговой области, распространена на дискретные системы. Приведены примеры расчетов динамических амплитудных и фазовых характеристики колебаний дискретного осциллятора Ван дер Поля, находящегося под действием гармонического сигнала.

**Ключевые слова:** автоколебательная система, дискретное время, синхронизация, метод медленно меняющихся амплитуд.

**Введение**

Дискретным осциллятором (ДВ-осциллятором) Ван дер Поля мы называем автоколебательную систему, функционирующую в дискретном времени в соответствии с алгоритмом (уравнением движения)

$$y[n] = \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] + \gamma (1 - y^2[n-1]) (y[n-1] - y[n-2]). \quad (1)$$

Такой ДВ-осциллятор синтезирован путем обобщения на нелинейные дискретные системы метода инвариантности импульсных характеристик, широко используемого для синтеза цифровых фильтров [1], и впервые описан в статье [2]. При этом в качестве аналогового прототипа был взят классический осциллятор Ван дер Поля. Показано, что параметры алгоритма (1) связаны с собственной частотой  $\omega_0$  и добротностью  $Q$  резонансной системы прототипа соотношениями

$$\alpha_1 = 2 \exp(-\pi \Omega_0 Q^{-1}) \cos(2\pi \Omega_0),$$

<sup>1</sup>Агибалов Сергей Александрович ([comphysics@ssu.samara.ru](mailto:comphysics@ssu.samara.ru)), Зайцев Валерий Васильевич ([zaitsev@ssu.samara.ru](mailto:zaitsev@ssu.samara.ru)), Карлов-младший Александр Владимирович ([a.v.karlov@ssu.samara.ru](mailto:a.v.karlov@ssu.samara.ru)), кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$$\alpha_2 = -\exp(-2\pi\Omega_0 Q^{-1}), \quad (2)$$

где частота  $\omega_0$  выражена в единицах частоты дискретизации  $\omega_d$  :  $\Omega_0 = \omega_0/\omega_d$ . При значениях параметра глубины обратной связи  $\gamma$ , превышающих пороговое значение  $\gamma_b$ , определяемое решением уравнения

$$\left| \alpha_1 + \gamma_b + \sqrt{(\alpha_1 + \gamma_b)^2 + 4(\alpha_2 - \gamma_b)} \right| = 2,$$

в системе (1) возбуждаются и поддерживаются незатухающие колебания — автоколебания. Соотношения (2) позволяют целенаправленно подбирать их частоту и время установления.

Дискретную систему (1) предлагается использовать для нелинейной обработки ДВ-сигналов [3], а в режиме генерации динамического хаоса — для кодирования информации [4].

Как обобщение алгоритма (1) можно предложить томсоновский ДВ-осциллятор общего вида

$$y[n] = \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] + \gamma S(y[n-1]) (y[n-1] - y[n-2]) \quad (3)$$

с функцией нелинейности  $S(y)$ . Например, для осциллятора с ограниченной кубической нелинейностью

$$S(y) = (1 - y^2) (\theta(y+1) - \theta(y-1)),$$

где  $\theta(y)$  — функция Хевисайда.

Учитывая фундаментальность явления захвата частоты (фазовой синхронизации) в автоколебательных системах [5], представляет интерес его исследование в представленных выше томсоновских ДВ-осцилляторах.

## 1. Метод ММА для синхронизируемых ДВ-осцилляторов

Рассмотрим ДВ-осциллятор (1), находящийся под аддитивным воздействием дискретного гармонического сигнала

$$x[n] = \frac{1}{2} E (Z^n + Z^{-n})$$

с амплитудой  $E$  и частотой  $\Omega$  :  $Z = \exp(j2\pi\Omega)$ . Уравнение движения осциллятора в этом случае примет вид

$$y[n] = \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] + \gamma (1 - y^2[n-1]) (y[n-1] - y[n-2]) + x[n-1]. \quad (4)$$

Здесь дискретный временной аргумент внешнего воздействия равен  $n-1$ , т. к. именно при таком воздействии ФЧХ линейного ДВ-осциллятора близка к характеристике аналогового прототипа.

Для решения уравнения (4) будем использовать приближение медленно меняющихся амплитуд (ММА). В работе [1] метод ММА, широко применяемый для анализа колебаний нелинейных систем в непрерывном времени,

распространен на автономные ДВ-осцилляторы. Теперь, следуя [1], проведем обобщение метода на осцилляторы, находящиеся под действием внешнего гармонического сигнала.

Считая комплексную амплитуду  $A[n]$  медленной по сравнению с  $Z^n$  функцией дискретного времени  $n$ , автоколебания ДВ-осциллятора представим в форме

$$y[n] = \frac{1}{2}A[n]Z^n + \frac{1}{2}A^*[n]Z^{-n}, \quad (5)$$

а его уравнение движения (4) преобразуем к виду

$$\hat{L}_2 \{y[n]\} = \mu_1 y[n-1] + \mu_2 y[n-2] + \gamma F(y) + x[n-1]. \quad (6)$$

В записи уравнения (6) использованы обозначения линейного разностного оператора второго порядка

$$\hat{L}_2 \{y[n]\} = y[n] - 2\text{Re}(Z)y[n-1] - y[n-2] \quad (7)$$

нелинейной функции

$$F(y) = (1 - y^2[n-1]) (y[n-1] - y[n-2]),$$

а также параметры

$$\mu_1 = 2 (\exp(-\pi\Omega_0 Q^{-1}) \cos(2\pi\Omega_0) - \cos(2\pi\Omega))$$

и

$$\mu_2 = 1 - \exp(-2\pi\Omega_0 Q^{-1}).$$

Нетрудно показать, что для высокочастотных осцилляторов, находящихся под воздействием сигналов с частотами  $\Omega \approx \Omega_0$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  являются параметрами малости ( $\mu_1, \mu_2 \ll 1$ ). При этом для квазилинейных систем ( $\gamma \ll 1$ ) и слабых воздействий выполнены условия применимости приближения ММА.

С учетом того, что

$$\hat{L}_2 \{Z^{\pm n}\} = 0,$$

действие оператора (7) на колебание (5) приводит к приближенному равенству

$$\hat{L}_2 \left\{ \frac{1}{2}A[n]Z^n + k.c. \right\} \approx (A[n] - A[n-1]) (\text{Re}(Z)Z - 1) Z^{n-2} + k.c.$$

При его выводе использовано условие медленности изменения комплексной амплитуды  $A[n]$  в форме  $A[n-1] - A[n-2] \approx A[n] - A[n-1]$ .

Подстановка решения (5) в правую часть уравнения (6) после алгебраических преобразований с учетом допущения о том, что для нелинейных и диссипативных членов  $A[n-2] = A[n-1]$ , дает следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \mu_1 y[n-1] + \mu_2 y[n-2] + \gamma F(y) \approx \\ & \approx \frac{1}{2} [\mu_1 Z + \mu_2 + \gamma G_1 (|A[n-1]|)] A[n-1] Z^{n-2} + k.c. + \text{garm}. \end{aligned}$$

Здесь

$$G_1(|A[n-1]|) = Z - 1 + \frac{1}{4} (2 - 3Z + Z^2) |A[n-1]|^2,$$

а слагаемое, обозначенное как "garm", содержит высшие гармоники автоколебаний — составляющие, пропорциональные  $Z^{3n}$ ,  $Z^{5n}$  и т. д.

Приравняв теперь коэффициенты при  $Z^n$  в правой и левой частях преобразованного уравнения движения, получим разностное уравнение первого порядка для комплексной амплитуды  $A[n]$ :

$$A[n] = A[n-1] + \frac{1}{2(\operatorname{Re}(Z)Z - 1)} [\mu_1 Z + \mu_2 + \gamma G_1(|A[n-1]|)] \times \\ \times A[n-1] + \frac{ZE}{2(\operatorname{Re}(Z)Z - 1)}. \quad (8)$$

Это уравнение, используя терминологию теории нелинейных колебаний в непрерывном времени, можно назвать укороченным уравнением для комплексной амплитуды ДВ-осциллятора. Следует отметить, что оно справедливо не только для дискретного осциллятора Ван дер Поля (4), но и для ДВ-осцилляторов вида (3) при соответствующем выборе нелинейности  $G_1(|A|)$ .

Укороченное уравнение (8) по форме является простым рекуррентным соотношением и позволяет, исходя из заданного начального значения  $A[0]$ , исследовать переходные процессы в синхронизируемом ДВ-осцилляторе.

Для режима установившихся синхронных автоколебаний ( $A[n] = A_s = \text{const}$ ) оно переходит в нелинейное алгебраическое уравнение

$$[\mu_1 Z + \mu_2 + \gamma G_1(|A_s|)] A_s + ZE = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) решается численно. Результатом решения являются АЧХ  $|A_s(\Omega)|$  и ФЧХ  $\varphi_s(\Omega)$  синхронных колебаний [6]. При исследовании устойчивости синхронного режима укороченное уравнение (8) линеаризуется в окрестности решений  $A_s$  [6].

## 2. Результаты моделирования

Приведем некоторые результаты моделирования автоколебаний в ДВ-осцилляторе Ван дер Поля с использованием укороченного уравнения (8).

В частном случае, когда  $E = 0$ , уравнение можно применить для расчета процесса установления амплитуды свободных автоколебаний. На рис. 1 приведен график этого процесса в осцилляторе с параметрами  $Q = 10$ ,  $\Omega_0 = 0,3$ ,  $\gamma = 0,2$ . Начальное значение амплитуды  $a[0] = 0,02$ .

Для сравнения там же приведен график огибающей, полученный путем обработки реализации автоколебаний методами теории аналитического сигнала (АС). Как видно из графиков, точные (метод АС) и приближенные (метод ММА) результаты находятся в хорошем количественном соответствии. При этом из анализа временной зависимости фазы  $\varphi[n]$  комплексной

амплитуды  $A[n]$  следует, что частота установившихся свободных автоколебаний равна  $\Omega_a = 0,287$ .

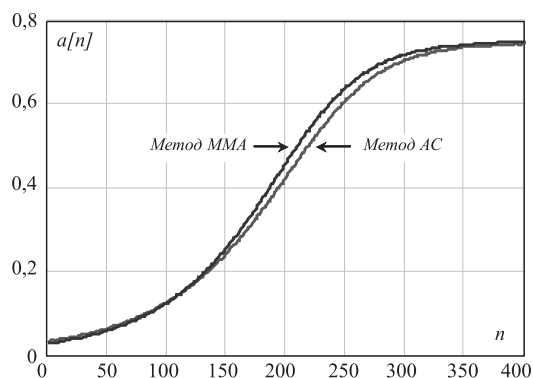


Рис. 1. Процесс установления амплитуды свободных автоколебаний

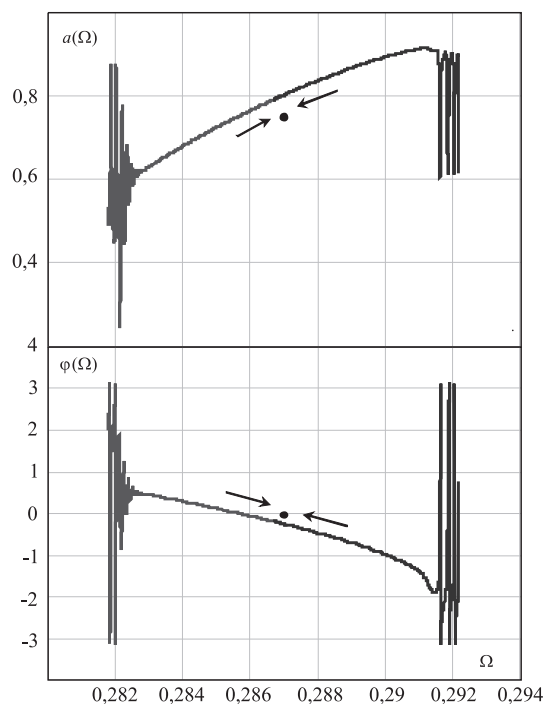


Рис. 2. Зависимости амплитуды и фазы автоколебаний от частоты внешнего воздействия в режиме захвата

Перейдем теперь к результатам моделирования процесса захвата частоты ДВ-осциллятора Ван дер Поля гармоническим сигналом с амплитудой  $E = 0,012$ . На рис. 2 представлены графики зависимости амплитуды (верхний график) и фазы (нижний график) автоколебаний осциллятора с приведенными выше параметрами от частоты внешнего воздействия. Расчет каждой из зависимостей проведен с помощью укороченного уравнения (8)

при квазистатическом изменении частоты в пределах  $0,282 \leq \Omega \leq 0,287$  (повышение частоты) и  $0,292 \geq \Omega \geq 0,287$  (понижение частоты). Такой способ изменения частоты воздействия выбран для фиксации режима захвата, т. е. перехода от биений к синхронным колебаниям. Точка на рисунках соответствует свободным автоколебаниям. Как видно из графиков, в области захвата АЧХ синхронных колебаний несимметрична относительно частоты  $\Omega_a$  и типична для неизохронного автогенератора [7]. На фазочастотной характеристике в окрестности  $\Omega_a$  можно выделить близкий к линейному участок, что дает возможность использовать синхронизированный ДВ-осциллятор в алгоритмах частотного детектирования [3].

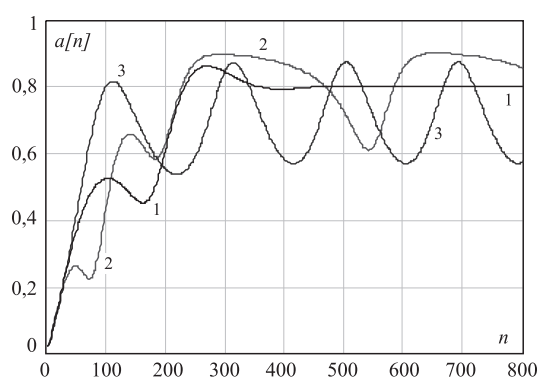


Рис. 3. Временные зависимости амплитуды автоколебаний

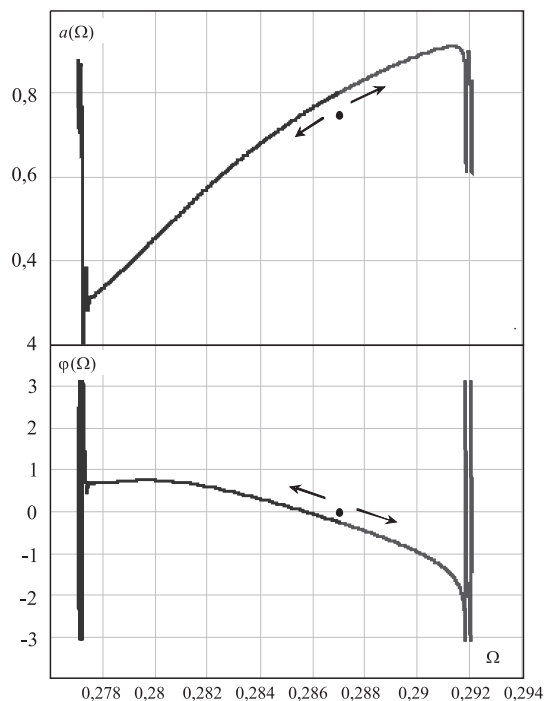


Рис. 4. Зависимости амплитуды (верхний график) и фазы (нижний график) автоколебаний от частоты внешнего воздействия в режиме удержания

Динамику амплитуды автоколебаний внутри области захвата частоты и на ее границах иллюстрирует рис. 3. На нем представлены временные зависимости амплитуды автоколебаний, возбуждаемых от начального значения  $a[0] = 0,02$ , при воздействии сигналов синхронизации с амплитудой  $E = 0,012$  и частотами  $\Omega_1 = 0,287$ ,  $\Omega_2 = 0,292$  и  $\Omega_3 = 0,281$  (кривые 1, 2 и 3). Как видно из графиков, процесс установления амплитуды синхронных колебаний не является монотонным, в отличие от аналогичного процесса в автономном генераторе. Форма биений вблизи границ области захвата может быть далека от гармонической (кривая 2).

Численный эксперимент, проводимый при квазистатическом изменении частоты внешнего воздействия в пределах  $0,287 \leq \Omega \leq 0,292$  (повышение частоты) и  $0,287 \geq \Omega \geq 0,277$  (понижение частоты), позволяет зафиксировать область удержания частоты ДВ-осциллятора. Она отличается от области захвата шириной и большей асимметрией АЧХ и ФЧХ. Частотные зависимости амплитуды и фазы синхронных колебаний в области удержания приведены на рис. 4.

## Заключение

В заключение еще раз отметим, что предложенный здесь вариант метода ММА позволяет исследовать эффект фазовой синхронизации дискретных автоколебательных систем томсоновского типа с различными видами нелинейностей. Основой анализа является укороченное уравнение (8) с соответствующей рассматриваемой системе функцией  $G_1(|A|)$ .

В то же время, как показывают результаты численных экспериментов, проведенных с использованием алгоритма (1), у ДВ-осцилляторов, генерирующих в окрестности частоты  $\Omega = 0,25$ , наблюдаются более сложные, чем квазигармонический, режимы генерации. В частности, существует режим динамического хаоса [8], а также "эффект самосинхронизации" [9], при котором подменная третья гармоника эффективно взаимодействует с автоколебаниями основной частоты, порождая процесс перестройки автогенератора, схожий с классическим процессом захвата частоты [5]. Для таких режимов укороченное уравнение (8) следует дополнить слагаемыми, учитывающими нелинейные взаимодействия шумов и гармоник автоколебаний.

## Литература

- [1] Опенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. 2-е изд. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
- [2] Зайцев В.В., Давыденко С.В., Зайцев О.В. Динамика автоколебаний дискретного осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2000. Т. 3. № 2. С. 64–67.

- [3] Зайцев В.В., Зайцев О.В. Детектор ЧМ-сигнала на основе кольца фазовой автоподстройки частоты дискретного автогенератора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2005. Т. 8. № 1. С. 82–84.
- [4] Зайцев В.В. Скрытая передача информации на основе хаотических автоколебаний дискретного осциллятора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2007. Т. 10. № 1. С. 132–135.
- [5] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
- [6] Агибалов С.А., Зайцев В.В., Карлов А.В.-мл. Синхронизация ДВ-осциллятора Ван дер Поля гармоническим сигналом // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т. 13. № 4.
- [7] Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
- [8] Зайцев В.В., Зайцев О.В., Яровой Г.П. Статистические оценки характеристик хаотических автоколебаний дискретного осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2001. Т. 4. № 1. С. 18–21.
- [9] Зайцев В.В., Зайцев О.В., Никулин А.В. Исследование эффекта самосинхронизации дискретного осциллятора Ван дер Поля // II Международная НТК "Физика и технические приложения волновых процессов: тез. докл. Самара, 2003. С. 114–115.

Поступила в редакцию 22/II/2010;  
в окончательном варианте — 22/II/2010.



## MODELING OF ESTABLISHING SYNCHRONIZATION MODE IN DISCRETE-TIME OSCILLATOR

© 2010 S.A. Agibalov, V.V. Zaitsev, A.V. Karlov-junior<sup>2</sup>

To study the capture and retention of frequency of self-oscillatory system in discrete time it is proposed to use the method of slowly varying amplitudes. SVA method used in the analog area is extended to discrete systems. Examples of calculations of dynamic amplitude and phase characteristics of the oscillations of the discrete Van der Pol oscillator forced by a harmonic signal are given.

**Key words:** self-oscillatory system, discrete time, locking, slow-changing amplitudes method.

Paper received 22/II/2010.

Paper accepted 22/II/2010.

---

<sup>2</sup>Agibalov Sergei Alexandrovich ([comphysics@ssu.samara.ru](mailto:comphysics@ssu.samara.ru)), Zaitsev Valeriy Vasilievich ([zaitsev@ssu.samara.ru](mailto:zaitsev@ssu.samara.ru)), Karlov-junior Alexander Vladimirovich ([a.v.karlov@ssu.samara.ru](mailto:a.v.karlov@ssu.samara.ru)), Dept. of Radiophysics and Computer Modelling of Radiotechnical Systems, Samara State University, Samara, 443011, Russia.