МАТЕМАТИКА

УДК 517.988.67

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ СЕМЕЙСТВ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ В ГЛУБОКОМ ПРОСТРАНСТВЕННОМ СЛОЕ ФЛОТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ[1]

© 2009 А.Н. Андронов[2]

Рассматриваются потенциальные течения несжимаемой тяжелой капиллярной жидкости в пространственном слое бесконечной глубины со свободной верхней границей. Вычисляется асимптотика периодических течений в пространственном слое со свободной границей, близкой к горизонтальной плоскости $z = 0$, ответвляющихся от основного течения с постоянной скоростью V в направлении оси Ox. Исследуется их орбитальная устойчивость относительно возмущений той же симметрии. Применяются методы группового анализа и теории ветвления в условиях групповой инвариантности. Особое внимание уделяется случаям высокого ($n \geqslant 4$) вырождения линеаризованного оператора.

Ключевые слова: слой глубокой флотирующей жидкости, капиллярно-гравитационные поверхностные волны, ветвление, устойчивость, групповая симметрия.

1. Постановка задачи

Рассматриваются потенциальные течения несжимаемой тяжелой капиллярной жидкости в пространственном слое бесконечной глубины со свободной верхней границей. Постановка задачи о капиллярно-гравитационных волнах восходит к известным работам А.И. Некрасова [1, 2], T. Levi-Civita [3] и D. Struik [4]. В работах [5-10] рассматривалась пространственная задача. В работах [6-8] для вычисления асимптотики малых разветв-

[1]Полученные результаты поддержаны грантом РФФИ-Румынская академия №07-01-91680а.

[2]Андронов Артем Николаевич (arbox@inbox.ru), кафедра прикладной математики Мордовского государственного университета, 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, 68.

ляющихся решений применялось групповое расслоение, а в [9, 10] — методы группового анализа [11] в задачах теории бифуркаций [12], развитые в [13-15], нашедшие применение в ряде задач поверхностных волн и физики фазовых переходов [9, 10, 13-15]. Определяются периодические с периодами $\frac{2\pi}{a} = a_1$ и $\frac{2\pi}{b} = b_1$ потенциальные течения тяжелой капиллярной глубокой жидкости в пространственном слое со свободной верхней границей, близкой к горизонтальной плоскости $z = 0$, ответвляющиеся от основного течения со скоростью V в направлении оси Ox. Потенциал скорости имеет вид $\varphi(x, y, z) = Vx + \Phi(x, y, z)$. Предположение о бесконечной глубине слоя значительно упрощает вычисления по сравнению с [6-10] и позволяет исследовать устойчивость разветвляющихся решений относительно возмущений с той же симметрией.

В безразмерных переменных описывающая ответвляющиеся периодические режимы система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\Delta\Phi = 0, -\infty < z < f(x, y); \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} = (\nabla f, \nabla_{xy}\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}, z = f(x, y); \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + F^2 f + \frac{k}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\left[F^2 + (-\nabla f \cdot \nabla_{xy} + \frac{\partial}{\partial z})(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi^2|)\right] -$$
$$-\gamma F^2 div(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}) = const, z = f(x, y) \tag{1.3}$$

с условиями убывания функции Φ и первых ее производных на бесконечности. Второе равенство в (1.1)–(1.3) является кинематическим условием на поверхности слоя, а третье — описывающим баланс сил (интеграл Бернулли), $F^2 = \frac{gL}{V^2}$ (число Фруда), $\gamma = \frac{\sigma}{\rho g L^2}$(число Бонда), $k = \frac{\rho_0}{\rho L}$.

Система (1.1)–(1.3) инвариантна относительно двумерной группы сдвигов $L_\beta g(x, y) = g(x + \beta_1, y + \beta_2)$ и отражений

$$\begin{aligned} S_1 &: x \to -x, \Phi(x, y, z) \to -\Phi(-x, y, z), f(x, y) \to f(-x, y), \\ S_2 &: y \to -y, \Phi(x, y, z) \to \Phi(x, -y, z), f(x, y) \to f(x, -y), \end{aligned}$$

представляющих собой группу симметрии прямоугольной решетки.

2. Построение систем разветвления

Выполняя распрямляющую свободную верхнюю границу замену переменных $\zeta = z - f(x, y)$, $\Phi(x, y, \zeta + f(x, y)) = u(x, y, \zeta)$ и полагая $F^2 = F_0^2 + \varepsilon$, получаем эквивалентную (1.1) систему

$$\Delta u = 2u_{x\zeta}f_x + 2u_{y\zeta}f_y + u_\zeta(f_{xx} + f_{yy}) - u_{\zeta\zeta}(f_x^2 + f_y^2) = w^{(0)}(u, f), -\infty < \zeta < 0; \tag{2.1}$$

$$u_\zeta - f_x = u_x f_x + u_y f_y - u_\zeta(f_x^2 + f_y^2) = w^{(1)}(u, f), \zeta = 0; \tag{2.2}$$

$$u_x+ku_{x\zeta}+F_0^2-\gamma F_0^2\Delta f=u_\zeta f_x-\varepsilon f+\gamma\varepsilon\Delta f-\tfrac{1}{2}(u_x^2+u_y^2+u_\zeta^2)+u_xu_\zeta f_x+$$
$$+u_yu_\zeta f_y-\gamma(F_0^2+\varepsilon)\left[\tfrac{3}{2}(f_x^2f_{xx}+f_y^2f_{yy})+\tfrac{1}{2}(f_x^2f_{yy}+f_y^2f_{xx})+2f_xf_yf_{xy}\right]+$$
$$+\tfrac{1}{2}k(F_0^2+\varepsilon)\left(f_x^2+f_y^2\right)+k\left[-f_yu_{xy}-f_x(u_{xx}+u_{\zeta\zeta})+u_xu_{x\zeta}+u_yu_{y\zeta}+u_\zeta u_{\zeta\zeta}+\right.$$
$$+\tfrac{3}{2}f_x^2u_{x\zeta}+\tfrac{1}{2}f_y^2u_{x\zeta}+u_\zeta(f_xf_{xx}+f_yf_{xy}-2u_{x\zeta}f_x-2u_{y\zeta}f_y)-u_{xy}(f_xu_y+f_yu_x)-$$
$$\left.-u_{\zeta\zeta}(u_xf_x+u_yf_y)-f_xu_xu_{xx}-f_yu_yu_{yy}+f_xf_yu_{y\zeta}\right]=w^{(2)}(u,f,\varepsilon),\zeta=0; \tag{2.3}$$

$$k<\gamma F_0^2 \quad \text{(условие эллиптичности интеграла Бернулли (2.3))} \tag{2.4}$$

$w^{(j)}$, $j=0,\ 1,\ 2$ — малые нелинейности. Система (2.1)–(2.3) может быть представлена нелинейным функциональным уравнением $BX=R(X,\varepsilon)$, $R(0,\varepsilon)\equiv 0$, $R_x(0,0)=0$, $X=\{u,f\}$ — задачей о точках бифуркации с линейным фредгольмовым [16] оператором $B=B_{mn}\colon C^{2+\alpha}(\Pi_0\times(-\infty,0])+$ $+\,C^{2+\alpha}(\Pi_0)\to C^\alpha(\Pi_0\times(-\infty,0])+C^\alpha(\Pi_0)+C^\alpha(\Pi_0)$, $0<\alpha<1$, Π_0 — прямоугольник периодов в плоскости (x,y). Представляя в однородном уравнении $BX=0$ функцию $f(x,y)$ отрезком ряда Фурье $\sum\limits_{m,n}(a_{mn}\cos max\cos nby+$ $+\,b_{m,n}\cos max\sin nby+c_{mn}\sin max\cos nby+d_{mn}\sin max\sin nby)$, находим

$$u(x,y,\zeta)=\sum_{m,n}\tfrac{mae^{s_{mn}\zeta}}{s_{mn}}(c_{mn}\cos max\cos nby+d_{m,n}\cos max\sin nby-$$
$$-a_{mn}\sin max\cos nby-b_{mn}\sin max\sin nby),s_{mn}^2=m^2a^2+n^2b^2,F_{mn}^2=F_0^2.$$

Из уравнения (2.3) получаем дисперсионное соотношение (ДС)

$$\left(k+\frac{1}{s_{mn}}\right)m^2a^2=F_0^2(1+\gamma s_{mn}^2),s_{mn}^2=m^2a^2+n^2b^2,F_{mn}^2=F_0^2, \tag{2.5}$$

где m,n — положительные целые, n может быть равным нулю, при выполнении которого для некоторых пар (m_j,n_j), $j=1,2,\dots,\kappa$ пространство нулей $N(B)$ линеаризованного оператора B имеет вид

$$\begin{aligned}
\hat\varphi_{1j} &= \{-v_{1j}(\zeta)\sin m_jax\cos n_jby, v_{2j}\cos m_jax\cos n_jby\},\\
\hat\varphi_{2j} &= \{-v_{1j}(\zeta)\sin m_jax\sin n_jby, v_{2j}\cos m_jax\sin n_jby\},\\
\hat\varphi_{3j} &= \{v_{1j}(\zeta)\cos m_jax\cos n_jby, v_{2j}\sin m_jax\cos n_jby\},\\
\hat\varphi_{4j} &= \{v_{1j}(\zeta)\cos m_jax\sin n_jby, v_{2j}\sin m_jax\sin n_jby\},
\end{aligned}$$

где $v_{1j}(\zeta)=\frac{m_ja\sqrt{ab}}{\pi s_{m_jn_j}}e^{s_{m_jn_j}\zeta}, v_{2j}=\frac{\sqrt{ab}}{\pi}$.

Упрощающий вычисление коэффициентов УР переход от вещественного базиса к комплексному осуществляется с помощью матрицы C с диагональными блоками C_j, если j-я решетка двумерная:

$$\varphi=C'\hat\phi,\quad C_j=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & i & -i & i\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ i & -i & -i & i\end{pmatrix},\quad C_j^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & 1 & 1 & i\\ -i & 1 & 1 & i\\ i & -1 & 1 & i\\ -i & -1 & 1 & -i\end{pmatrix},$$

или

$$C_j=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad C_j^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2i & 2\\ -2i & 2\end{pmatrix},$$

если j-я решетка одномерная. Уравнение разветвления (УР) $\hat{t}(\eta,\varepsilon)=0$ в вещественных переменных при переходе к комплексному базису переходит в УР в комплексных переменных [8] $\xi_{1,2}=\eta_1\pm i\eta_2$, $\xi_{3,4}=\eta_3\pm i\eta_4$

$$t_j(\xi,\varepsilon)=(C^{-1}\hat{t})_j(C\xi,\varepsilon)=0, j=\overline{1,4}. \tag{2.6}$$

$$\varphi_{1j}=\frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta),-iv_2\}e^{i(m_jax+n_jby)}=\varphi_{\bar{l}_{1j}}=\frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta),-iv_2\}e^{i\langle\bar{l}_{1j},q\rangle},$$
$$\varphi_{3j}=\frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta),-iv_2\}e^{i(m_jax-n_jby)}=\varphi_{\bar{l}_{3j}}=\frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta),-iv_2\}e^{i\langle\bar{l}_{3j},q\rangle},$$
$$\varphi_{2j}=\varphi_{\bar{l}_{2j}}=\frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta),iv_2\}e^{-i\langle\bar{l}_{1j},q\rangle},\quad \varphi_{4j}=\varphi_{\bar{l}_{4j}}=\frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta),iv_2\}e^{-i\langle\bar{l}_{3j},q\rangle},$$
$$q=(x,y),\quad v_{1j}(\zeta)=\frac{m_ja\sqrt{ab}}{\pi s_j}e^{s_j\zeta},\quad v_2=\frac{\sqrt{ab}}{\pi},\quad \bar{l}_{2j}=-\bar{l}_{1j},\quad \bar{l}_{4j}=-\bar{l}_{3j}.$$

Известными методами [17] проверяется симметричность однородной системы (2.1)–(2.3). Те же методы, примененные к неоднородной системе (2.1)–(2.3), дают условия ее разрешимости, используемые при построении УР

$$-\int\limits_{\Pi_0\times(-\infty,0]} w^{(0)}u_{rj}dxdyd\zeta+\int\limits_{\Pi_0} w^{(1)}\left[u_{rj}(x,y,0)+k\frac{\partial f_{rj}}{\partial x}\right]dxdy+$$
$$+\int\limits_{\Pi_0} w^{(2)}f_{rj}dxdy=0, r=\overline{1,4},\quad j=1,\dots,\kappa$$

При принятой нумерации базисных элементов подпространства N и отвечающих им вершин прямоугольника $\tilde{\Pi}_0$ в обратной решетке действие группы $\tilde{G}^1$ в переменных ξ j-й решетки периодичности выражается подстановками индексов переменных ξ_{k_j} : $p_1=(1_j,2_j)(3_j,4_j), p_2==(1_j,3_j)(2_j,4_j), p_3=(1_j,4_j)(2_j,3_j)$, а групповая симметрия УР в комплексном базисе — равенствами

$$(p_kt)_r(\xi,\varepsilon)=t_r(p_k\xi,\varepsilon),\quad k=1,2,3. \tag{2.7}$$

Действительно, преобразования векторных базисных элементов $\varphi_j==\{u_j,f_j\}$ в $N(B)$ при действии группы $\tilde{G}^1$ определяются формулами

$$p_1\varphi_j=\{p_1u_j,-p_1f_j\},\quad p_2\varphi_j=\{p_2u_j,p_2f_j\},\quad p_3\varphi_j=\{p_3u_j,-p_3f_j\},$$

где $p_1g(x,y)=g(-x,-y)$, $p_2g(x,y)=g(x,-y)$, $p_3g(x,y)=g(-x,y)$. УР также наследует симметрию (2.1)–(2.3) относительно операции J комплексного сопряжения. Симметрия относительно 2-параметрической группы сдвигов наследуется УР как инвариантность относительно 2-параметрической группы $A_{g(\beta)}\cong SO(2)\times SO(2)$ вращений:

$$e^{i(l_r,\beta)}t_r(\xi,\varepsilon)=t_r(\dots,\xi_{1_j}e^{i(l_{1_j},\beta)},\dots,\xi_{4_j}e^{i(l_{4_j},\beta)},\dots;\varepsilon),\quad r=\overline{1,n}.$$

Группе $A_{g(\beta)}$ отвечает базисная система инфинитезимальных операторов ($\partial\xi_k = \partial/\partial\xi_k$, j — номер решетки симметрии)

$$\begin{aligned} X_1 = \sum_j m_j a[&-\xi_{1_j}\partial\xi_{1_j} + \xi_{2_j}\partial\xi_{2_j} - \xi_{3_j}\partial\xi_{3_j} + \xi_{4_j}\partial\xi_{4_j} - \\ &-t_{1_j}\partial t_{1_j} + t_{2_j}\partial t_{2_j} - t_{3_j}\partial t_{3_j} + t_{4_j}\partial t_{4_j}], \\ X_2 = \sum_j n_j b[&-\xi_{1_j}\partial\xi_{1_j} + \xi_{2_j}\partial\xi_{2_j} + \xi_{3_j}\partial\xi_{3_j} - \xi_{4_j}\partial\xi_{4_j} - \\ &-t_{1_j}\partial t_{1_j} + t_{2_j}\partial t_{2_j} + t_{3_j}\partial t_{3_j} - t_{4_j}\partial t_{4_j}]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Общий ранг $r_*(M)$ матрицы $M = [\Xi^s_\nu, T^s_\nu]$ коэффициентов X_1 и X_2 равен 2, если $n_j \neq 0$ хотя бы для одного j, и 1, если $n_j \equiv 0$. Полная система функционально независимых инвариантов, определяемая уравнениями $X_s I(\xi, t)$, $s = 1, 2$, содержит n инвариантов вида $I_k(\xi, t) = \frac{t_k}{\xi_k}$, $k = \overline{1, n}$, и $\frac{n}{2}$ инвариантов вида $I_{n+k}(\xi) = \xi_{2k-1}\xi_{2k}, k = \overline{1, \frac{n}{2}}$. Остальные $2n - r_*(M) - n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - r_*(M) = \nu_0$ инвариантов выбираются в виде инвариантных мономов наименьших возможных степеней от ξ. Из вида матрицы M следует, что $T = \{\xi, t | t - t(\xi) = 0\}$ является неособым инвариантным многообразием действия группы в подпространстве Ξ^{2n} векторов (ξ, t) и может быть представлено в виде $\Phi^\sigma(I_1, \dots, I_{2n-r_*}) = 0$, $\sigma = 1, \dots, n$. Так как $r_*(\Xi, T) = r_*(\Xi)$, выполнено условие разрешимости $r\left[\frac{\partial I_k}{\partial t_j}\right] = n$ системы относительно переменных t, и мы получаем общий вид УР, выраженный через степени инвариантов $I_{n+\sigma}(\xi), 1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 = n - r_*(M)$. В общем случае аналитического УР размерности $n > 4$ необходимо использование дополнительных инвариантов с последующей факторизацией по связям между использованными мономиальными инвариантами.

3. Четырехмерное подпространство нулей

При $n = \dim N(B) = 4$ система разветвления имеет вид:

$$t_s(\xi, \varepsilon) \equiv a_0^{(s)}(\varepsilon)\xi_s + \sum_q a_q^{(s)}(\varepsilon)\xi_s(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2} = 0, \quad s = \overline{1, 4},$$

где соотношения между коэффициентами и уравнениями определяются (2.7). Равенства (2.7) позволяют выразить УР системы через первое:

$$t_1(\xi, \varepsilon) \equiv A\xi_1\varepsilon + B\xi_1^2\xi_2 + C\xi_1\xi_3\xi_4 + \ldots = 0,$$

$$A = t^{(1)}_{e_1;1}, \quad B = t^{(1)}_{2e_1+e_2;0}, \quad C = t^{(1)}_{e_1+e_2+e_3}, \quad e_1 = (1, 0, 0, 0), \dots, e_4 = (0, 0, 0, 1),$$

$$t_k(\xi, \varepsilon) \equiv p_{k-1}t_1(\xi, \varepsilon) = 0, k = 2, 3, 4,$$

$$t^{(1)}_{\alpha;k} = -\int\limits_{\Pi_0\times(-\infty,0]} w^{(0)}u_2\,dxdyd\zeta + \int\limits_{\Pi_0} w^{(1)}\left[u_2(x, y, 0) + k\frac{\partial f_2}{\partial x}\right]dxdy + \\ + \int\limits_{\Pi_0} w^{(2)}f_2\,dxdy.$$

Последовательно находим

$$u_{2e_1;0} = \frac{ima^2b}{8\pi^2\left(2\gamma s_{mn}^2 - 3ks_{mn} - 1\right)}\left(\left[\left(k^2+6\gamma\right)s_{mn} - 5k\right]s_{mn}e^{2s_{mn}\zeta} - \right.$$
$$\left. -2\left[2\gamma s_{mn}^2 - 3ks_{mn} - 1\right]e^{s_{mn}\zeta}\right)e^{2i(max+nby)},$$

$$f_{2e_1;0} = \frac{abs_{mn}\left[\left(k^2+2\gamma\right)s_{mn}^2 + ks_{mn} + 2\right]}{8\pi^2\left(2\gamma s_{mn}^2 - 3ks_{mn} - 1\right)}e^{2i(max+nby)}, \quad u_{e_1+e_2;0} = const,$$

$$f_{e_1+e_2;0} = const; \quad u_{e_3+e_4;0} = const, \quad f_{e_3+e_4;0} = const; \quad u_{e_1+e_4;0} = 0,$$

$$f_{e_1+e_4;0} = \frac{ab\left[2n^2b^2\left(1+\gamma s_{mn}^2\right) - ks_{mn}\left(m^2a^2 - n^2b^2\right)\left(4\gamma s_{mn}^2 - ks_{mn} + 3\right)\right]}{4\pi^2 s_{mn}\left(1+4\gamma n^2b^2\right)\left(ks_{mn}+1\right)}e^{2inby};$$

$$u_{e_1+e_3;0} = \frac{ima^2be^{2ma\zeta}e^{imax}}{4\pi^2 s_{mn}[\left(ks_{mn}+1\right)\left(1+4\gamma m^2a^2\right)ma - 2s_{mn}\left(1+2kma\right)\left(1+\gamma s_{mn}^2\right)]}\times$$
$$\times\left(ks_{mn}\left[ks_{mn}\left(m^2a^2 - n^2b^2\right) - 5m^2a^2 - 3n^2b^2 - 2\gamma\left(s_{mn}^2 + 4m^2a^2n^2b^2\right)\right] + \right.$$
$$\left. +2\left[3\gamma s_{mn}^2\left(m^2a^2 - 2n^2b^2\right) - 2n^2b^2\left(1 - 2\gamma n^2b^2\right)\right]\right) - \frac{ima^2b}{2\pi^2}e^{s_{mn}\zeta}e^{2imax};$$

$$f_{e_1+e_3;0} = \frac{ma^2b}{4\pi^2 s_{mn}}\left[\frac{ks_{mn}\left(ks_{mn}\left(m^2a^2 - n^2b^2\right) + m^2a^2 - 3n^2b^2 - 2\gamma s_{mn}^2\right)}{\left(ks_{mn}+1\right)\left(1+4\gamma m^2a^2\right)ma - 2s_{mn}\left(1+2kma\right)\left(1+\gamma s_{mn}^2\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\left(2mas_{mn} - m^2a^2 - 2n^2b^2\right)\left(1+\gamma s_{mn}^2\right)}{\left(ks_{mn}+1\right)\left(1+4\gamma m^2a^2\right)ma - 2s_{mn}\left(1+2kma\right)\left(1+\gamma s_{mn}^2\right)}\right]e^{2imax}.$$

Тогда ненулевые коэффициенты УР имеют вид:

$$A = -(1+\gamma s_{mn}^2) < 0,$$

$$B = \frac{m^2a^3bs_{mn}}{4\pi^2}\left[\frac{ks_{mn}\left(17 - 6\gamma s_{mn}^2\right) + 3}{\left(2\gamma s_{mn}^2 - 3ks_{mn} - 1\right)} + \frac{k}{2}\left(\frac{4m^2a^2n^2b^2}{s_{mn}^2} - m^2a^2 - 3n^2b^2\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{ks_{mn}^2\left(ks_{mn}+1\right)\left[\left(k^2+2\gamma\right)s_{mn}^2 + ks_{mn} + 2\right]}{\left(1+\gamma s_{mn}^2\right)\left(2\gamma s_{mn}^2 - 3ks_{mn} - 1\right)} - 1 + \frac{3s_{mn}^2\gamma\left(ks_{mn}+1\right)}{2\left(1+\gamma s_{mn}^2\right)}\right],$$

$$C = \frac{m^2a^3b}{2\pi^2}\left[\frac{\left(3m^2a^2 - n^2b^2\right)ma}{s_{mn}^2\left(2ma + s_{mn}\right)}U_1 + \frac{m^3a^3}{s_{mn}^3}U_2 - \frac{4m^2a^2}{s_{mn}} + \frac{2n^2b^2}{s_{mn}} + \frac{2n^2b^2}{s_{mn}^3}U_3 + \right.$$
$$+k\left(-\frac{m^2a^2}{s_{mn}}U_1 + \frac{m^3a^3}{s_{mn}^2}U_2 - m^2a^2 + n^2b^2 + \frac{2n^2b^2}{s_{mn}^2}U_3\right) + \frac{\gamma\left(ks_{mn}+1\right)}{2s_{mn}\left(1+\gamma s_{mn}^2\right)}\times$$
$$\times\left(3m^4a^4 + 3n^4b^4 - 2m^2a^2n^2b^2\right) - \frac{2k\left(ks_{mn}+1\right)}{s_{mn}^2\left(1+\gamma s_{mn}^2\right)}\left(m^3a^3U_2 - \right.$$
$$\left. -n^2b^2U_3\right) + \frac{k}{2}\left(-23m^2a^2 + 5n^2b^2 - \frac{4m^2a^2n^2b^2}{s_{mn}^2} + \frac{2\left(m^4a^4 - n^4b^4\right)}{s_{mn}^2} + \right.$$
$$\left.\left. +4maU_1 + \frac{12m^2a^2U_1}{s_{mn}} + \frac{8m^3a^3U_1}{s_{mn}^2} - 4maU_2 + \frac{2m^3a^3U_2}{s_{mn}^2} - \frac{4n^2b^2U_3}{s_{mn}^2}\right)\right],$$

где U_1, U_2, U_3 определяются по формулам

$$u_{e_1+e_3;0} = \frac{ima^2b}{2\pi^2 s_{mn}}\left[U_1 e^{2ma\zeta} - s_{mn}e^{s_{mn}\zeta}\right]e^{2imax},$$

$$f_{e_1+e_3;0} = \frac{ma^2b}{2\pi^2 s_{mn}}U_2 e^{2imax}, \quad f_{e_1+e_4;0} = \frac{ab}{2\pi^2 s_{mn}}U_3 e^{2inby}.$$

Симметрия задачи относительно L_β позволяет осуществить редукцию УР $\hat{t}(\eta,\varepsilon) = 0$, полагая $\eta_2 = \eta_4 = 0$. Тогда главная часть редуцированной системы принимает вид $A\eta_1\varepsilon + B\eta_1^3 + C\eta_1\eta_3^2 = 0$, $A\eta_3\varepsilon + C\eta_1^2\eta_3 + B\eta_3^3 = 0$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Задача (1.1)–(1.3) в окрестности точки бифуркации $F_0^2 = F_{mn}^2$ — четырехкратного собственного значения, определяемого дисперсионным соотношением (2.5), имеет с точностью до преобразования $y \to -y$ два двупараметрических семейства периодических решений

$$\begin{gathered}\{\Phi^{(1)}, f^{(1)}\} = \left[-\tfrac{A}{B}\left(F^2 - F_{mn}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\Big\{\tfrac{ma\sqrt{ab}}{\pi s_{mn}}e^{s_{mn}\zeta}\cos[ma(x+\beta_1)+ \\ +nb(y+\beta_2)], \tfrac{\sqrt{ab}}{\pi}\sin[ma(x+\beta_1)+nb(y+\beta_2)]\Big\} + O\left(\left|F^2 - F_{mn}^2\right|\right), \\ sign(F^2 - F_{mn}^2) = signB, \gamma s_{mn}^2 \neq \tfrac{1}{2}, \zeta = z - f^{(1)}(x,y);\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\{\Phi^{(2)}, f^{(2)}\} = \left[-\tfrac{A}{B+C}(F^2 - F_{mn}^2)\right]^{\frac{1}{2}}\Big\{\tfrac{2ma\sqrt{ab}}{\pi s_{mn}}e^{s_{mn}\zeta}\cos[ma(x+\beta_1)]\times \\ \times\cos[nb(y+\beta_2)], \tfrac{2\sqrt{ab}}{\pi}\sin[ma(x+\beta_1)]\cos[nb(y+\beta_2)]\Big\} + \\ +O\left(\left|F^2 - F_{mn}^2\right|\right), sign(F^2 - F_{mn}^2) = sign(B+C), \zeta = z - f^{(2)}(x,y).\end{gathered} \tag{3.2}$$

4. Высокие вырождения линеаризованного оператора

A. $n_1 = n_2 = 0$, $n = \dim N(B) = 4$. Докажем возможность существования физических параметров, при которых существует решение с симметрией двух вырожденных решеток. Пусть ДС выполнено для двух пар $(m_1, 0)$ и $(m_2, 0)$: $(km_1a+1)m_1a = F_0^2(1+\gamma m_1^2a^2)$, $(km_2a+1)m_2a = F_0^2(1+\gamma m_2^2a^2)$. Разделив первое уравнение на второе, получим выражение для k:

$$k = \frac{(1+\gamma m_1^2a^2)(1+\gamma m_2^2a^2)}{m_2^2a^2 - m_1^2a^2}\left[\frac{m_1a}{1+\gamma m_1^2a^2} - \frac{m_2a}{1+\gamma m_2^2a^2}\right].$$

Положим $m_2 > m_1$ и $f(x) = \frac{x}{1+\gamma x^2}$, где $x = ma$. Тогда $f' = \frac{1-\gamma x^2}{(1+\gamma x^2)^2}$ и $f' < 0$ при $\gamma x^2 > 1$ — условие существования двух вырожденных решеток периодичности.

Группе сдвигов по координате x отвечает однопараметрическая группа вращений-отражений в пространстве векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ с диагональной матрицей $A(\beta) = diag\{e^{im_1a\beta}, e^{-im_1a\beta}, e^{im_2a\beta}, e^{-im_2a\beta}\}$.

Здесь $(m_1, 0)$ и $(m_2, 0)$ удовлетворяют дисперсионному соотношению (2.5). Группе $A(\beta)$ отвечает базисный инфинитезимальный оператор

$(\partial_{\xi_k} I = \partial I/\partial\xi_k)$ $X = \left\{\hat{X}(\xi), \hat{X}(t)\right\}$, $\hat{X}(\xi) = m_1 a\,(-\xi_1\partial_{\xi_1} I + \xi_2\partial_{\xi_2} I) +$ $+ m_2 a\,(-\xi_3\partial_{\xi_3} I + \xi_4\partial_{\xi_4} I)$.

Дифференциальное уравнение $XI(\xi,t) = 0$ определяет полную систему семи функционально независимых инвариантов $I_s(\xi,t) = \frac{t_s}{\xi_s}, s = \overline{1,4}, I_5(\xi) =$ $= \xi_1\xi_2, I_6(\xi) = \xi_3\xi_4, I_7(\xi) = \xi_1^{N/m_1}\xi_4^{N/m_2}$, где N — наименьшее общее кратное (НОК) чисел m_1 и m_2.

Согласно теореме Л.В. Овсянникова [11], получаем общий вид УР рассматриваемой задачи. Мы предполагаем УР аналитическим или достаточно гладким, поэтому при использовании построенной полной системы функционально независимых инвариантов некоторые мономиальные слагаемые в УР могут отсутствовать. Необходимо привлечь дополнительный инвариант $I_8 = \xi_2^{\frac{N}{m_1}}\xi_3^{\frac{N}{m_2}}$. Тогда в УР возникают повторяющиеся слагаемые и нужно провести факторизацию по связи между инвариантами $I_7(\xi)I_8(\xi) = I_5^{\frac{N}{m_1}}(\xi)I_6^{\frac{N}{m_2}}(\xi)$. Эта факторизация обозначается символом $[...]^{out}$. Таким образом, УР принимает вид $t_k(\xi,\varepsilon) \equiv a_0^{(k)}(\varepsilon)\xi_k +$ $+ \sum\limits_q a_q^k(\xi)(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2}\left[\xi_k\left(\xi_1^{\frac{N}{m_1}}\xi_4^{\frac{N}{m_2}}\right)^{q_3}\left(\xi_2^{\frac{N}{m_1}}\xi_3^{\frac{N}{m_2}}\right)^{q_4}\right]^{out} = 0$, $k = \overline{1,4}$, где символ $[...]^{out}$ означает, что в выражении внутри скобки сомножители вида $\xi_{2k-1}\xi_{2k}$ должны быть опущены.

В частности, для взаимно простых m_1 и m_2 главная часть УР принимает вид

$$cA\xi_1\varepsilon + B\xi_2^{m_2-1}\xi_3^{m_1} + \dots = 0, A\xi_2\varepsilon + B\xi_1^{m_2-1}\xi_4^{m_1} + \dots = 0,$$
$$C\xi_3\varepsilon + D\xi_1^{m_2}\xi_4^{m_1-1} + \dots = 0, C\xi_4\varepsilon + D\xi_2^{m_2}\xi_3^{m_1-1} + \dots = 0.$$

B. $n = \dim N(B) = 6$. Существование трех вырожденных решеток периодичности ($n_1 = n_2 = n_3 = 0$) невозможно. Действительно, пусть $m_1 < m_2 < m_3$ и $am_k = s_k$. Тогда

$$(1+\gamma s_2^2)\frac{s_1}{s_2^2 - s_1^2} - (1+\gamma s_1^2)\frac{s_2}{s_2^2 - s_1^2} = (1+\gamma s_3^2)\frac{s_1}{s_3^2 - s_1^2} - (1+\gamma s_1^2)\frac{s_3}{s_3^2 - s_1^2} =$$
$$= (1+\gamma s_3^2)\frac{s_2}{s_3^2 - s_2^2} - (1+\gamma s_2^2)\frac{s_3}{s_3^2 - s_2^2}.$$

Используя эти соотношения, получаем $\gamma = \frac{s_3 - s_2}{s_1^2(s_2 - s_3)} = -\frac{1}{s_1^2} < 0$, что противоречит положительности γ. Правильная гексагональная решетка периодичности также невозможна. Действительно [9], $\gamma = \frac{s_2 m_1^2(ks_1+1) - s_1 m_2^2(ks_2+1)}{s_1^3 m_2^2(ks_2+1) - s_2^3 m_1^2(ks_1+1)}$, тогда для $s_1 = s_2$ оно отрицательно ($\gamma = -\frac{1}{s^2}$). Мы можем записать два последовательных поворота на угол $\pi/3$ в виде $m_1 ax + m_1 a\sqrt{3}y \Rightarrow -m_1 ax +$ $+ \sqrt{3}m_1 ay \Rightarrow -m_1 a(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y) + \sqrt{3}m_1 a(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}y) = -2m_1 ax$, и предположение $s_1^2 = m_1^2 a^2 + 3m_1^2 a^2 = 4m_1^2 a^2 = s_2^2$ неверно.

Существование неправильной гексагональной, а также двух 4-мерных решеток периодичности (следующий пункт) может быть доказано, как и в работе [9] (используя непрерывную зависимость ДС относительно k).

При $\dim N(B) = 6$ один из прямоугольников периодов вырождается в отрезок. Базис $\{\varphi_i\}_1^6$ подпространства нулей нумеруется векторами $\bar{l}(m_i, n_i) = m_i\bar{l}^{(1)} + n_i\bar{l}^{(2)}$ обратной решетки: $\varphi_k = \varphi_{\bar{l}_k(m,n)}$ $(\bar{l}^{(1)} = a\bar{e}_1,\ l^{(2)} = b\bar{e}_2)$, $\bar{l}_1 = \bar{l}_1(m_1, n_1) = m_1\bar{l}_1 + n_1\bar{l}_2,\ \bar{l}_3 = m_1\bar{l}_1 - n_1\bar{l}_2,\ \bar{l}_5 = \bar{l}_5(m_2, 0) = m_2\bar{l}_1,\ \bar{l}_{2j} = -\bar{l}_{2j-1}$. В такой нумерации базисных элементов и отвечающих им вершин $(\pm m_1, \pm n_1)$ и $(\pm m_2, 0)$ соответствующих прямоугольников Π_{01} и Π_{02} в обратной решетке действие группы $\tilde{G}^1$ симметрии прямоугольника выражается подстановкой индексов переменных ξ_k, а групповая инвариантность УР относительно $\tilde{G}^1$ — равенствами типа (2.7). Эти равенства вместе с инвариантностью относительно операции J комплексного сопряжения позволяют выразить уравнения системы через первое и пятое.

Для построения этих уравнений используем инвариантность УР относительно двумерной группы сдвигов $e^{i(\bar{l}_k,\beta)}t_k(\xi,\varepsilon) = t_k(\xi_1 e^{i(\bar{l}_1,\beta)}, \ldots, \xi_6 e^{i(\bar{l}_6,\beta)}, \varepsilon)$. Тогда коэффициент $t^{(k)}_{\alpha;j}$ при ξ^α в k-м уравнении может быть отличен от нуля, если выполнено равенство $\bar{l}_k = \alpha_1\bar{l}_1 + \ldots + \alpha_6\bar{l}_6, |\alpha| = r$.

Рассмотрим такой случай шестимерного ветвления, когда взаимодействие решеток происходит на первом шаге, т.е. имеют место соотношения: $\bar{l}_1 = \bar{l}_4 + \bar{l}_5, \bar{l}_3 = \bar{l}_2 + \bar{l}_5, \bar{l}_5 = \bar{l}_1 + \bar{l}_3, \bar{l}_2 = \bar{l}_3 + \bar{l}_6, \bar{l}_4 = \bar{l}_1 + \bar{l}_6, \bar{l}_6 = \bar{l}_2 + \bar{l}_4, m_2 = 2m_1$.

Аналогично предыдущему пункту определяем систему функционально независимых инвариантов, получаем УР, главная часть которого имеет вид

$$\begin{aligned} &A\xi_1\varepsilon + iB\xi_4\xi_5 = 0, \quad A\xi_3\varepsilon + iB\xi_2\xi_5 = 0, \quad C\xi_5\varepsilon + iD\xi_1\xi_3 = 0,\\ &A\xi_2\varepsilon - iB\xi_3\xi_6 = 0, \quad A\xi_4\varepsilon - iB\xi_1\xi_6 = 0, \quad C\xi_6\varepsilon - iD\xi_2\xi_4 = 0, \end{aligned}$$

где $A = a^1_{01},\ C = a^2_{01},\ iB = a^{(1;1)}_{0;1},\ iD = a^{(2;1)}_{0;1},\ A,\ B,\ C,\ D$ — вещественны.

Главная часть УР в вещественных переменных принимает вид

$$\begin{aligned} A\eta_1\varepsilon + B(\eta_1\eta_5 + \eta_3\eta_6) = 0, &\quad A\eta_2\varepsilon + B(\eta_2\eta_5 + \eta_4\eta_6) = 0,\\ A\eta_3\varepsilon + B(\eta_1\eta_6 - \eta_3\eta_5) = 0, &\quad A\eta_4\varepsilon + B(\eta_2\eta_6 - \eta_4\eta_5) = 0,\\ C\eta_5\varepsilon + \frac{1}{4}D(-\eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2) = 0, &\, C\eta_6\varepsilon + \frac{1}{2}D(-\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4) = 0. \end{aligned}$$

Выполняя редукцию УР, положив $\eta_2 = 0 = \eta_3$, приходим к системе разветвления, имеющей 4 решения. Комбинации сдвигов по координате x на $\frac{\pi}{2m_1a}, \frac{\pi}{m_1a}$ и по координате y на $\frac{\pi}{2n_1b}, \frac{\pi}{n_1b}$, индуцированные группой сдвигов L_β при соответствующих значениях $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, индуцируют преобразования $\{\eta_1 \to \eta_4,\ \eta_4 \to \eta_1,\ \eta_5 \to -\eta_5\}$, $\{\eta_1 \to -\eta_1,\ \eta_5 \to \eta_5\}$, $\{\eta_4 \to -\eta_4,\ \eta_5 \to \eta_5\}$, которые оставляют только одно решение $\left(2\sqrt{-\frac{AC}{BD}}\varepsilon, 0, 0, 0, -\frac{A}{B}\varepsilon, 0\right)$.

C. $n = \dim N(B) = 4+4$. Дополнительно к доказательству такого вырождения, указанному в предыдущем пункте, докажем этот факт в случае симметрии двойного квадрата. Рассмотрим два ДС: $(k + \frac{1}{s_1})m_1^2a^2 = F_0^2(1 + \gamma s_1^2)$,

$(k+\frac{1}{2s_1})4m_1^2a^2 = F_0^2(1+4\gamma s_1^2)$, из которых получаем $2\gamma s_1^2 - 3ks_1 - 1 = 0 \Rightarrow$ $(s_1>0)$ $s_1 = \frac{3k+\sqrt{9k^2+8\gamma}}{4\gamma}$ — условие возможности такого вырождения.

Находим систему функционально независимых инвариантов, выписываем общий вид УР. Симметрия группы прямоугольника выражается подстановками индексов переменных ξ_k: p_1=(12)(34)(56)(78), $p_2 = (13)(24)(57)(68)$, $p_3 = (14)(23)(58)(67)$, а соответствующая групповая симметрия УР — равенствами типа (2.7). Эти равенства позволяют выразить все уравнения через первое и пятое и дают симметрию коэффициентов УР.

$$
\begin{aligned}
t_1(\xi,\varepsilon) &= A\xi_1\varepsilon + B\xi_1^2\xi_2 + C\xi_1\xi_3\xi_4 + D\xi_1\xi_5\xi_6 + E\xi_1\xi_7\xi_8 = 0,\\
t_5(\xi,\varepsilon) &= F\xi_5\varepsilon + G\xi_5^2\xi_6 + H\xi_5\xi_7\xi_8 + K\xi_1\xi_2\xi_5 + L\xi_3\xi_4\xi_5 = 0.
\end{aligned}
$$

Переходя к вещественному базису в $N(B)$, выполняя редукцию соответствующего УР $(\eta_2 = \eta_3 = 0)$, получаем решения.

D. $n = \dim N(B) = 4{+}2{+}2$. Предположим, что взаимодействие решеток периодичности осуществляется на первом шаге. Это возможно, например, если векторы обратной решетки удовлетворяют соотношениям

$$l_1 = l_4 + l_5, l_2 = l_3 + l_6, l_3 = l_2 + l_5, l_4 = l_1 + l_6, l_7 = 2l_5, l_8 = 2l_6.$$

Существование такой ситуации можно доказать, используя ДС для решеток (m_1, n_1), $(2m_1, 0)$, $(4m_1, 0)$. Симметрия относительно дискретной группы позволяет выразить уравнения системы разветвления через первое, пятое и седьмое и тем самым устанавливает связи между коэффициентами $a_q^{(k)}(\varepsilon)$ УР. Переходя к вещественному базису в $N(B)$ по формулам типа (2.6), выполняя редукцию соответствующего УР, получаем систему:

$$
\begin{gathered}
A\eta_1\varepsilon + B\eta_1\eta_5 = 0, \quad B\eta_4\eta_6 = 0, \quad B\eta_1\eta_6 = 0, \quad A\eta_4\varepsilon - B\eta_4\eta_5 = 0,\\
C\eta_5\varepsilon + \frac{D}{2}(\eta_4^2 - \eta_1^2) + E(\eta_5\eta_7 + \eta_6\eta_8) = 0, \quad C\eta_6\varepsilon + E(\eta_5\eta_8 - \eta_6\eta_7) = 0,\\
F\eta_7\varepsilon + G(\eta_6^2 - \eta_5^2) = 0, \quad F\eta_8\varepsilon + 2G\eta_5\eta_6 = 0,
\end{gathered}
$$

имеющую 5 решений, из которых существенными являются только три.

5. Об устойчивости решений задач о капиллярно-гравитационных волнах

A. *Флотирующая жидкость. 4-мерное вырождение.* Согласно [21], орбитальная устойчивость семейств разветвляющихся решений (1.1)–(1.3) определяется устойчивостью стационарных решений уравнения $\frac{d\eta}{dt} = t(\eta,\varepsilon)$, где $t(\eta,\varepsilon)$ — левая часть системы разветвления, $\varepsilon = F^2 - F_{mn}^2$. Устойчивость же последних определяется знаками собственных значений матрицы Якоби $J = \left[\frac{\partial \bar{t}_i}{\partial \eta_j}\right]$ на этих решениях. Действие оператора $L_{\beta_1\beta_2}$ на произвольный элемент $N(B_{mn})$ равносильно преобразованию его координат в разложении по базису подпространства нулей с помощью матрицы A_g (здесь

$f_1(\beta_1,\beta_2) = \cos ma\beta_1 \cos nb\beta_2,\ f_2(\beta_1,\beta_2) = \cos ma\beta_1 \sin nb\beta_2,\ f_3(\beta_1,\beta_2) =$ $= \sin ma\beta_1 \cos nb\beta_2,\ f_4(\beta_1,\beta_2) = \sin ma\beta_1 \sin nb\beta_2)$

$$A_g = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \begin{pmatrix} f_1(\beta_1,\beta_2) & f_2(\beta_1,\beta_2) & f_3(\beta_1,\beta_2) & f_4(\beta_1,\beta_2) \\ -f_2(\beta_1,\beta_2) & f_1(\beta_1,\beta_2) & -f_4(\beta_1,\beta_2) & f_3(\beta_1,\beta_2) \\ -f_3(\beta_1,\beta_2) & -f_4(\beta_1,\beta_2) & f_1(\beta_1,\beta_2) & f_2(\beta_1,\beta_2) \\ f_4(\beta_1,\beta_2) & -f_3(\beta_1,\beta_2) & -f_2(\beta_1,\beta_2) & f_1(\beta_1,\beta_2) \end{pmatrix}.$$

С помощью матрицы A_g определяется семейство решений $\tilde{\eta} = A_g \tilde{\eta}_0(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}(f_1(\beta_1,\beta_2), \quad -f_2(\beta_1,\beta_2), -f_3(\beta_1,\beta_2), \quad f_4(\beta_1,\beta_2))^T \left(-\frac{A}{B}\varepsilon\right)^{1/2} + o(|\varepsilon|^{1/2})$, $\tilde{\eta}_0(\varepsilon) = (1,0,0,0)^T \left(-\frac{A}{B}\varepsilon\right)^{1/2} + o(|\varepsilon|^{1/2})$, где $\tilde{\eta}_0(\varepsilon)$ — решение редуцированного УР $(\beta_1 = \beta_2 = 0)$.

Проверим выполнение соотношений

$$t_\eta(\tilde{\eta}_0(\varepsilon),\varepsilon)\,[\Lambda_i \tilde{\eta}_0(\varepsilon)] = 0, i = 1,2, \tag{5.1}$$

где Λ_i — инфинитезимальные операторы алгебры Ли в Ξ^4_φ

$$t_\eta(\tilde{\eta}_0(\varepsilon),\epsilon) = diag\left\{A\varepsilon - 3A\varepsilon, 0, 0, A\varepsilon - \frac{CA}{B}\varepsilon\right\},$$

$$\Lambda_1 \tilde{\eta}_0(\varepsilon) = \frac{\partial A_\beta}{\partial \beta_1}|_{\beta_1=\beta_2=0} \cdot \tilde{\eta}_0(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}(0,0,-m_1 a, 0)^T \left(-\frac{A}{B}\varepsilon\right)^{1/2},$$

$$\Lambda_2 \tilde{\eta}_0(\varepsilon) = \frac{\partial A_\beta}{\partial \beta_2}|_{\beta_1=\beta_2=0} \cdot \tilde{\eta}_0(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}(0,-m_1 a, 0, 0)^T \left(-\frac{A}{B}\varepsilon\right)^{1/2}.$$

Соотношения (5.1) выполнены, и устойчивость ответвляющихся решений $A_\beta \tilde{\eta}_0(\varepsilon)$ определяется знаками главных членов по ε собственных значений матрицы Якоби J на этом решении, которые имеют вид ($\tilde{B} = B + C$, $\tilde{C} = 3B - C$) $\nu_{1,2} = 0,\ \nu_3 = -2A\varepsilon,\ \nu_4 = \frac{2A\varepsilon}{\tilde{B}+\tilde{C}}(\tilde{C} - \tilde{B})$.

Теорема 5.1. Для того чтобы семейство решений было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$sign\varepsilon = signB = sign(\tilde{B}+\tilde{C}) = -1,$$

$$\begin{cases} \tilde{B}+\tilde{C} < 0, \\ \tilde{C} - \tilde{B} > 0 \end{cases} <=> 0 < \frac{|\tilde{C}|}{|\tilde{B}|} < 1. \tag{5.2}$$

Рассмотрим вторую группу решений. Главные части собственных значений матрицы Якоби J на этих решениях определяются из уравнения

$$(A\varepsilon - \frac{(3B+C)A\varepsilon}{B+C} - \nu^2)\left[\left(A\varepsilon - \frac{2AB\varepsilon}{B+C} - \nu\right)^2 - \left(\frac{AD\varepsilon}{B+C}\right)^2\right] = 0,$$

$\nu_{1,2} = -\frac{2AB\varepsilon}{B+C},\ \nu_3 = -\frac{2A\varepsilon}{B+C}(C - B),\ \nu_4 = 0.$

Теорема 5.2. Для того чтобы семейство решений было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$sign\varepsilon = sign(B+C) = sign\tilde{B} = -1,$$

$$0 < \tfrac{|\tilde{B}|}{|\tilde{C}|} < 1. \tag{5.3}$$

Замечание 1. При выполнении неравенства (5.2), (5.3) семейство (1.1)–(1.3), соответствующее решениям (3.1), (3.2), будет устойчиво относительно возмущений того же класса решеток периодичности, а неустойчивость относительно возмущений класса решеток той же периодичности означает неустойчивость вообще. Придавая значения параметрам n, b, $q = \frac{ma}{nb}$, мы определяем $\frac{|\tilde{C}|}{|\tilde{B}|}$. Результаты для первой группы решений представлены в табл. 1 (для k=0.8), где решения (3.1) неустойчивы, а решения (3.2) — неустойчивы.

Таблица 1

n	b	q	$\lvert\tilde{C}\rvert/\lvert\tilde{B}\rvert$		n	b	q	$\lvert\tilde{C}\rvert/\lvert\tilde{B}\rvert$
1,000	1,000	1,3000	0,850813039		1,000	1,000	1,4500	0,178466137
1,000	1,000	1,3500	0,635714027		1,000	1,000	0,5000	0,131115256
1,000	1,000	1,4000	0,419410516		1,000	1,000	0,5500	0,622709000

Результаты для второй группы решений содержатся в табл. 2, где решения (3.2) устойчивы, в то время как решения (3.1) неустойчивы.

Таблица 2

n	b	q	$\lvert\tilde{B}\rvert/\lvert\tilde{C}\rvert$		n	b	q	$\lvert\tilde{B}\rvert/\lvert\tilde{C}\rvert$
1,000	1,000	0,8000	0,040375771		2,000	2,000	0,4000	0,122130193
1,000	1,000	0,9000	0,157498907		3,000	3,000	0,1000	0,62698459
1,000	1,000	1,0000	0,301714049		3,000	3,000	0,2000	0,620169486
2,000	2,000	0,1000	0,292847947		3,000	3,000	0,3000	0,538527089
2,000	2,000	0,2000	0,344675422		3,000	3,000	0,4000	0,381837849
2,000	2,000	0,3000	0,272661090		3,000	3,000	0,5000	0,098692584

B. *Жидкость без флотации,* $k = 0$. *4-мерное вырождение.* Результаты для первой группы решений показаны в табл. 3, где решения (3.1) устойчивы, а решения (3.2) неустойчивы.

Таблица 3

n	b	q	$\lvert\tilde{C}\rvert/\lvert\tilde{B}\rvert$
2,000	2,000	0,1000	0,595643406
2,000	2,000	0,2000	0,761614822
2,000	2,000	0,3000	0,792834919
2,000	2,000	0,4000	0,765693784
2,000	2,000	0,5000	0,586082036

А для второй группы результаты показаны в табл. 4, где решения (3.2) устойчивы, а решения (3.1) неустойчивы.

Таблица 4

n	b	q	$\lvert\tilde{B}\rvert/\lvert\tilde{C}\rvert$		n	b	q	$\lvert\tilde{B}\rvert/\lvert\tilde{C}\rvert$
1,000	1,000	0,6000	0,054693147		2,000	1,000	0,2000	0,077310085
1,000	1,000	0,7000	0,115291056		2,000	1,000	0,3000	0,190900611
1,000	1,000	0,8000	0,170005725		2,000	1,000	0,4000	0,227631315
1,000	1,000	0,9000	0,214241214		2,000	1,000	0,5000	0,156749153
1,000	1,000	1,0000	0,244240961		2,000	1,000	0,6000	0,000648038

Замечание 2. Все таблицы сокращены для краткости изложения.

C. *Флотирующая жидкость. 6-мерное вырождение. dim N(B)=4+2.* Как и прежде, проверяем выполнение соотношений типа (5.1). Здесь $\tilde{\eta}_0(\varepsilon) = (2\sqrt{-\frac{AC}{BD}}, 0, 0, 0, -\frac{A}{B}, 0)^T\varepsilon + o(\varepsilon)$ — решение редуцированного УР.

$$t_\eta(\tilde{\eta}_0(\varepsilon), \epsilon) = diag\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2B\sqrt{-\frac{AC}{BD}}\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D\sqrt{-\frac{AC}{BD}}\varepsilon & 0 & 0 & 0 & C\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right\}.$$

Соотношения выполнены. Собственные значения матрицы Якоби J на этом решении имеют вид $\nu_{1,2,3,4} = 0$, $\nu_{5,6} = \frac{C\varepsilon \pm \sqrt{C^2\varepsilon^2 + 4AC\varepsilon^2}}{2}$. Поскольку $A, C < 0$, то одно из собственных значений будет положительно, следовательно, в данном случае устойчивости нет.

D. *Флотирующая жидкость. 8-мерное вырождение. dim N(B)=4+2+2.* Первое решение редуцированного УР $\tilde{\eta}_0^{(1)}(\varepsilon) = (0, 0, 0, \sqrt{\frac{2A}{BD}\left(-C - \frac{A^2EG}{B^2F}\right)}, \frac{A}{B}, 0, \frac{A^2G}{B^2F}, 0)^T\varepsilon + o(\varepsilon)$.

$$t_\eta(\tilde{\eta}_0^{(1)}(\varepsilon), \epsilon) = diag\left\{0, 0, 0, \begin{pmatrix} 0 & -B\tilde{\eta}_{04}^{(1)} & 0 & 0 \\ D\tilde{\eta}_{04}^{(1)} & C\varepsilon + \frac{A^2EG}{B^2F}\varepsilon & 0 & \frac{AE}{B}\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2GA}{B}\varepsilon & 0 & F\varepsilon \end{pmatrix}, 0\right\}.$$

Собственные значения матрицы Якоби J на этом решении: $\nu_{1,2,3,4,5} = 0$, ν_6, ν_7, ν_8 определяются как корни кубического уравнения, причем два из них комплексно сопряжены, а третье отрицательно. Исследование полученных выражений для комплексных корней при $\gamma \to 0$ приводит к условию, при котором решение будет устойчивым: $signBD = -1$, $\frac{EG}{B^2} > 1$.

Для второго решения: $\tilde{\eta}_0^{(3)}(\varepsilon) = (0, 0, 0, 0, \sqrt{-\frac{CF}{2EG}}, \sqrt{-\frac{CF}{2EG}}, 0, \frac{C}{E})^T\varepsilon + o(\varepsilon)$,

$$t_\eta(\tilde{\eta}_0^{(3)}(\varepsilon), \epsilon) = diag\left\{0, 0, 0, 0, \begin{pmatrix} C\varepsilon & C\varepsilon & 0 & E\tilde{\eta}_{05}^{(3)} \\ C\varepsilon & C\varepsilon & 0 & E\tilde{\eta}_{05}^{(3)} \\ -2G\tilde{\eta}_{05}^{(3)} & 2G\tilde{\eta}_{05}^{(3)} & 0 & 0 \\ 2G\tilde{\eta}_{05}^{(3)} & 2G\tilde{\eta}_{05}^{(3)} & 0 & F\varepsilon \end{pmatrix}\right\}.$$

Находим собственные значения матрицы Якоби:

$$\nu_{1,2,3,4,5,6} = 0,\ \nu_{7,8} = \frac{(F+2C)\varepsilon \pm \sqrt{(F+2C)^2\varepsilon^2 - 8CF(1+\varepsilon^2)}}{2}.$$

Так как $C, F < 0$, то при любом $\varepsilon > 0$ два последних собственных значения будут отрицательны, следовательно, при этом условии решение устойчиво.

Для третьего решения: $\tilde{\eta}_0^{(4)}(\varepsilon) = \left(0,0,0,0,0,\sqrt{-\frac{CF}{EG}}, \frac{C}{E}, 0\right)^T \varepsilon + o(\varepsilon)$,

$$t_\eta(\tilde{\eta}_0^{(3)}(\varepsilon),\epsilon) = diag\left\{0,0,0,0,0,\begin{pmatrix} 0 & -E\tilde{\eta}_{06}^{(4)} \\ 2G\tilde{\eta}_{06}^{(4)} & F\varepsilon \end{pmatrix},0\right\}.$$

Находим собственные значения матрицы Якоби: $\nu_{1,2,3,4,5,6} = 0$, $\nu_{7,8} = \frac{F\varepsilon \pm \sqrt{F^2\varepsilon^2 + 8CF\varepsilon^2}}{2}$. Так как $C, F < 0$, то одно из собственных значений $\nu_{7,8}$ положительно, следовательно, устойчивости нет.

Литература

[1] Некрасов, А.И. О волнах установившегося вида / А.И. Некрасов // Известия Ивановского политехнического института. — 6(1922). — С. 155–171.

[2] Некрасов, А.И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости /А.И. Некрасов. — М.: Издательство АН СССР, 1951. — 96 с.

[3] Levi-Civita, T. Determination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie / T. Levi-Civita // Math. Annallen. — 93 (1925). — P. 264–324.

[4] Struik, D.J. Determination rigoureuse des ondes irrotationelles periodiques / D.J. Struik // Math. Annalen. — 95 (1926). — P. 595–634.

[5] Секерж-Зенькович, Я.И. Об установивших капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды на поверхности жидкости конечной глубины/ Я.И. Секерж-Зенькович // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. — М.: Наука, 1972. — С. 445–458.

[6] Логинов, Б.В. Построение периодических решений трехмерной задачи о волнах над ровным дном / Б.В. Логинов // ДАН СССР. — 247 (1979). — №2. — С. 324–328.

[7] Логинов, Б.В. Периодические решения трехмерной задачи о волнах над ровным дном / Б.В. Логинов // Динамика сплошной среды. — 42(1979). — С. 3–22.

[8] Логинов, Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности / Б.В. Логинов. — Ташкент: Фан, 1985.

[9] Loginov, B.V. Capillary-gravity waves over the flat surface / B.V. Loginov, A.O. Kuznetsov // European Journal of Mechanics/B Fluids. — 15(1996). — №2. — P. 259–280.

[10] Логинов, Б.В. Вычисление периодических решений задачи о капиллярно-гравитационных волнах в пространственном слое флотирующей жидкости / Б.В. Логинов, С.А. Карпова // Вестник Самарского гос. университета. — 1997. — №4 (6). — С. 69–80.

[11] Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — М.:Наука, 1978 (AP, NY 1982).

[12] Вайнберг, М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. — М.: Наука, 1969. — 524 с.

[13] Логинов, Б.В. О построении уравнения разветвления по его группе симметрии (кристаллографические группы) / Б.В. Логинов, Х.Н. Рахматова, Н.Н. Юлдашев // Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. — Ташкент: Фан, 1987. — С. 183–195.

[14] Loginov, B.V. Group analysis method for construction and investigation of the bifurcation equation / B.V. Loginov // Applications of Mathematics, 37 (1992). — №4. — P. 241–248.

[15] Логинов, Б.В. Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия / Б.В. Логинов // Вестник Самарского гос. университета, 1998. — №4(10). — С. 15–70.

[16] Агранович, М.С. Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях / М.С. Агранович // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНИТИ. — 63 (1990). — С. 5–129.

[17] Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М.: Наука, 1969.

[18] Логинов, Б.В. Об использовании групповых свойств для определения многопараметрических семейств решений нелинейных уравнений / Б.В. Логинов, В.А. Треногин // Матем. сборник. — 85 (1971). — С. 440–454.

[19] Андронов, А.Н. Асимптотика разветвляющихся решений в случае четырехмерного вырождения оператора в задаче о капиллярно-гравитационных волнах на поверхности глубокой жидкости / А.Н. Андронов //Труды Средневолжского математического общества. — Саранск, 2007. — Т.9. — №2. — С. 9–14.

[20] Андронов, А.Н. О порядках вырождения линеаризованного оператора в задаче о капиллярно-гравитационных волнах на поверхности глубокой жидкости / А.Н. Андронов//Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань, 2007. — Т. 36. — С. 16-18.

[21] Loginov, B.V. Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions. / B.V. Loginov, Yu.B. Roussak // Nonlinear Analysis. — TMA. — 17. — №3. — 1991. — P. 219–231.

Поступила в редакцию 15/*XII*/2008;
в окончательном варианте — 15/*XII*/2008.

ABOUT THE STABILITY OF BRANCHING SOLUTIONS IN THE PROBLEM ON CAPILLARY-GRAVITY WAVES IN A DEEP SPATIAL LAYER OF FLOATING FLUID

 A.N. Andronov[3]

Potential flows of incompressible heavy capillary floating fluid in free-dimensional layer of infinite depth with free upper boundary are determined. Asymptotics of periodical flows in spatial layer with free upper boundary close to horizontal plane $z = 0$ bifurcating from the basic flow with constant velocity V in Ox-direction are calculated. Their orbital stability relative to pertubations of the same symmetry is investigated. Methods of group-invariant bifurcation theory and group analysis of differential equations are used. Special attention is given to cases of high-dimensional $(n \geqslant 4)$ degeneration of the linearized operator.

Key words: floating deep fluid layer, capillary-gravity surface waves, branching, stability, group symmetry.

Paper received 15/*XII*/2008.
Paper accepted 15/*XII*/2008.

[3]Andronov Artyom Nicolayevich (`arbox@inbox.ru`), Dept. of Applied Mathematics, Mordovian State University, Saransk, 430005, Russia.