УДК 519.923.52

ЧИСЛО ВРАЩЕНИЯ КАК ПОЛНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

© 2009 А.А. Жукова[1]

Рассматривается уравнение Хилла. После перехода к полярным координатам для полярного угла получается дифференциальное уравнение на торе, удовлетворяющее условиям Каратеодори. Приведем основные результаты.

Уравнение Хилла (с различными мультипликаторами) сильно устойчиво (сильно неустойчиво) тогда и только тогда, когда число вращения есть нецелое (целое) неотрицательное число.

Получена формула, связывающая нецелое число вращения с мультипликаторами уравнения Хилла.

Ключевые слова: сильная устойчивость, дифференциальные уравнения на торе, число вращения, мультипликаторы.

Рассмотрим уравнение Хилла

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \tag{1}$$

в котором $p(t)$ есть вещественная измеримая ω - периодическая функция,

$$p(t + \omega) = p(t), \tag{2}$$

суммируемая на отрезке $[0, \omega]$, т.е. $p(t) \in L_1[0, \omega]$ (см., например [1, с. 310]).

Число μ (вещественное или невещественное) называется мультипликатором Флоке уравнения Хилла, если можно указать такое нетривиальное решение $x(t)$ (вещественное или невещественное) этого уравнения, что

$$x(t + \omega) = \mu x(t). \tag{3}$$

Коэффициенты $p(t)$ как сильно устойчивых, так и сильно неустойчивых уравнений Хилла образуют в банаховом пространстве $L_1[0, \omega]$ открытые множества, распадающиеся на бесконечное число компонент связности,

[1]Жукова Анна Александровна (azhukova84@mail.ru), кафедра нелинейных колебаний Воронежского государственного университета, 394053, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

нумеруемых по определенному правилу числами $n = 0, 1, 2, \dots$ и называемых соответственно n-й областью неустойчивости и n-й областью устойчивости [1, с. 591-607].

Перейдем от одного уравнения второго порядка (1) к системе двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -p(t)x. \tag{4}$$

Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $\varphi(0) = 1$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ и $\psi(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = 1$. Тогда

$$U(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad U(\omega) = \begin{pmatrix} \varphi(\omega) & \psi(\omega) \\ \dot{\varphi}(\omega) & \dot{\psi}(\omega) \end{pmatrix} \tag{5}$$

– фундаментальная матричная функция и матрица монодромии системы (4). Напомним, что мультипликаторы Флоке – это собственные значения матрицы $U(\omega)$.

Перейдем в системе (4) от декартовых координат x и y к полярным координатам r и θ по формулам $x = rsin(\theta), \quad y = rcos(\theta)$. Для полярного угла получим дифференциальное уравнение

$$\dot{\theta} = cos^2(\theta) + p(t)sin^2(\theta) \equiv f(t, \theta), \tag{6}$$

которое не содержит полярного радиуса. В уравнении (6) правая часть периодична по обеим переменным

$$f(t + \omega, \theta) = f(t, \theta), \quad f(t, \theta + \pi) = f(t, \theta), \tag{7}$$

что позволяет рассматривать это уравнение как дифференциальное уравнение на торе. Тор $\Im$ запишем как произведение двух окружностей $\Im = U \times C$, где U есть окружность длины ω, а C есть окружность длины π; с помощью первой определяются параллели, а с помощью второй – меридианы. Согласно теории Пуанкаре-Данжуа дифференциальных уравнений на торе, поведение решений полностью характеризуется числом вращения ρ и некоторым сохраняющим ориентацию гомеоморфным отображением H окружности C на себя (см., например [2, с. 442-456; 3, с. 147-186; 4, с. 173-175; 5, с. 238-244]).

Функция $f(t, \theta)$ измерима по t при каждом фиксированном θ и непрерывна по θ при каждом фиксированном t. Кроме того,

$$|f(t, \theta)| \leqslant \max\{1, |p(t)|\}. \tag{8}$$

И выполнено условие Липшица

$$|f(t, \theta) - f(t, \vartheta)| \leqslant (1 + |p(t)|)|\theta - \vartheta|. \tag{9}$$

Оценка (8) гарантирует существование при всех t решения уравнения (6), удовлетворяющего любому начальному условию, а условие Липшица (9) обеспечивает единственность этого решения и его непрерывную зависимость от начальных условий.

Обозначим через $\theta(t,\vartheta)$ решение уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию $\theta(0)=\vartheta$. В силу сказанного выше функция $\theta(t,\vartheta)$ определена при всех t и θ и непрерывна (по совокупности переменных). Кроме того, в силу (7)

$$\theta(t,\vartheta+k\pi)=\theta(t,\vartheta)+k\pi, \tag{10}$$

где k – любое целое число. Поэтому большая часть классической теории Пуанкаре-Данжуа дифференциальных уравнений на торе переносится и на рассматриваемый нами случай.

Число вращения ρ дифференциального уравнения (6) определяется следующим образом:

$$\rho=\frac{\omega}{\pi}\lim_{0<|t-s|\to+\infty}\frac{\theta(t,\vartheta)-\theta(s,\vartheta)}{t-s}, \tag{11}$$

причем написанный предел существует равномерно по ϑ. Появление стоящего впереди множителя вызвано наличием разных периодов $f(t,\theta)$ по различным переменным и призвано придать излагаемым ниже теоремам большую четкость и простоту.

Отметим, как это вытекает из теорем 10.2 и 10.3 [3, с. 154], что

$$\rho=\frac{n}{m}\Leftrightarrow\theta(m\omega,\vartheta)=\vartheta+n\pi \text{ при некотором } \vartheta; \tag{12}$$

здесь m и n – целые числа и $m\neq0$.

Гомеоморфизм H описывается функцией $\sigma(\vartheta)\equiv\theta(\omega,\vartheta)$. Она непрерывна, возрастает и $\sigma(\vartheta+k\pi)=\sigma(\vartheta)+k\pi$ при любом целом k (см. (10)). Гомеоморфизм H^k описывается функцией $\sigma^k(\vartheta)$, где при $k>0$ функция $\sigma^k(\vartheta)$ есть k-я итерация функции $\sigma(\vartheta)$; при $k=0$ имеем $\sigma^0(\vartheta)\equiv\vartheta$ и при $k<0$ она есть $\sigma^k(\vartheta)=(\sigma^{-1})^{|k|}(\vartheta)$, где σ^{-1} есть функция, обратная к σ.

Положим

$$\Delta(\vartheta)=\sigma(\vartheta)-\vartheta. \tag{13}$$

Это непрерывная функция, периодическая с периодом π. В дальнейшем важную роль играют следующие простые замечания. Нетрудно видеть, что гомеоморфизм H имеет неподвижные точки на C в том и только в том случае, если

$$\Delta(\vartheta)=n\pi \text{ при некотором целом } n>0. \tag{14}$$

Поэтому гомеоморфизм H не имеет неподвижных точек на C в том и только в том случае, если

$$\Delta(\vartheta)\neq n\pi,\quad -\infty<\vartheta<+\infty. \tag{15}$$

В этом случае существует такое целое n, что

$$n\pi<\Delta(\vartheta)<(n+1)\pi,\quad -\infty<\vartheta<+\infty. \tag{16}$$

Отметим еще, что так как $f(t,0)\geqslant0$ при всех t, то $\theta(t,\vartheta)\geqslant0$ при $\vartheta\geqslant0$ и $0\leqslant t<+\infty$. Поэтому, согласно (11), число вращения ρ для уравнения (6) всегда неотрицательно.

Теорема 1. Мультипликаторы уравнения Хилла вещественные тогда и только тогда, когда число вращения есть целое неотрицательное число,

$$\rho = n, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{17}$$

Если мультипликаторы различные, то уравнение Хилла сильно неустойчиво и принадлежит n-й области неустойчивости.

Теорема 2. Если мультипликаторы уравнения Хилла невещественные, то число вращения отличается от целого неотрицательного числа n либо

$$\rho \text{ — рациональное число,} \tag{18}$$

$\rho = n/m$, где $m > 1$ и $n > 0$ взаимно простые; в этом случае m-я степень гомеоморфизма H имеет неподвижные точки:

$$H^m z = z \text{ при некотором } z \in C \tag{19}$$

(периодический случай) либо

$$\rho \text{ — иррациональное число;} \tag{20}$$

в этом случае никакая степень гомеоморфизма H не имеет неподвижных точек

$$H^m z \neq z \text{ при } z \in C \text{ и } m = 1, 2, \dots \tag{21}$$

и имеет место эргодический случай.

Так как мультипликаторы уравнения Хилла, по предположению, невещественные, то уравнение Хилла сильно устойчивое, причем оно принадлежит n-й области устойчивости, где n есть целая часть числа вращения ρ

$$n = [\rho]. \tag{22}$$

Наоборот, если вращение отличается от целого неотрицательного числа, то мультипликаторы уравнения Хилла невещественные, уравнение Хилла сильно устойчивое и принадлежит n-й области устойчивости, где n есть целая часть числа вращения ρ.

Интересно выяснить связь между "отмасштабированным" числом вращения ρ, которое всегда является вещественным, а в рассматриваемом случае — только неотрицательным, и мультипликаторами $\mu_\pm$ уравнения Хилла (1).

Если число вращения есть целое: $\rho = n$ $(n \geqslant 0)$, то о мультипликаторах уравнения Хилла почти ничего сказать нельзя, кроме того, что они вещественные, а их знак совпадает со знаком $(-1)^n$. Если число вращения есть нецелое, то по нему однозначно восстанавливаются мультипликаторы, как об этом говорит следующая теорема.

Теорема 3. Пусть число вращения является нецелым. Тогда для мультипликаторов уравнения Хилла (1) справедлива формула

$$\mu_\pm = e^{\pm i\rho\pi.} \tag{23}$$

Доказательство. Согласно теореме 2, мультипликаторы уравнения Хилла невещественные в том и только том случае, если число вращения ρ

нецелое. В этой ситуации они невещественные и комплексно сопряженные, по модулю равные единице, то есть $\mu_\pm = e^{\pm i\varphi}$ при некотором вещественном φ, не кратном π.

Для числа вращения представляется две возможности: число ρ рациональное и число ρ иррациональное. В первом случае, записывая число вращения в виде $\rho = n/m$, где m и n – взаимно простые натуральные числа, мы видим, что $m > 1$ и $n > 0$, так как число вращения не может быть целым числом. Согласно (12), m-я степень гомеоморфизма C имеет неподвижные точки ($C^m z = z$ при некотором $z \in C$). Отображению C^m отвечают мультипликаторы $\mu_\pm^m$, и они оказываются вещественными. Поэтому

$$\mu_\pm^m = (-1)^n.$$

Последней формуле можно придать вид

$$\mu_\pm^m = (e^{\pm i\pi})^n,$$

откуда вытекает, что

$$\mu_\pm^m = e^{\pm i\pi n/m} = e^{\pm i\pi\rho},$$

и в рассматриваемом случае формула (23) установлена. В оставшемся случае ее справедливость следует из соображений непрерывности.

В 1892 г. Н.Е. Жуковский доказал свой знаменитый критерий устойчивости для уравнения Хилла (1) [6].

Теорема 4. Пусть при некотором целом неотрицательном числе n и $\varepsilon > 0$ выполнено следующее двустороннее условие:

$$\left(\frac{n\pi + \varepsilon}{\omega}\right)^2 \leqslant p(t) \leqslant \left(\frac{(n+1)\pi}{\omega - \varepsilon}\right)^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant \omega. \tag{24}$$

Тогда уравнение Хилла (1) сильно устойчиво и принадлежит n-й зоне устойчивости.

Мы сформулировали критерий Жуковского не в самом общем (по этому поводу см., например [1, с. 595-599]).

Доказательство. Запишем двусторонние оценки (24) кратко в виде $p_n(t) \leqslant p(t) \leqslant p_{n+1}(t)$. Обозначим через $\theta_n(t), \theta(t), \theta_{n+1}(t)$ решения уравнения (6) с коэффициентами $p_n(t), p(t), p_{n+1}(t)$ соответственно. По теореме Чаплыгина о дифференциальных неравенствах (она очевидным образом справедлива и в условиях Каратеодори) из (24) вытекают двусторонние оценки

$$\theta_n(t) \leqslant \theta(t) \leqslant \theta_{n+1}(t), \quad 0 \leqslant t < +\infty$$

(мы считаем, что при $t = 0$ все эти решения удовлетворяют одному и тому же начальному условию). Согласно определению (11), получаем

$$\rho_n \leqslant \rho \leqslant \rho_{n+1},$$

где выписанные величины обозначают числа вращения уравнения (6) с коэффициентами $p_n(t), p(t), p_{n+1}(t)$ соответственно.

Так как уравнения (6) с $p_n(t)$ и $p_{n+1}(t)$ – это уравнения с постоянными коэффициентами, то по формуле (23) находим

$$\rho_n = \frac{n\pi + \varepsilon}{\pi} \text{ и } \rho_{n+1} = \frac{(n+1)\pi - \varepsilon}{\pi}.$$

Поэтому написанные выше двусторонние оценки показывают, что

$$n\pi + \varepsilon \leqslant \rho\pi \leqslant (n+1)\pi - \varepsilon.$$

Снова применяя формулу (23), получаем, что мультипликаторы уравнения Хилла (1) имеют вид

$$\mu_\pm = e^{\pm i\varphi} \text{ где } n\pi + \varepsilon \leqslant \varphi\pi \leqslant (n+1)\pi - \varepsilon.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что уравнение Хилла (1) сильно устойчиво и принадлежит n-й зоне устойчивости.

Литература

[1] Якубович, В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. — М.: Наука, 1972.

[2] Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. М. Левинсон. — М.: Из-во иностр. лит., 1958.

[3] Плисс, В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний / В.А. Плисс. — М.; Л.: Наука, 1964.

[4] Чезари, Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. — М.: Мир, 1964.

[5] Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М.: Мир, 1970.

[6] Жуковский, Н.Е. Условия конечности интегралов уравнения d^2y/d^2x+ $+py = 0$ / Н.Е. Жуковский // Матем. сб. — 1892. — №16. — Вып.3. С. 582-591.

Поступила в редакцию $10/II/2009$;
в окончательном варианте — $10/II/2009$.

ROTATION NUMBER LIKE TOTAL CHARACTERISTIC OF STABILITY OF HILL EQUATION

 A.A. Zhukova[2]

Hill equation is considered. After transition to polar coordinates differential equation on torus for polar corner , satisfying to Karateodori conditions is gained. We shall give basic results.

Hill equation (with various multiplicators) is strongly stable (strongly unstable) then and only then, when the rotation number is nonintegral (integral) nonnegative number.

Formula connecting the nonintegral rotation number with multiplicators of Hill equation is received.

Key words and phrases: strong stability, differential equations on torus, the number of rotation, multiplicators.

Paper received 10/*II*/2009.
Paper accepted 10/*II*/2009.

[2]Zhukova Anna Aleksandrovna (azhukova84@mail.ru), Dept. of mathematics, informatics and mechanics Voronezh State University, Voronezh, 394036, Russia.