МАТЕМАТИКА

УДК 621.396.98

# МОДЕЛЬ ГРАВИИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПРИНЦИПА Д'АЛАМБЕРА[1]

© 2010 А.С. Девятисильный, К.А. Числов[2]

Дано теоретико-механическое обоснование двухкомпонентного метода инерциальной навигации и приведены результаты численного исследования построенной на его базе модели гравиинерциальной системы.

**Ключевые слова:** инерциальная навигация, гравиметрия, ньютонометр, гироскоп, обратная задача, вейвлет.

## Введение

В настоящей статье в рамках общности теоретико-механических представлений о задачах инерциальной навигации и гравиметрии [1] предложена модель гравиинерциальной системы (ГИС/GIS), реализуемая на основе двухкомпонентного (2D — по числу ньютонометров, или акселерометров [2]) метода инерциальной навигации. От обсуждаемой в [1] модели ГИС ее отличает отсутствие специального условия на движение объекта-носителя (по сфере), ограничивающего применение ГИС на широком классе объектов. Снять такое ограничение удается, как показано ниже, благодаря доступности (от навигационной спутниковой системы типа ГЛОНАСС/GLONASS) информации о модуле радиус-вектора положения объекта в геоцентрической системе координат и обращению к принципу Д'Аламбера. Еще один аспект, который кратко затронут в статье и актуален для решения задачи гравиметрии на подвижном основании, это апостериорная обработка гравиметрической съемки. Ее эффективность иллюстрируется в работе примером применения вейвлет-технологий.

## 1. Основные модели

Как и в [1], исходное представление математической модели ГИС ограничивается постановкой обратной задачи в форме уравнений "состояние-измерение", где уравнения состояния — это уравнения пространственного движения объекта,

[1]Исследование поддержано грантами РФФИ-ДВО (№09-01-98503-р_восток_а) и ДВО РАН (№ 09-1-П29-02, № 09-III-А-03-066).

[2]Девятисильный Александр Сергеевич (devyatis@iacp.dvo.ru), Числов Кирилл Александрович (kirillche@rambler.ru), Институт автоматики и процессов управления, 690041, Российская Федерация, г. Владивосток, ул. Радио, 5.

отождествляемого с материальной точкой, или динамическая группа уравнений трехкомпонентного метода инерциальной навигации [3], так что

$$\begin{aligned}&\dot{q}_i = -e_{ikj}\omega_k q_j + p_i, \quad q_i(0) = q_{i,0},\\&\dot{p}_i = -e_{ikj}\omega_k p_j + G_i(\mathbf{q}) + F_i, \quad p_i(0) = p_{i,0}, \quad i,j,k = \overline{1,3},\\&J = |r| + \epsilon,\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $J$ и $\epsilon$ — соответственно измерение и его погрешность; $e_{ikj}$ — псевдотензор Леви-Чивита, $\mathbf{q} = (q_i), \mathbf{p} = (p_i), \boldsymbol{\omega} = (\omega_i), \mathbf{G} = (G_i), \mathbf{F} = (F_i)$ — соответственно векторы координат, удельных импульсов, абсолютной угловой скорости вращения горизонтируемой приборной платформы, напряженности гравитационного поля Земли (GE-поля) и удельных сил негравитационной природы в проекциях на оси координатного ортогонального трехгранника (обозначим его через $oy = oy_1y_2y_3$) с началом в центре Земли и осями, параллельными осям приборного трехгранника $\tilde{o}y = \tilde{o}y_1y_2y_3$, в идеальном случае ориентированного так, что ось $\tilde{o}y_3$ направлена по радиус-вектору положения объекта, а оси $\tilde{o}y_1$ и $\tilde{o}y_2$ — соответственно на географические восток и север; заметим также, что в (1.1), как и всюду далее, действует правило суммирования по повторяющимся индексам.

Как следует из изложенного, $|\mathbf{q}| = r = q_3$ и $J = r + \epsilon$.

Цель настоящей статьи — отличная от [1] прикладная интерпретация модели (1.1).

Напомним, что согласно концепции метода инерциальной навигации модель (1.1) должна быть дополнена моделями измерений величин $F_i$ и $\omega_i$, $i = \overline{1,3}$, реализуемых с помощью инерциальных измерителей — ньютонометров и гироскопов. Тогда, учитывая, что при измерении $F_i$, $\omega_i$ и $q_3$ обычно реализуется процедура динамического сглаживания (режим отслеживания параметра), можно считать, что в конечном итоге доступными являются не только их сглаженные оценки ($\tilde{F}_i$, $\tilde{\omega}_i$ и $\tilde{q}_3$), но и производные, в частности, $\dot{\omega}_i$, $\dot{q}_3$, $\ddot{q}_3$. Далее примем, что $\tilde{q}_3 = J$, $\tilde{\dot{q}}_3 = \dot{q}_3 + \epsilon_1$, $\tilde{\ddot{q}}_3 = \ddot{q}_3 + \epsilon_1$, $\tilde{F}_i = F_i + f_i$, $\tilde{\omega}_i = \omega_i + \nu_i$, $\tilde{\dot{\omega}}_i = \dot{\omega}_i + \Delta_i$, где $\epsilon_1$, $\epsilon_2$, $f_i$, $\nu_i$, $\Delta_i$ — инструментальные погрешности.

В отличие от случая 3D-ИНМ, когда для получения опорного решения ДГУ необходимо моделировать все шесть уравнений ($i = \overline{1,3}$), здесь, благодаря тому, что $q_3 = r$ измеряется, предполагается моделирование только первых четырех ($i = \overline{1,2}$), т. е. речь идет, по сути, о 2D-схеме ИНМ, в которой, следует отметить, модельные значения переменных $q_3$ и $p_3$ ($p_3 = \dot{q}_3 + \omega_2 q_3 - \omega_1 q_2$), а также напряженности GE-поля формируются с учетом значений сглаженных оценок $\tilde{q}_3$ и $\tilde{\dot{q}}_3$.

В силу того, что при таком моделировании не вычисляется опорное значение $q_3$ (оно, как указано выше, измеряется), построить невязку измерения $\delta J = \delta q_3 + \epsilon$ и поставить задачу коррекции как обратную задачу "в малом" в той форме, в которой это было сделано, например в [4], теперь уже нельзя.

Вместо этого изберем другой путь, а именно обратимся к принципу Д'Аламбера [2].

Используя этот принцип на оси $oy_3$, имеем условие

$$z = \dot{p}_3 - \omega_2 p_1 + \omega_1 p_2 - G_3 - F_3 = 0,$$

или

$$\begin{aligned}z = \ddot{q}_3 - (\dot{\omega}_2 + \omega_3^2)q_1 - (\omega_2\omega_3 - \dot{\omega}_1)q_2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)q_3 -\\ -2\omega_2 p_1 + 2\omega_1 p_2 - G_3 - F_3 = 0.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Подстановка в (1.2) значений переменных, доступных благодаря измерениям (заметим, что оценка $\ddot{q}_3$ может быть определена в силу того, что измеряется $q_3$)

и моделированию динамической группы уравнений в режиме двухкомпонентного метода инерциальной навигации ($i = \overline{1,2}$), приводит к невязке $\delta z \neq 0$, которая содержит информацию о погрешностях моделирования, что позволяет поставить обратную задачу "в малом" для оценки значений этих погрешностей, модель которой принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\delta\dot{q}_i = -e_{ikj}\omega_k\delta q_j + \delta p_i - e_{ikj}\nu_k q_j, \quad \delta q_i(0) = \delta q_{i,0},\\
&\delta\dot{p}_i = -e_{ikj}\omega_k\delta p_j - \delta G(r,\mathbf{q}) + f_i - e_{ikj}\nu_k p_j, \quad \delta p_i(0) = \delta p_{i,0},\\
&\delta z = \ddot{q}_3 - (\dot{\omega}_2 + \omega_3^2)\delta q_1 - (\omega_2\omega_3 - \dot{\omega}_1)\delta q_2 + 2\omega_2\delta p_1 + 2\omega_1\delta p_2 +\\
&+\delta G(r,\mathbf{q}) - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\epsilon + \epsilon_2 + f_3 = 0,
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

где следует считать, что $\delta G_i(r,\mathbf{q}) = g_i + \frac{\partial G_i(r,\mathbf{q})}{\partial r}\delta r + \frac{\partial G_i(r,\mathbf{q})}{\partial q_j}\delta q_j$, $\mathbf{g} = (g_i)$, $i = \overline{1,3}$ — вектор аномалии GE-поля в текущей точке траектории, $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = r$, $\delta q_3 = \epsilon$, $p_1 = \omega_2 q_3$, $p_2 = -\omega_1 q_3$, $p_3 = \dot{q}_3$, $\delta q_3 = \delta r = \epsilon$, $\delta p_3 = \epsilon_1 - \omega_2\delta q_1 + \omega_1\delta q_2$.

Далее, полагая, что имеет место существенное преобладание значения вертикальной компоненты аномалии ($g_3$) над горизонтальными ($g_1$ и $g_2$), полагаем $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = g$. Тогда расширение вектора состояния системы (1.3) за счет включения в него $g$ с одновременным пополнением системы (1.3) уравнением эволюции $g$ (в частности, — $\dot{g} = 0$) дает возможность найти оценку $g$ и решить, таким образом, ту же, что и в [1], задачу уточнения модели GE-поля на заданной траектории и оценки углов наклона приборной плоскости $\tilde{o}y_1y_2$. При этом качество оценки $g_3$ будет тем выше, чем менее изменчиво $g_3$ на временном интервале наблюдения по сравнению с изменчивостью погрешностей $\epsilon$, $\epsilon_2$ и $f_3$. Относительно последней отметим следующее. Погрешность $f_3$ может быть погрешностью вертикального ньютонометра (его роль может исполнять и высокоточный гравиметр) или погрешностью априорных представлений о силе $F_3$, формируемых при организации программных траекторий для объекта-носителя. В обоих случаях возможно еще одно дополнительное расширение вектора состояния задачи за счет включения в него, кроме $g$, еще и $f_3$. При этом очевидна желательность ситуации, когда характеры эволюции $g$ и $f_3$ отличны.

Из изложенного видим, что обсуждаемая ГИС даже в случае применения в ней вертикального ньютонометра (для формирования невязки $\delta z$) существенно отличается от системы, описываемой в [4], тем, что реализуется на базе 2D-ИНМ.

При исследовании задачи (1.3) установлено выполнение алгебраического условия наблюдаемости [5] для случая движения объекта по географическим параллелям с постоянной (относительно Земли) линейной скоростью (при этом $\omega = const$), что вместе с последующим экспериментальным подтверждением устойчивости ее решения в вычислительной среде является вполне достаточным свидетельством корректности математической постановки задачи.

Учитывая представление модели ГИС в виде уравнений "состояние-измерение" [5], в имитационных вычислительных экспериментах (имеющих определяющее значение для задач ИНМ как вычислительных, по сути, задач) для решения задачи (1.3) целесообразно использование метода динамического обращения [6] в форме алгоритма калмановской фильтрации.

## 2. Вычислительные эксперименты

На рис. 1, 2 представлены основные результаты одного из таких экспериментов, в котором на первом этапе решения реализуется калмановское оценивание (при этом имитируется многократный проход трассы, на которой выполняется гравиметрическая съемка), а на втором — обработка результатов первого с использованием преобразования, конструируемого на основе пирамидального алгоритма Малло [7] и ортогональных вейвлетов Добеши [8]; роль целевой функции, обеспечивающей качество обработки данных, выполняет функция, впервые предложенная в [9] и интерпретирующая оператор преобразования как проектор. Предполагается, что объект движется в восточном направлении на широте $\phi = 45^0$ со скоростью $v = 50$ м/с$^2$, причем в радиальном направлении ускорение его движения описывается как $\ddot{r} = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{T}t$, где $A = 10$ м, $T = 20\pi$ *с*, и оценивается с погрешностью, имеющей нулевое среднее и значение среднеквадратического отклонения (СКО) $\sigma_{\epsilon_2} = 5\cdot 10^{-4}$ м/с$^2$ при исходном СКО измерения $r(t)$, равном 1 м, т. е. $\sigma_\epsilon = 1$ м; инструментальные погрешности ньютонометров и гироскопов представляются несмещенными относительно нуля нормальными белыми шумами со следующими СКО: $\sigma_{\nu_i} = 10^{-3}$ град/ч $\approx 10^{-9}$ с$^{-1}$, $\sigma_{f_1} = \sigma_{f_2} = 10^{-3}$ м/с$^2$, $\sigma_{f_3} = 10^{-6}$ м/с$^2$ (как видим, имеет место значительное преобладание $\sigma_{\epsilon_2}$ над $\sigma_{f_3}$, т. е. $\sigma_{\epsilon_2} \gg \sigma_{f_3}$).

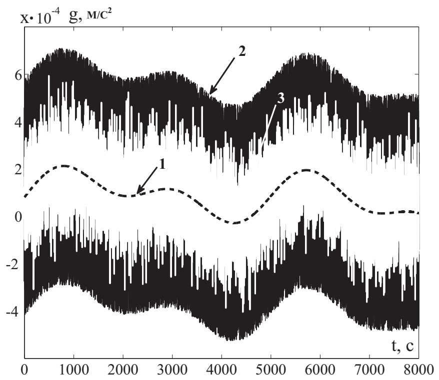


Рис. 1. Оценки первого этапа:
*1* — оцениваемая функция $g(t)$ (штриховая линия); *2* — калмановская оценка $g(t)$ при одном проходе трассы; *3* — осредненная оценка $g(t)$ при пяти проходах трассы (белое поле внутри графика 2)

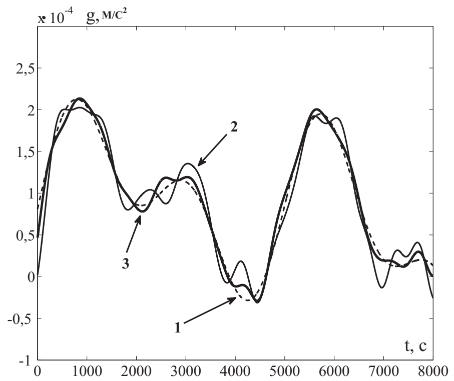


Рис. 2. Оценки второго этапа:
*1* — оцениваемая функция $g(t)$ (штриховая линия); *2* — вейвлет-оценка $g(t)$ при одном проходе трассы; *3* — вейвлет-оценка $g(t)$ при пяти проходах трассы

Сравнение графиков *2* и *3* на рис. 2 (как и вся совокупность выполненных вычислительных экспериментов) дает основание для вполне оптимистической оценки перспектив применения предложенной модели ГИС при условии повышения точности измерения вертикального ускорения ($\ddot{r}$) и обращения к методам апостериорной обработки на заключительном этапе решения задачи подвижной гравиметрии.

## Заключение

Как видно из изложенного, интерпретация принципа Д'Аламбера дает теоретическое обоснование для модели ГИС на базе двухкомпоентного метода инерциальной навигации. Вместе с тем практическая реализация соответствующей схемы ГИС требует качественной (не хуже соответственно $0,1$ м/с и $10^{-3}$ м/с$^2$) оценки первой и второй производных модуля радиус-вектора положения объекта.

## Литература

[1] Девятисильный А.С., Числов К.А. Об инерциальных навигационных системах, корректируемых по радиальной информации // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2008. № 6. С. 83–89.

[2] Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.

[3] Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 648 с.

[4] Девятисильный А.С., Числов К.А. Численное моделирование задачи коррекции трехкомпонентной инерциальной навигационной системы по высотной информации // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 101–105.

[5] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.

[6] Осипов Ю.С., Кряжемский А.В. Задачи динамического обращения // Вестник РАН. 2006. Т. 76. С. 615–624.

[7] Mallat S.G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1989. V. 11. № 7. P. 674–693.

[8] Daubechies I. Ten lectures on wavelets // CBMS-NFS conference series in applied mathematics. — SIAMED, 1992. 388 p.

[9] Девятисильный А.С., Прудкогляд Н.А. Моделирование астроинерциальной системы в условиях стохастической неопределенности // Авиакосмическое приборостроение. 2007. № 11. С. 39–44.

Поступила в редакцию 5/$V$/2010;
в окончательном варианте — 5/$V$/2010.

# THE MODEL OF GRAVIINERTIAL SYSTEM BASED ON THE PRINCIRLE OF D'ALAMBER INTERPRETATION

© 2010 A.S. Devyatisilniy, K.A. Chislov[3]

The theoretical and mechanical substantiation of two-dimensional inertial navigation method is given. The results of numerical research of 2D graviinertial system are shown.

**Key words:** inertial navigation, gravimetry, Newton meter, gyroscope, inverse problem, wavelet.

Paper received 5/ $V$/2010.
Paper accepted 5/ $V$/2010.

[3]Devyatisilniy Alexandr Sergeevich (`devyatis@iacp.dvo.ru`), Chislov Kirill Alexandrovich (`kirillche@rambler.ru`), the Institute of Automation and Control Processes, Vladivostok, 690041, Russian Federation.