УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2010 Н.В. Мартемьянова[1]

Для уравнения смешанного типа с неизвестной правой частью в прямоугольной области изучается краевая задача с нелокальным граничным условием. Установлен критерий единственности решения поставленной обратной задачи. Решение построено в виде сумм биортогональных рядов по системам корневых функций соответствующих взаимно сопряженных задач на собственные значения.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, обратная задача, спектральный метод, единственность, существование.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Лаврентьева–Бицадзе с неизвестной правой частью

$$Lu \equiv u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} - b^2 u = f(x) \tag{1.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b > 0$ — заданные действительные числа, и поставим следующую обратную задачу с нелокальным граничным условием.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \tag{1.2}$$

$$f(x) \in C(0,1); \tag{1.3}$$

$$Lu(x,y) = f(x), (x,y) \in D_- \cup D_+; \tag{1.4}$$

$$u_x(0,y) = u_x(1,y),\ \ u(1,y) = 0,\ \ -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{1.5}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x),\ \ u(x,-\alpha) = \psi(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{1.6}$$

$$u_y(x,-\alpha) = g(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1.7}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции,

$$\varphi(1) = \psi(1) = 0,\ \ \varphi'(0) = \varphi'(1),\ \ \psi'(0) = \psi'(1), \tag{1.8}$$

$D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

[1]Мартемьянова Нина Викторовна (ninamartem@yandex.ru), кафедра математического анализа Поволжской государственной социально-гуманитарной академии, 443090, Российская Федерация, г. Самара, ул. Антонова–Овсеенко, 26.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь прежде всего работы А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2; 3], В.К. Иванова [4] и их учеников. Более подробно об этом можно найти в монографии А.М. Денисова [5].

В последние годы в работах [6–7] предложен новый подход — метод спектральных разложений для обоснования единственности и существования решения прямых задач для уравнений смешанного типа. Таким методом решены обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа [9; 10]. Отметим, что начальная задача с граничными условиями типа (1.5) и (1.6) исследована в работе [11] для уравнения теплопроводности. Прямая задача с условиями (1.5) и (1.6) для вырождающегося уравнения смешанного типа в области D исследована в [12]. Задача для вырождающегося гиперболического уравнения с интегральным нелокальным условием, эквивалентным условию (1.5), рассмотрена в [13].

В данной работе при всех $b > 0$ установлен критерий единственности решения нелокальной обратной задачи. Решение построено в виде суммы биортогонального ряда.

2. Формальное построение решения задачи

Решая задачу (1.2)–(1.7) в случае $f(x) \equiv 0$ методом разделения переменных $u(x,y) = X(x)T(y)$, получим для функции $X(x)$ следующую спектральную задачу:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{2.1}$$

$$X'(0) = X'(1), \quad X(1) = 0, \tag{2.2}$$

где μ — постоянная разделения. Как известно [11; 14; 15] спектральная задача (2.1), (2.2) является несамосопряженной и имеет следующую систему собственных чисел и собственых и присоединенных функций:

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_k = (2\pi k)^2, \quad (k = 1, 2, ...), \tag{2.3}$$

$$X_0(x) = 1 - x, \;\; X_{2k-1}(x) = \sin 2\pi kx, \;\; X_{2k}(x) = (1-x)\cos 2\pi kx. \tag{2.4}$$

Согласно теореме Келдыша [16], система корневых функций (2.4) задачи (2.1) и (2.2) является полной в $L_2[0,1]$. Но для решения задачи (1.2)–(1.7) одной полноты системы функций (2.4) недостаточно, т. е. система (2.4) должна обладать свойством базисности. Тогда по этой системе можно однозначно разложить в ряд любую функцию из $L_2[0,1]$. Для этого рассмотрим сопряженную задачу:

$$Y''(x) + \mu Y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{2.5}$$

$$Y(0) = Y(1), \quad Y'(0) = 0, \tag{2.6}$$

которая имеет те же собственные значения, но другую систему корневых функций:

$$Y_0(x) = 2, \quad Y_{2k-1}(x) = 4x \sin 2\pi kx, \quad Y_{2k}(x) = 4\cos 2\pi kx. \tag{2.7}$$

Системы функций (2.4) и (2.7) образуют биортогональную систему и удовлетворяют необходимому и достаточному условию базисности в пространстве $L_2[0,1]$, которое было впервые установлено В.А. Ильиным [14].

Решение задачи (1.2)–(1.7) будем искать в виде сумм биортогональных рядов:

$$u(x,y) = T_0(y)(1-x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}(y)\sin 2\pi kx + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k}(y)(1-x)\cos 2\pi kx, \tag{2.8}$$

$$f(x) = f_0(1-x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1} \sin 2\pi kx + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}(1-x)\cos 2\pi kx, \tag{2.9}$$

где

$$T_0(y) = 2\int_0^1 u(x,y)dx, \tag{2.10}$$

$$T_{2k-1}(y) = 4\int_0^1 u(x,y)x\sin 2\pi kxdx, \tag{2.11}$$

$$T_{2k}(y) = 4\int_0^1 u(x,y)\cos 2\pi kxdx, \tag{2.12}$$

$$f_{2k} = 4\int_0^1 f(x)\cos 2\pi kxdx, \quad f_{2k-1} = 4\int_0^1 f(x)x\sin 2\pi kxdx, \tag{2.13}$$

$$f_0 = 2\int_0^1 f(x)dx. \tag{2.14}$$

На основании (2.10)–(2.12) введем функции

$$T_{0,\varepsilon}(y) = 2\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,y)dx, \tag{2.15}$$

$$T_{2k-1,\varepsilon}(y) = 4\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,y)x\sin 2\pi kxdx, \tag{2.16}$$

$$T_{2k,\varepsilon}(y) = 4\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,y)\cos 2\pi kxdx, \tag{2.17}$$

где ε — достаточно малое число. Дифференцируя равенства (2.15)–(2.17) при $y \in \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ два раза и учитывая уравнение (1.1), получим

$$T''_{0,\varepsilon}(y) = 2\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} [f(x) - u_{xx}(x,y) + b^2 u(x,y)]dx, \quad y > 0, \tag{2.18}$$

$$T''_{0,\varepsilon}(y) = 2\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} [u_{xx}(x,y) - b^2 u(x,y) - f(x)]dx, \quad y < 0, \tag{2.19}$$

$$T''_{2k-1,\varepsilon}(y) = 4\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} [f(x) - u_{xx}(x,y) + b^2 u(x,y)]x\sin 2\pi kxdx, \quad y > 0, \tag{2.20}$$

$$T''_{2k-1,\varepsilon}(y) = 4\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} [u_{xx}(x,y) - f(x) - b^2 u(x,y)]x\sin 2\pi kxdx, \quad y < 0, \tag{2.21}$$

$$T''_{2k,\varepsilon}(y) = 4\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} [f(x) - u_{xx}(x,y) + b^2 u(x,y)]\cos 2\pi kxdx, \quad y > 0, \tag{2.22}$$

$$T''_{2k,\varepsilon}(y) = 4\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} [u_{xx}(x,y) - f(x) - b^2 u(x,y)]\cos 2\pi kxdx, \quad y < 0. \tag{2.23}$$

В интегралах (2.18)–(2.23), интегрируя два раза по частям и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (1.5), найдем дифференциальные уравнения для функций (2.10)–(2.12):

$$T''_0(y) - b^2 T_0(y) = f_0, \quad y > 0, \tag{2.24}$$

$$T''_0(y) + b^2 T_0(y) = -f_0, \quad y < 0, \tag{2.25}$$

$$T''_{2k}(y) - \lambda_k^2 T_{2k}(y) = f_{2k}, \quad y > 0, \tag{2.26}$$

$$T''_{2k}(y) + \lambda_k^2 T_{2k}(y) = -f_{2k}, \quad y < 0, \tag{2.27}$$

$$T''_{2k-1}(y) - \lambda_k^2 T_{2k-1}(y) = f_{2k-1} - 4\pi k T_{2k}(y), \quad y > 0, \tag{2.28}$$

$$T''_{2k-1}(y) + \lambda_k^2 T_{2k-1}(y) = -f_{2k-1} + 4\pi k T_{2k}(y), \quad y < 0, \tag{2.29}$$

где $\lambda_k = \sqrt{b^2 + (2\pi k)^2}$.

Общие решения дифференциальных уравнений (2.24)–(2.29) имеют вид:

$$T_0(y) = \begin{cases} a_0 e^{by} + b_0 e^{-by} - \frac{f_0}{b^2}, & y > 0, \\ c_0 \cos by + d_0 \sin by - \frac{f_0}{b^2}, & y < 0, \end{cases} \tag{2.30}$$

$$T_{2k}(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y} - \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2}, & y > 0, \\ c_k \cos \lambda_k y + d_k \sin \lambda_k y - \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2}, & y < 0, \end{cases} \tag{2.31}$$

$$T_{2k-1}(y) = \begin{cases} \widetilde{a}_k e^{\lambda_k y} + \widetilde{b}_k e^{-\lambda_k y} - \frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^2} + \\ \quad + \frac{2\pi k}{\lambda_k} y(-a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y}) - \frac{4\pi k f_{2k}}{\lambda_k^4}, & y > 0, \\ \widetilde{c}_k \cos \lambda_k y + \widetilde{d}_k \sin \lambda_k y - \frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^2} + \\ \quad + \frac{2\pi k}{\lambda_k} y(-d_k \cos \lambda_k y + c_k \sin \lambda_k y) - \frac{4\pi k f_{2k}}{\lambda_k^4}, & y < 0, \end{cases} \tag{2.32}$$

где $a_0, b_0, c_0, d_0,\ a_k, b_k, c_k, d_k,\ \widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k, \widetilde{c}_k, \widetilde{d}_k$ — произвольные постоянные.

Поскольку решение $u(x, y)$ удовлетворяет условию (1.2), то для функций (2.30)–(2.32) выполнены следующие условия сопряжения:

$$\begin{array}{ll} T_{2k}(0-0) = T_{2k}(0+0), & T'_{2k}(0-0) = T'_{2k}(0+0), \\ T_{2k-1}(0-0) = T_{2k-1}(0+0), & T'_{2k-1}(0-0) = T'_{2k-1}(0+0), \\ T_0(0-0) = T_0(0+0), & T'_0(0-0) = T'_0(0+0). \end{array} \tag{2.33}$$

Функции (2.30)–(2.32) удовлетворяют условиям (2.33) только тогда, когда

$$c_k = a_k + b_k,\ \ d_k = a_k - b_k,\ \ \widetilde{c}_k = \widetilde{a}_k + \widetilde{b}_k,\ \ \widetilde{d}_k = \widetilde{a}_k - \widetilde{b}_k,\ \ c_0 = a_0 + b_0, \quad d_0 = a_0 - b_0.$$

Подставив найденные значения c_k, d_k, $\widetilde{c}_k$, $\widetilde{d}_k$, c_0, d_0 в (2.30)–(2.32), получим

$$T_0(y) = \begin{cases} a_0 e^{by} + b_0 e^{-by} - \frac{f_0}{b^2}, & y > 0, \\ (a_0 + b_0) \cos by + (a_0 - b_0) \sin by - \frac{f_0}{b^2}, & y < 0, \end{cases} \tag{2.34}$$

$$T_{2k}(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y} - \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2}, & y > 0, \\ (a_k + b_k) \cos \lambda_k y + (a_k - b_k) \sin \lambda_k y - \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2}, & y < 0, \end{cases} \tag{2.35}$$

$$T_{2k-1}(y)=\begin{cases}\widetilde{a}_k e^{\lambda_k y}+\widetilde{b}_k e^{-\lambda_k y}-\frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^2}+\\ \qquad +\frac{2\pi k}{\lambda_k}y(-a_k e^{\lambda_k y}+b_k e^{-\lambda_k y})-\frac{4\pi k f_{2k}}{\lambda_k^4}, & y>0,\\ (\widetilde{a}_k+\widetilde{b}_k)\cos\lambda_k y+(\widetilde{a}_k-\widetilde{b}_k)\sin\lambda_k y+\\ \quad +\frac{2\pi k}{\lambda_k}y[(b_k-a_k)\cos\lambda_k y+(a_k+b_k)\sin\lambda_k y]-\\ \qquad\qquad -\frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^2}-\frac{4\pi k f_{2k}}{\lambda_k^4}, & y<0.\end{cases} \tag{2.36}$$

Из равенств (2.10)–(2.12) с учетом граничных условий (1.6) и (1.7) будем иметь

$$\begin{array}{ccc} T_0(-\alpha)=\psi_0, & T_0(\beta)=\varphi_0, & T_0'(-\alpha)=g_0,\\ T_{2k}(-\alpha)=\psi_{2k}, & T_{2k}(\beta)=\varphi_{2k}, & T_{2k}'(-\alpha)=g_{2k},\\ T_{2k-1}(-\alpha)=\psi_{1k}, & T_{2k-1}(\beta)=\varphi_{1k}, & T_{2k-1}'(-\alpha)=g_{1k},\end{array} \tag{2.37}$$

где

$$\varphi_{2k-1}=4\int_0^1\varphi(x)x\sin 2\pi kx dx,\quad \varphi_{2k}=4\int_0^1\varphi(x)\cos 2\pi kx dx, \tag{2.38}$$

$$\psi_{2k-1}=4\int_0^1\psi(x)x\sin 2\pi kx dx,\quad \psi_{2k}=4\int_0^1\psi(x)\cos 2\pi kx dx, \tag{2.39}$$

$$g_{2k-1}=4\int_0^1 g(x)x\sin 2\pi kx dx,\quad g_{2k}=4\int_0^1 g(x)\cos 2\pi kx dx, \tag{2.40}$$

$$\varphi_0=2\int_0^1\varphi(x)dx,\quad \psi_0=2\int_0^1\psi(x)dx,\quad g_0=2\int_0^1\varphi(x)dx. \tag{2.41}$$

Удовлетворяя функции (2.34)–(2.36) граничным условиям (2.37), получим относительно $a_0,b_0,f_0,\ a_k,b_k,f_{2k},\ \widetilde{a}_k,\widetilde{b}_k,f_{2k-1}$ системы:

$$\begin{cases} a_0e^{b\beta}+b_0e^{-b\beta}-\frac{f_0}{b^2}=\varphi_0,\\ a_0(\cos b\alpha-\sin b\alpha)+b_0(\sin b\alpha+\cos b\alpha)-\frac{f_0}{b^2}=\psi_0,\\ ba_0(\cos b\alpha+\sin b\alpha)+bb_0(\sin b\alpha-\cos b\alpha)=g_0,\end{cases} \tag{2.42}$$

$$\begin{cases} a_ke^{\lambda_k\beta}+b_ke^{-\lambda_k\beta}-\frac{f_{2k}}{\lambda_k^2}=\varphi_{2k},\\ a_k(\cos\lambda_k\alpha-\sin\lambda_k\alpha)+b_k(\sin\lambda_k\alpha+\cos\lambda_k\alpha)-\frac{f_{2k}}{\lambda_k^2}=\psi_{2k},\\ \lambda_ka_k(\cos\lambda_k\alpha+\sin\lambda_k\alpha)+\lambda_kb_k(\sin\lambda_k\alpha-\cos\lambda_k\alpha)=g_{2k},\end{cases} \tag{2.43}$$

$$\begin{cases} \widetilde{a}_ke^{\lambda_k\beta}+\widetilde{b}_ke^{-\lambda_k\beta}-\frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^2}=P_1,\\ \widetilde{a}_k(\cos\lambda_k\alpha-\sin\lambda_k\alpha)+\widetilde{b}_k(\sin\lambda_k\alpha+\cos\lambda_k\alpha)-\frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^2}=P_2,\\ \lambda_k\widetilde{a}_k(\cos\lambda_k\alpha+\sin\lambda_k\alpha)+\lambda_k\widetilde{b}_k(\sin\lambda_k\alpha-\cos\lambda_k\alpha)=P_3,\end{cases} \tag{2.44}$$

где

$$P_1 = \varphi_{2k-1} + \tfrac{2\pi k}{\lambda_k}\beta(a_k e^{\lambda_k \beta} - b_k e^{-\lambda_k \beta}) + \tfrac{4\pi k f_{2k}}{\lambda_k^4},$$

$$P_2 = \psi_{2k-1} - \tfrac{2\pi k}{\lambda_k}\alpha[a_k(\cos\lambda_k\alpha + \sin\lambda_k\alpha) + b_k(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha)]+$$

$$+\tfrac{4\pi k f_{2k}}{\lambda_k^4}, \qquad (2.45)$$

$$P_3 = g_{2k-1} + \tfrac{2\pi k}{\lambda_k}[a_k(\cos\lambda_k\alpha + \sin\lambda_k\alpha) + b_k(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha)]+$$

$$+2\pi k\alpha[a_k(\cos\lambda_k\alpha - \sin\lambda_k\alpha) + b_k(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha)].$$

Решая системы (2.42)–(2.44) методом определителей, получим

$$a_0 = \frac{(\varphi_0 - \psi_0)(\sin b\alpha - \cos b\alpha) + \frac{g_0}{b}(\sin b\alpha + \cos b\alpha - e^{-b\beta})}{2\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \qquad (2.46)$$

$$b_0 = \frac{(\psi_0 - \varphi_0)(\sin b\alpha + \cos b\alpha) + \frac{g_0}{b}(\sin b\alpha - \cos b\alpha + e^{b\beta})}{2\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \qquad (2.47)$$

$$f_0 = \frac{-b^2\varphi_0 - b^2\psi_0(\Delta_{\alpha\beta}(0) - 1)}{\Delta_{\alpha\beta}(0)}+$$

$$+\frac{bg_0(\sin b\alpha \operatorname{ch} b\beta + \cos b\alpha \operatorname{sh} b\beta)}{\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \qquad (2.48)$$

$$a_k = \frac{(\varphi_{2k} - \psi_{2k})(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha) + \frac{g_{2k}}{\lambda_k}(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha - e^{-\lambda_k\beta})}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)}, \qquad (2.49)$$

$$b_k = \frac{(\psi_{2k} - \varphi_{2k})(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha) + \frac{g_{2k}}{\lambda_k}(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha + e^{\lambda_k\beta})}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)}, \qquad (2.50)$$

$$f_{2k} = \lambda_k^2\frac{-\varphi_{2k} - \psi_{2k}(\Delta_{\alpha\beta}(k) - 1)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}+$$

$$+\lambda_k\frac{g_{2k}(\sin\lambda_k\alpha \operatorname{ch}\lambda_k\beta + \cos\lambda_k\alpha \operatorname{sh}\lambda_k\beta)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, \qquad (2.51)$$

$$\widetilde{a}_k = \frac{(P_1 - P_2)(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha) + \frac{P_3}{\lambda_k}(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha - e^{-\lambda_k\beta})}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)}, \qquad (2.52)$$

$$\widetilde{b}_k = \frac{(P_2 - P_1)(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha) + \frac{P_3}{\lambda_k}(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha + e^{\lambda_k\beta})}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)}, \qquad (2.53)$$

$$f_{2k-1} = \lambda_k^2\frac{-P_1 - P_2(\Delta_{\alpha\beta}(k) - 1)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}+$$

$$+\lambda_k\frac{P_3(\sin\lambda_k\alpha \operatorname{ch}\lambda_k\beta + \cos\lambda_k\alpha \operatorname{sh}\lambda_k\beta)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} \qquad (2.54)$$

при условии, что при $k \in N_0 = N \cup \{0\}$

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \sin\lambda_k\alpha \operatorname{sh}\lambda_k\beta - \cos\lambda_k\alpha \operatorname{ch}\lambda_k\beta + 1 \neq 0. \qquad (2.55)$$

Подставляя найденные значения постоянных (2.46)–(2.54) в формулы (2.34)–(2.36), найдем формальное решение задачи (1.2)–(1.7) в виде суммы рядов (2.8) и (2.9).

3. Единственность решения обратной задачи

Пусть существует два решения $\{u_1(x, y), f_1(x)\}$ и $\{u_2(x, y), f_2(x)\}$ задачи (1.2)–(1.7). Тогда разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению (1.1), но с правой частью $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, условию (1.5) и однородным граничным условиям:

$$u(x, \beta) = 0, \quad u(x, -\alpha) = 0, \quad u_y(x, -\alpha) = 0. \tag{3.1}$$

Пусть при всех $k \in N_0$ выполнено условие (2.55). Поскольку в силу (3.1) $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$, то $\varphi_0 = \psi_0 = g_0 = 0$ и $\varphi_{2k-1} = \varphi_{2k} = \psi_{2k-1} = \psi_{2k} = g_{2k-1} = g_{2k} = 0$ при всех $k \in N$. В силу этого и условия (2.55) из равенств (2.46)–(2.54) следует, что $a_k = b_k = f_{2k} = \widetilde{a}_k = \widetilde{b}_k = f_{2k-1} = 0$ при всех $k \in N_0$. Отсюда на основании (2.34)–(2.36) и (2.10)–(2.14) при всех $y \in [-\alpha, \beta]$ имеем:

$$2\int_0^1 u(x, y)dx = 0, \quad 4\int_0^1 u(x, y)\cos 2\pi kx dx = 0,$$

$$4\int_0^1 u(x, y)x\sin 2\pi kx dx = 0; \quad 2\int_0^1 f(x)dx = 0,$$

$$4\int_0^1 f(x)\cos 2\pi kx dx = 0, \quad 4\int_0^1 f(x)x\sin 2\pi kx dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

В силу полноты системы функций (2.7) в пространстве $L_2[0, 1]$ из последних равенств следует, что $u(x, y) = 0$ почти всюду на [0,1] при любом $y \in [-\alpha, \beta]$ и $f(x) = 0$ почти всюду на (0,1). В силу (1.2), (1.3) функция $u(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}$ и $f(x) \in C(0, 1)$, поэтому $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f(x) \equiv 0$ на (0,1).

Пусть при некоторых α, β и $k = p \in N_0$ нарушено условие (2.55), т. е. $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$. Тогда задача (1.2)–(1.7), где $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$, имеет ненулевое решение

$$u_p(x, y) = T_p(y)\sin 2\pi px, \quad f_p(x) = f_p \sin 2\pi px,$$

где

$$T_p(y) = \begin{cases} \lambda_p^{-2} f_p \left(\frac{\cos\lambda_p\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_p y + \sin\lambda_p\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_p y - \mathrm{sh}\,\lambda_p(y-\beta)}{\cos\lambda_p\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta + \sin\lambda_p\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_p\beta} - 1\right), & y > 0, \\ \lambda_p^{-2} f_p \left(\frac{\sin\lambda_p(\alpha+y) + \cos\lambda_p y\,\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta - \sin\lambda_p y\,\mathrm{ch}\,\lambda_p\beta}{\cos\lambda_p\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta + \sin\lambda_p\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_p\beta} - 1\right), & y < 0, \end{cases}$$

$f_p \neq 0$ — произвольная постоянная.

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение задачи (1.2)–(1.7), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in N_0$ выполнено условие (2.55).*

4. Обоснование существования решения обратной задачи

Решение задачи (1.2)–(1.7) при условии (2.55) получено формально в виде сумм биортогональных рядов (2.8) и (2.9). Поскольку $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ входит в знаменатель коэффициентов этих рядов, то для обоснования существования решения задачи (1.2)–(1.7) помимо условия (2.55) необходимо показать, что существуют числа $\alpha, \beta > 0$ такие, что при больших k выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ отделено от нуля. Для этого представим $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ в следующем виде:

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{\mathrm{ch}\,2\lambda_k\beta}\,\sin(\lambda_k\alpha - \varphi_k) + 1, \tag{4.1}$$

где $\varphi_k = \arcsin(\operatorname{ch}\lambda_k\beta/\sqrt{\operatorname{ch}2\lambda_k\beta}) \to \pi/4$ при $k \to +\infty$. Из представления (4.1) видно, что выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k) = 0$ только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{\varphi_k}{\lambda_k} - \frac{(-1)^n}{\lambda_k}\arcsin(1/\sqrt{\operatorname{ch}2\lambda_k\beta}) + \frac{n}{2k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad .$$

Лемма 1. *Если выполнено одно из следующих условий: 1) $\alpha = p$ — натуральное; 2) $\alpha = p/q, p, q \in N, (p,q) = 1, q \neq 4$, то существует постоянная C_0, вообще зависящая от α, такая, что при больших k и любом фиксированном $\beta > 0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geqslant C_0 e^{2\pi k\beta} > 0. \tag{4.2}$$

Доказательство. При больших k

$$0 < \lambda_k - 2\pi k = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + (2\pi k)^2} + 2\pi k} < \frac{b^2}{4\pi k}. \tag{4.3}$$

Пусть $\widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k) = \Delta_{\alpha\beta}(k)\,|_{b=0}$ и рассмотрим следующую разность:

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) - \widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_k\beta} - e^{2\pi k\beta}\right)(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha) +$$

$$+\frac{1}{2}e^{2\pi k\beta}(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha + \cos 2\pi k\alpha - \sin 2\pi k\alpha)) - \frac{1}{2}e^{-\lambda_k\beta}(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha) +$$

$$+\frac{1}{2}e^{-2\pi k\beta}(\sin 2\pi k\alpha + \cos 2\pi k\alpha).$$

Отсюда с учетом оценок: $0 \leqslant e^x - 1 \leqslant 2x$ при $0 \leqslant x < 1$, $|\sin x| \leqslant x$ и (4.3) имеем

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k) - \widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k)| \leqslant \frac{e^{\lambda_k\beta} - e^{2\pi k\beta}}{2}|\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha| +$$

$$+\frac{1}{2}e^{2\pi k\beta}(|\sin\lambda_k\alpha - \sin 2\pi k\alpha| + |\cos\lambda_k\alpha - \cos 2\pi k\alpha|) + O(e^{-2\pi k\beta}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{2\pi k\beta}}{\sqrt{2}}\left[(e^{(\lambda_k - 2\pi k)\beta} - 1) + 2\sqrt{2}\left|\sin\frac{(\lambda_k - 2\pi k)\alpha}{2}\right|\right] + O\left(e^{-2\pi k\beta}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{2\pi k\beta}}{\sqrt{2}}\left[(\lambda_k - 2\pi k)2\beta + \sqrt{2}(\lambda_k - 2\pi k)\alpha\right] + O\left(e^{-2\pi k\beta}\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{2\pi k\beta}(\lambda_k - 2\pi k)(\alpha + \sqrt{2}\beta) + O\left(e^{-2\pi k\beta}\right) \leqslant \widetilde{C}\frac{e^{2\pi k\beta}}{k}, \tag{4.4}$$

где $\widetilde{C}$ — положительная постоянная, зависящая от α, β, b.

Теперь в силу (4.4) нам достаточно показать справедливость оценки (4.2) для

$$\widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{\operatorname{ch}4\pi k\beta}\,\sin(2\pi k\alpha - \widetilde{\varphi}_k) + 1, \tag{4.5}$$

где $\widetilde{\varphi}_k = \varphi_k$ при $b = 0$. Пусть $\alpha = p \in N$. Тогда из (4.5) имеем

$$|\widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k)| = \operatorname{ch}2\pi k\beta - 1 = e^{2\pi k\beta}\left(\frac{1 + e^{-4\pi k\beta}}{2} - e^{-2\pi k\beta}\right) >$$

$$> e^{2\pi k\beta}\left(\frac{1}{2} - e^{-2\pi k\beta}\right) > C_1 e^{2\pi k\beta}$$

при $k > k_0 > [\frac{1}{2\pi\beta}\ln(\frac{2}{1-2C_1})]$, $0 < C_1 < 1/2$ и произвольном $\beta > 0$.

Пусть теперь $\alpha = p/q$, где $p, q \in N$, $(p, q) = 1$, $q \neq 4$. В этом случае разделим $2kp$ на q с остатком: $2kp = sq + r$, $s, r \in N_0$, $0 \leqslant r < q$. Тогда выражение (4.5) примет вид

$$\widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{\operatorname{ch} 4\pi k\beta}(-1)^s \sin(\frac{\pi r}{q} - \varphi_k) + 1. \tag{4.6}$$

Если $r = 0$, то данный случай сводится к уже рассмотренному выше $\alpha = p \in N$. Пусть $0 < r < q$, и ясно, что $1 \leqslant r \leqslant q - 1$, $q \geqslant 2$. Тогда из (4.6) получим

$$|\widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k)| = |\sqrt{\operatorname{ch} 4\pi k\beta}(-1)^s \sin(\frac{\pi r}{q} - \frac{\pi}{4} + \varepsilon_k) + 1| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{e^{2\pi k\beta}}{\sqrt{2}} \left| |\sin(\frac{\pi}{q} - \frac{\pi}{4} + \varepsilon_k)| - \sqrt{2}e^{-2\pi k\beta} \right|, \tag{4.7}$$

где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Поскольку $q \neq 4$, то из оценки (4.7) следует (4.2).

Теперь при определенных условиях на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ при условии (2.55) и (4.2) покажем, что функции $u(x, y)$ и $f(x)$, определенные соответственно рядами (2.8) и (2.9), удовлетворяют условиям (1.2), (1.3) и (1.4). Формально из (2.8) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}(y) X'_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k}(y) X'_{2k-1}(x), \tag{4.8}$$

$$u_y(x, y) = T'_0(y) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T'_{2k-1}(y) X_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T'_{2k}(y) X_{2k-1}(x), \tag{4.9}$$

$$u_{xx}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}(y) X''_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k}(y) X''_{2k-1}(x), \tag{4.10}$$

$$u_{yy}(x, y) = T''_0(y) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T''_{2k-1}(y) X_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T''_{2k}(y) X_{2k-1}(x). \tag{4.11}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (2.55) и (4.2). Тогда при больших k справедливы оценки:*

$$|T_{2k}(y)| \leqslant \frac{M_1}{k}[|g_{2k}| + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)],$$

$$|T_{2k-1}(y)| \leqslant \frac{M_2}{k}[|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|) + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)],$$

$$|T'_{2k}(y)| \leqslant M_3[|g_{2k}| + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)],$$

$$|T'_{2k-1}(y)| \leqslant M_4[|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|) + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)],$$

$$|T''_{2k}(y)| \leqslant M_5 k[|g_{2k}| + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)],$$

$$|T''_{2k-1}(y)| \leqslant M_6 k[|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|) + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)],$$

где M_i — здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство. Из (2.49)–(2.51) с учетом леммы 1 получим

$$|a_k| \leqslant \frac{M_7}{ke^{2\pi k\beta}}[|g_{2k}| + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)], \tag{4.12}$$

$$|b_k| \leqslant \frac{M_8}{k}[|g_{2k}| + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)], \tag{4.13}$$

$$|f_{2k}| \leqslant M_9 k[|g_{2k}| + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)]. \tag{4.14}$$

Аналогично из равенств (2.52)–(2.54) и (2.45), воспользовавшись леммой 1, найдем следующие оценки:

$$|\widetilde{a}_k| \leqslant \frac{M_{10}}{ke^{2\pi k\beta}}[|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|) + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)], \tag{4.15}$$

$$|\widetilde{b}_k| \leqslant \frac{M_{11}}{k}[|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|) + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)], \tag{4.16}$$

$$|f_{2k-1}| \leqslant M_{12}k[|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|) + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)]. \tag{4.17}$$

Из (4.12)–(4.14) и (4.15)–(4.17) и вытекает справедливость требуемых в лемме оценок.

Тогда на основании леммы 2 ряды (2.8), (2.9) и (4.8)–(4.11) мажорируются рядом

$$M_{15}\sum_{k=1}^{\infty} k[|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)]. \tag{4.18}$$

Лемма 3. *Пусть* $\varphi(x) \in C^3[0,1]$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\varphi''(1) = 0$, $\psi(x) \in \in C^3[0,1]$, $\psi(1) = 0$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\psi''(1) = 0$, $g(x) \in C^2[0,1]$, $g(1) = 0$, $g'(0) = g'(1)$. Тогда справедливы представления:

$$\varphi_{2k-1} = -\frac{\varphi^{(3)}_{2k-1}}{(2\pi k)^3} + \frac{3\varphi^{(3)}_{2k}}{(2\pi k)^4}, \quad \varphi_{2k} = \frac{\varphi^{(3)}_{2k}}{(2\pi k)^3}, \tag{4.19}$$

$$\psi_{2k-1} = -\frac{\psi^{(3)}_{2k-1}}{(2\pi k)^3} + \frac{3\psi^{(3)}_{2k}}{(2\pi k)^4}, \quad \psi_{2k} = \frac{\psi^{(3)}_{2k}}{(2\pi k)^3}, \tag{4.20}$$

$$g_{2k-1} = -\frac{g^{(2)}_{2k-1}}{(2\pi k)^2} - \frac{2g^{(2)}_{2k}}{(2\pi k)^3}, \quad g_{2k} = -\frac{g^{(2)}_{2k}}{(2\pi k)^2}, \tag{4.21}$$

где

$$\varphi^{(3)}_{2k} = 4\int_0^1 \varphi'''(x)\sin 2\pi kx dx, \quad \varphi^{(3)}_{2k-1} = 4\int_0^1 \varphi'''(x)x\cos 2\pi kx dx,$$

$$\psi^{(3)}_{2k} = 4\int_0^1 \psi'''(x)\sin 2\pi kx dx, \quad \psi^{(3)}_{2k-1} = 4\int_0^1 \psi'''(x)x\cos 2\pi kx dx,$$

$$g^{(2)}_{2k} = 4\int_0^1 g''(x)\cos 2\pi kx dx, \quad g^{(2)}_{2k-1} = 4\int_0^1 g''(x)x\sin 2\pi kx dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi^{(3)}_k|^2 \leqslant 16||\varphi^{(3)}(x)||^2_{L_2[0,1]}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|\psi^{(3)}_k|^2 \leqslant 16||\psi^{(3)}(x)||^2_{L_2[0,1]}, \tag{4.22}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|g^{(2)}_k|^2 \leqslant 16||g^{(2)}(x)||^2_{L_2[0,1]}. \tag{4.23}$$

Доказательство. Рассмотрим интегралы (2.38), (2.39) и (2.40). Интегрируя (2.38) и (2.39) по частям три раза, а (2.40) два раза с учетом условий леммы, получим требуемые представления (4.19)–(4.21). Справедливость оценок (4.22) и 4.23) следует из [11].

При выполнении условий леммы 3 ряд (4.18) оценивается числовым рядом

$$M_{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|g^{(2)}_k| + |\varphi^{(3)}_k| + |\psi^{(3)}_k|). \tag{4.24}$$

Из сходимости ряда (4.24) в силу признака Вейерштрасса сходятся равномерно ряды (2.8), (4.8), (4.9) в замкнутой области $\overline{D}$, ряды (4.10), (4.11) в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ и ряд (2.9) на промежутке $[0, 1]$. Поэтому функция $u(x, y)$, определенная рядом (2.8), удовлетворяет условию (1.2), а функция $f(x)$, определенная рядом (2.9), удовлетворяет условию (1.3). Подставляя ряды (4.10), (4.11), (2.8), (2.9) в уравнение (1.1), убеждаемся, что функции $u(x, y)$ и $f(x)$, определенные равенствами (2.8) и (2.9) соответственно, удовлетворяют условию (1.4).

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3 и выполнены условия (2.55) и (4.2), тогда существует единственное решение задачи (1.2)–(1.7), где функции $u(x, y)$ и $f(x)$ определяются соответствующими рядами (2.8) и (2.9), коэффициенты которых находятся по формулам (2.34)–(2.36), (2.46)–(2.48), (2.49)–(2.51), (2.52)–(2.54).*

Литература

[1] Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН. 1943. Т. 39. № 5. С. 195–198.

[2] Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. № 3. С. 520–521.

[3] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.

[4] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

[5] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.

[6] Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23–26.

[7] Сабитов К.Б. Критерий единственности решения краевой задачи для уравнения смешанно-составного типа // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: труды международной научной конференции, посвященной юбилею академика В.А. Ильина. Уфа: Гилем, 2008. Т. 2. С. 154–161.

[8] Сабитов К.Б. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка // Докл. РАН. 2009. Т. 427. № 5. С. 593–596.

[9] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2009. Т. 429. № 4. С. 451–454.

[10] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Известия вузов. Сер.: Математика. 2010. № 4. С. 55–62.

[11] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.

[12] Сабитова Ю.К. Краевые задачи с нелокальным условием для уравнений смешанного типа в прямоугольной области: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Стерлитамак, 2007. 20 с.

[13] Волынская М.Г. Единственность решения одной нелокальной задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2008. № 2 (61). С. 43–51.

[14] Ильин В.А. О существовании приведенной системы собственных и присоединеных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды Матем. института им. В.А. Стеклова. 1976. Т. 142. С. 148–155.

[15] Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1094–1100.

[16] Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 1. С. 11–14.

Поступила в редакцию 15/*V*/ 2010;
в окончательном варианте — 15/*V*/ 2010.

INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATION OF THE MIXED TYPE WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITION

 N.V. Martemyanova[2]

The nonlocal boundary problem is studied in the rectangular region for the equation of the mixed type with the unknown right part. The criterion of the uniqueness of solution of this inverse problem is established. Solution is constructed as a sum of biorthogonal series on the systems of root functions of the corresponding mutually adjoint problems on their own values.

Key words: inverse problem, equation of the mixed type, spectral method, uniqueness, existence.

Paper received 15/*V*/ 2010.
Paper accepted 15/*V*/ 2010.

[2]Martemyanova Nina Viktorovna (`ninamartem@yandex.ru`), the Dept. of Mathematical Analysis, Samara State Academy of Social Sciences and Humanities, Samara, 443090, Russian Federation.