УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ

© 2010 Е.П. Мелишева[1]

В работе установлены необходимые и достаточные условия единственности решения первой граничной задачи для нагруженного уравнения Лаврентьева — Бицадзе в прямоугольной области. Решение поставленной задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

Ключевые слова: нагруженное уравнение смешанного типа, задача Дирихле, спектральный метод, единственность, существование.

Введение

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = sgny \cdot u_{xx} + u_{yy} + C\,(y)\,u\,(x,0) = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) : 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, α, β — заданные положительные действительные числа, $C\,(y) = C_1\,(y)$ при $y \geqslant 0$, $C\,(y) = C_2\,(y)$ при $y \leqslant 0$, $C_i\,(y)$, $i = 1, 2$ — заданные непрерывные функции.

Задача Дирихле. Найти в области D функцию $u\,(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u\,(x,\,y) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\,(D_+ \cup D_-)\,; \tag{2}$$

$$Lu\,(x,\,y) \equiv 0, \quad (x,\,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u\,(0,\,y) = u\,(1,\,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$u\,(x,\,\beta) = \varphi\,(x)\,, u\,(x,\,-\alpha) = \psi\,(x)\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

где $\varphi\,(x)$, $\psi\,(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi\,(0) = \varphi\,(1) = \psi\,(0) = \psi\,(1)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Отметим, что в работе [1] для нагруженного параболо-гиперболического уравнения в прямоугольной области изучена начально-граничная задача, в которой методом спектральных разложений [2] установлен критерий единственности решения этой задачи, и само решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

Ранее в работах [3–12] изучены краевые задачи (локальные и нелокальные) для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных отдельных и смешанных типов в классических областях.

[1]Мелишева Екатерина Петровна (melisheva86@mail.ru), кафедра математического анализа Поволжской государственной социально-гуманитарной академии, 443090, Российская Федерация, г. Самара, ул. Антонова-Овсеенко, 26.

В данной работе, следуя [1; 2], установлен критерий единственности решения задачи Дирихле для нагруженного уравнения Лаврентьева — Бицадзе в прямоугольной области D. Решение задачи (2)–(5) представлено в виде суммы ряда Фурье.

1. Единственность решения

Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (2)–(5). Рассмотрим функцию

$$u_k(y) = \sqrt{2}\int\limits_0^1 u(x,y)\sin\lambda_k x dx, \tag{6}$$

где $\lambda_k = \pi k,\ k \in N$. На основании (6) введем функцию

$$u_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2}\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,y)\sin\lambda_k x dx, \tag{7}$$

где ε — достаточно малое число. Дифференцируя равенство (7) по y два раза при $y \in (-\alpha,\,0)\cup(0,\,\beta)$ и учитывая уравнение (1), получим

$$u''_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2}\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{yy}(x,\,y)\sin\lambda_k x dx =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[-u_{xx} - C_1(y)\,u(x,\,0)\right]\sin\lambda_k x dx =$$

$$= -\sqrt{2}\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}\sin\lambda_k x dx - \sqrt{2}C_1(y)\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,\,0)\sin\lambda_k x dx, \quad y > 0; \tag{8}$$

$$u''_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2}\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{yy}(x,\,y)\sin\lambda_k x dx =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[u_{xx} - C_2(y)\,u(x,\,0)\right]\sin\lambda_k x dx =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}\sin\lambda_k x dx - \sqrt{2}C_2(y)\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,\,0)\sin\lambda_k x dx, \quad y < 0. \tag{9}$$

В первых интегралах из правой части равенств (8) и (9), интегрируя по частям два раза и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом однородных граничных условий (4), получим

$$u''_k(y) - \lambda_k^2 u_k(y) = -C_1(y)\,u_k(0)\,, \quad y > 0, \tag{10}$$

$$u''_k(y) + \lambda_k^2 u_k(y) = -C_2(y)\,u_k(0)\,, \quad y < 0. \tag{11}$$

Дифференциальные уравнения (10) и (11) имеют общие решения

$$u_k(y) = \begin{cases} c_k e^{\lambda_k y} + d_k e^{-\lambda_k y} - \frac{c_k + d_k}{\lambda_k} \int\limits_0^y C_1(t) \operatorname{sh}[\lambda_k (y-t)] dt, & y > 0, \\ a_k \cos \lambda_k y + b_k \sin \lambda_k y + \frac{a_k}{\lambda_k} \int\limits_y^0 C_2(t) \sin[\lambda_k (t-y)] dt, & y < 0, \end{cases} \tag{12}$$

где a_k, b_k, c_k, d_k — произвольные постоянные.
Для функций (12) в силу (2) и (6) выполнены условия сопряжения

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), u_k'(0+0) = u_k'(0-0). \tag{13}$$

Условия (13) имеют место только в том случае, когда

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad d_k = \frac{a_k - b_k}{2}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (12), получим

$$u_k(y) = \begin{cases} \frac{a_k + b_k}{2} e^{\lambda_k y} + \frac{a_k - b_k}{2} e^{-\lambda_k y} - \frac{a_k}{\lambda_k} C_{1k}(y), & y > 0, \\ a_k \cos \lambda_k y + b_k \sin \lambda_k y + \frac{a_k}{\lambda_k} C_{2k}(y), & y < 0, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$C_{1k}(y) = \int\limits_0^y C_1(t) \operatorname{sh}[\lambda_k (y-t)] dt, \quad C_{2k}(y) = \int\limits_y^0 C_2(t) \sin[\lambda_k (t-y)] dt.$$

Для нахождения постоянных a_k и b_k воспользуемся граничными условиями (5) и формулой (6):

$$u_k(\beta) = \sqrt{2} \int\limits_0^1 u(x, \beta) \sin \lambda_k x dx = \sqrt{2} \int\limits_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx = \varphi_k, \tag{16}$$

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{2} \int\limits_0^1 u(x, -\alpha) \sin \lambda_k x dx = \sqrt{2} \int\limits_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx = \psi_k. \tag{17}$$

Тогда из (15) на основании (16) и (17) найдем

$$a_k = \frac{-\psi_k \operatorname{sh} \lambda_k \beta - \varphi_k \sin \lambda_k \alpha}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, \tag{18}$$

$$b_k = \frac{\psi_k [\lambda_k \operatorname{ch} \lambda_k \beta - C_{1k}(\beta)] - \varphi_k [\lambda_k \cos \lambda_k \alpha + C_{2k}(-\alpha)]}{\lambda_k \Delta_{\alpha\beta}(k)} \tag{19}$$

при условии, что при всех $k \in N$

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \frac{\sin \lambda_k \alpha}{\lambda_k} [C_{1k}(\beta) - \lambda_k \operatorname{ch} \lambda_k \beta] - \\ - \frac{\operatorname{sh} \lambda_k \beta}{\lambda_k} [\lambda_k \cos \lambda_k \alpha + C_{2k}(-\alpha)] \neq 0. \tag{20}$$

Подставляя (18) и (19) в (15), найдем окончательный вид функции

$$u_k(y) = \begin{cases} \psi_k \frac{C_{1k}(y) \operatorname{sh} \lambda_k \beta - C_{1k}(\beta) \operatorname{sh} \lambda_k y}{\lambda_k \Delta_{\alpha\beta}(k)} + \\ + \psi_k \frac{\operatorname{sh}[\lambda_k (y-\beta)]}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} + \varphi_k \frac{\Delta_{\alpha y}(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, & y > 0, \\ \psi_k \frac{\Delta_{-y\beta}(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} - \varphi_k \frac{\sin \lambda_k (\alpha + y)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} - \\ - \varphi_k \frac{C_{2k}(y) \sin \lambda_k \alpha + C_{2k}(-\alpha) \sin \lambda_k y}{\lambda_k \Delta_{\alpha\beta}(k)}, & y < 0, \end{cases} \tag{21}$$

где

$$\Delta_{\alpha y}(k) = \frac{\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k}\left[C_{1k}(y) - \lambda_k \operatorname{ch}\lambda_k y\right] - \frac{\operatorname{sh}\lambda_k y}{\lambda_k}\left[\lambda_k\cos\lambda_k\alpha + C_{2k}(-\alpha)\right], \quad y \geqslant 0,$$

$$\Delta_{-y\beta}(k) = -\frac{\sin\lambda_k y}{\lambda_k}\left[C_{1k}(\beta) - \lambda_k \operatorname{ch}\lambda_k \beta\right] - \frac{\operatorname{sh}\lambda_k \beta}{\lambda_k}\left[\lambda_k\cos\lambda_k y + C_{2k}(y)\right], \; y \leqslant 0.$$

Таким образом, функции $u_k(y)$ однозначно определены, что позволяет доказать теорему единственности решения задачи (2)–(5). Пусть $u(x, y)$ — решение однородной задачи (2)–(5), где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$, и выполнено условие (20) при всех $k \in N$. Тогда $\varphi_k = \psi_k \equiv 0$, и из формул (21) и (6) следует, что при любом $y \in [-\alpha, \beta]$

$$\int\limits_0^1 u(x, y)\sin\lambda_k x dx = 0, \quad k = 1, 2, ... \quad . \tag{22}$$

Из равенств (22) в силу полноты системы синусов $\left\{\sqrt{2}\sin\lambda_k x\right\}$ в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что $u(x, y) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (2) функция $u(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β, $C_1(y)$, $C_2(y)$ и $k = p \in N$ нарушено условие (20), т. е.

$$\Delta_{\alpha\beta}(p) = \frac{\sin\lambda_p\alpha}{\lambda_p}\left[C_{1p}(\beta) - \lambda_p \operatorname{ch}\lambda_p\beta\right] - \\ - \frac{\operatorname{sh}\lambda_p\beta}{\lambda_p}\left[\lambda_p\cos\lambda_p\alpha + C_{2p}(-\alpha)\right] = 0. \tag{23}$$

Тогда однородная задача (2)–(5), где $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, имеет нетривиальное решение

$$u_p(x, y) = u_p(y)\sin\lambda_p x, \tag{24}$$

где функция $u_p(y)$ определяется по формуле

$$u_p(y) = \begin{cases} \frac{a_p[\lambda_p \operatorname{sh}[\lambda_p(\beta - y)] + C_{1p}(\beta)\operatorname{sh}\lambda_p y]}{\lambda_p \operatorname{sh}\lambda_p\beta} - \frac{a_p}{\lambda_p}C_{1p}(y), & y > 0, \\ \frac{a_p[(C_{1p}(\beta) - \lambda_p \operatorname{ch}\lambda_p\beta)\sin\lambda_p y + \lambda_p \operatorname{sh}\lambda_p\beta\cos\lambda_p y]}{\lambda_p\operatorname{sh}\lambda_p\beta} + \frac{a_p}{\lambda_p}C_{2p}(y), & y < 0, \end{cases} \tag{25}$$

здесь $a_p \neq 0$ — произвольная постоянная.

Покажем, что функция (24) удовлетворяет всем условиям однородной задачи Дирихле. Легко видеть, что функция (25) удовлетворяет условиям сопряжения

$$u_p(0+0) = u_p(0-0), \quad u'_p(0+0) = u'_p(0-0),$$

т. е. функция (24) удовлетворяет условию (2).

Проверим для функции $u_p(x, y)$ выполнимость условий (3) и (4):

$$Lu(x, y) = \begin{cases} \left[u''_p(y) - \lambda_p^2 u_p(y)\right]\sin\lambda_p x = \\ = \left[\lambda_p^2 u_p(y) - \lambda_p^2 u_p(y)\right]\sin\lambda_p x \equiv 0, & y > 0, \\ \left[u''_p(y) + \lambda_p^2 u_p(y)\right]\sin\lambda_p x = \\ = \left[-\lambda_p^2 u_p(y) + \lambda_p^2 u_p(y)\right]\sin\lambda_p x \equiv 0, & y < 0; \end{cases}$$

$$u_p(0, y) = u_p(y)\sin 0 = 0, \quad u_p(1, y) = u_p(y)\sin\pi k = 0.$$

А в силу условия (23) для функции (25) выполняются равенства:

$$u_p(\beta) = \frac{a_p\left[2\operatorname{sh}\lambda_p\beta\operatorname{ch}\lambda_p\beta + 2\operatorname{sh}\lambda_p\beta\left(\frac{C_{1p}}{\lambda_p} - \operatorname{ch}\lambda_p\beta\right)\right]}{2\operatorname{sh}\lambda_p\beta} -$$

$$-\frac{a_p}{\lambda_p}\int\limits_0^\beta C_1(t)\,\mathrm{sh}\,[\lambda_p(\beta-t)]dt=\frac{a_p}{\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta}\cdot\frac{C_{1p}\,\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta}{\lambda_p}-\frac{a_pC_{1p}}{\lambda_p}=0,$$

$$u_p(-\alpha)=\frac{a_p\left[-\sin\lambda_p\alpha\left(\frac{C_{1p}}{\lambda_p}-\mathrm{ch}\,\lambda_p\beta\right)+\cos\lambda_p\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta\right]}{\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta}+$$

$$+\frac{a_p}{\lambda_p}\int\limits_{-\alpha}^0 C_2(t)\sin[\lambda_p(t+\alpha)]dt=$$

$$=\frac{a_p}{\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta}\left(\cos\lambda_p\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta+\sin\lambda_p\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_p\beta-\frac{C_{1p}\sin\lambda_p\alpha}{\lambda_p}+\frac{C_{2p}\,\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta}{\lambda_p}\right)=0.$$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема 1.1. Если существует решение задачи (2) – (5), то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (20) при всех $k\in N$.

2. Существование решения

Решение задачи (2)–(5) при условии (20) будем искать в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,\,y)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(y)\sin\lambda_kx, \tag{26}$$

где функции $u_k(y)$ определяются по формулам (21), из которых видно, что выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ является знаменателем. Для обоснования существования решения (26) данной задачи необходимо показать существование чисел α,β и функций $C_i(y)\,,\,i=1,\,2,$ таких, что при больших k выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ отделено от нуля.

Лемма 2.1. Если выполнено одно из следующих условий: 1) $\alpha=p$ — натуральное; 2) $\alpha=p/q,p,q\in N,(p,q)=1,q\neq 4,$ то существует постоянная C_0 такая, что при больших k и любом фиксированном $\beta>0$ справедлива оценка

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)|\geqslant C_0e^{\pi k\beta}>0. \tag{27}$$

Доказательство. Представим $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ в следующем виде:

$$\Delta_{\alpha\beta}(k)=-e^{\pi k\beta}B_k(\beta)\sin(\pi k\alpha+\varphi_k)+\frac{e^{\pi k\beta}}{k}\omega_k(\alpha,\beta), \tag{28}$$

где $\varphi_k=\arcsin\left(\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta/\sqrt{\mathrm{ch}\,2\lambda_k\beta}\right)\to\frac{\pi}{4}$ при $k\to+\infty$,

$$B_k(\beta)=\sqrt{\frac{1+e^{-4\pi k\beta}}{2}}, \tag{29}$$

$$\omega_k(\alpha,\beta)=\frac{\sin\pi k\alpha}{\pi e^{\pi k\beta}}C_{1k}(\beta)-\frac{C_{2k}(-\alpha)\left(1-e^{-2\pi k\beta}\right)}{2\pi}. \tag{30}$$

Прежде всего отметим, что при всех $\beta>0$ и $k\geqslant 1$ выражения (29) и (30) ограничены:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<B_k(\beta)<1, \tag{31}$$

$$|\,\omega_k(\alpha,\beta)\,|\leqslant\frac{\|\,C_1(y)\,\|+\alpha\,\|\,C_2(y)\,\|}{2\pi}, \tag{32}$$

где
$$\| C_1(y) \| = \max_{0 \leqslant y \leqslant \beta} | C_1(y) |, \ \| C_2(y) \| = \max_{-\alpha \leqslant y \leqslant 0} | C_2(y) | .$$
В силу оценок (31) и (32) достаточно оценить выражение
$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \sin(\pi k \alpha + \varphi_k). \tag{33}$$
Пусть $\alpha = p \in N$, тогда из (33) имеем
$$| \delta_{\alpha\beta}(k) | = |\sin(\pi k \beta + \varphi_k)| \geqslant \frac{1 - e^{-2\pi k \beta}}{2} \geqslant \frac{1 - e^{-2\pi\beta}}{2} \geqslant C_1 > 0. \tag{34}$$
Пусть $\alpha = p/q$, где p и q — взаимно простые числа. Разделим kp на q с остатком: $kp = sq + r$, где $s, r \in N \cup \{0\}$, $0 \leqslant r < q$. Тогда выражение (33) примет вид
$$\delta_{\alpha\beta}(k) = (-1)^s \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \varphi_k\right). \tag{35}$$
Если $r = 0$, то данный случай сводится к уже рассмотренному выше $\alpha = p \in N$. Пусть $r > 0$. Тогда ясно, что $1 \leqslant r \leqslant q - 1$, и из (35) получим
$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| = |\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_k\right)|,$$
где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Поскольку $q \neq 4$, то из последнего соотношения при больших k следует
$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| \geqslant \frac{1}{2}|\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \frac{\pi}{4}\right)| \geqslant C_2 > 0. \tag{36}$$

Из равенства (28) в силу оценок (34) и (36) следует справедливость неравенства (27) при больших k.

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия (20) и (27). Тогда при больших k справедливы оценки:
$$|u_k(y)| \leqslant \begin{cases} M_1(|\varphi_k| + |\psi_k|), & y > 0, \\ M_2(|\varphi_k| + |\psi_k|), & y < 0, \end{cases} \tag{37}$$
$$|u_k'(y)| \leqslant \begin{cases} M_3 k(|\varphi_k| + |\psi_k|), & y > 0, \\ M_4 k(|\varphi_k| + |\psi_k|), & y < 0, \end{cases} \tag{38}$$
$$|u_k''(y)| \leqslant \begin{cases} M_5 k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|), & y > 0, \\ M_6 k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|), & y < 0, \end{cases} \tag{39}$$
где M_i — здесь и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, β, $\|C_1(y)\|$ и $\|C_2(y)\|$.

Доказательство. Справедливость оценки (37) непосредственно следует из формулы (21) и оценки (27). Исходя из (21) вычислим производные $u_k'(y)$ и $u_k''(y)$:
$$u_k'(y) = \begin{cases} \psi_k \frac{C_{1k}'(y)\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta - \lambda_k C_{1k}(\beta)\,\mathrm{ch}\,\lambda_k y}{\lambda_k \Delta_{\alpha\beta}(k)} + \\ + \psi_k \frac{\lambda_k\,\mathrm{ch}\,[\lambda_k(y-\beta)]}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} + \varphi_k \frac{\Delta_{\alpha y}'(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, & y > 0, \\ \psi_k \frac{\Delta_{-y\beta}'(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} - \varphi_k \frac{\lambda_k \cos\lambda_k(\alpha+y)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} - \\ - \varphi_k \frac{C_{2k}'(y)\sin\lambda_k\alpha + \lambda_k C_{2k}(-\alpha)\cos\lambda_k y}{\lambda_k \Delta_{\alpha\beta}(k)}, & y < 0, \end{cases} \tag{40}$$
$$u_k''(y) = \begin{cases} \psi_k \frac{\lambda_k[C_{1k}(y)\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta - C_{1k}(\beta)\,\mathrm{sh}\,\lambda_k y]}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} + \\ + \psi_k \frac{\lambda_k^2\,\mathrm{sh}\,[\lambda_k(y-\beta)]}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} + \varphi_k \frac{\lambda_k^2 \Delta_{\alpha y}(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, & y > 0, \\ -\psi_k \frac{\lambda_k^2 \Delta_{-y\beta}(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} + \varphi_k \frac{\lambda_k^2 \sin\lambda_k(\alpha+y)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} + \\ + \varphi_k \frac{\lambda_k[C_{2k}(y)\sin\lambda_k\alpha + C_{2k}(-\alpha)\sin\lambda_k y]}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, & y < 0, \end{cases} \tag{41}$$

где

$$\Delta'_{\alpha y}(k) = \frac{\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k}\left[C'_{1k}(y) - \lambda_k^2 \operatorname{sh}\lambda_k y\right] - \operatorname{ch}\lambda_k y\left[\lambda_k\cos\lambda_k\alpha + C_{2k}(-\alpha)\right],$$

$$\Delta'_{-y\beta}(k) = -\cos\lambda_k y\left[C_{1k}(\beta) - \lambda_k \operatorname{ch}\lambda_k\beta\right] - \frac{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}{\lambda_k}\left[C'_{2k}(y) - \lambda_k^2\sin\lambda_k y\right],$$

$$C'_{1k}(y) = \lambda_k\int_0^y C_1(t)\operatorname{ch}[\lambda_k(y-t)]dt,\ C'_{2k}(y) = -\lambda_k\int_y^0 C_2(t)\cos[\lambda_k(t-y)]dt.$$

Тогда из равенств (40) и (41) на основании (27) и (37) убеждаемся в справедливости оценок (38) и (39).

Формально из (26) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_y(x,\,y) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(y)\sin\lambda_k x,\quad y<0, \tag{42}$$

$$u_y(x,\,y) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(y)\sin\lambda_k x,\quad y>0, \tag{43}$$

$$u_{yy}(x,\,y) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 u_k(y)\sin\lambda_k x -$$

$$-\sqrt{2}C_1(y)\sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\sin\lambda_k x,\quad y>0, \tag{44}$$

$$u_{xx}(x,\,y) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 u_k(y)\sin\lambda_k x,\quad y>0, \tag{45}$$

$$u_{yy}(x,\,y) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 u_k(y)\sin\lambda_k x -$$

$$-\sqrt{2}C_2(y)\sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\sin\lambda_k x,\quad y<0, \tag{46}$$

$$u_{xx}(x,\,y) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 u_k(y)\sin\lambda_k x,\quad y<0. \tag{47}$$

Ряды (26), (42)–(47) в силу леммы 2 мажорируются числовым рядом

$$M_7\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|). \tag{48}$$

Лемма 2.3. Если $\varphi(x)\in C^3[0,1]$, $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi''(0)=\varphi''(1)=0$ и $\psi(x)\in$ $\in C^3[0,1]$, $\psi(0)=\psi(1)=\psi''(0)=\psi''(1)=0$, то

$$\varphi_k = -\frac{1}{\lambda_k^3}\varphi'''_k,\ \psi_k = -\frac{1}{\lambda_k^3}\psi'''_k, \tag{49}$$

где

$$\varphi'''_k = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi'''(x)\cos\lambda_k x dx,\ \psi'''_k = \sqrt{2}\int_0^1 \psi'''(x)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k^{'''}|^2\leqslant||\varphi^{'''}(x)||^2_{L_2[0,1]},\quad \sum_{k=1}^{+\infty}|\psi_k^{'''}|^2\leqslant||\psi^{'''}(x)||^2_{L_2[0,1]}. \qquad (50)$$

Доказательство. Интегрируя по частям три раза в интегралах из (16) и (17), с учетом условий леммы получим представления (49).

Справедливость оценок (50) следует из неравенства Бесселя по тригонометрической системе $\{\cos\lambda_k x\}$.

Тогда в силу леммы 2.3 ряд (48) оценивается рядом

$$M_8\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}(|\varphi_k^{'''}|+|\psi_k^{'''}|). \qquad (51)$$

В силу сходимости ряда (51) на основании признака Вейерштрасса сходятся равномерно ряды (26), (42) и (43) на $\overline{D}$, а ряды (44)–(47) на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Следовательно, функция $u\,(x,\,y)$, определенная рядом (26), удовлетворяет условию (2). Подставляя ряды (26), (44) и (45) в уравнение (1) при $y>0$, а ряды (26), (46) и (47) в уравнение (1) при $y<0$, убеждаемся в том, что функция (26) является решением уравнения (1) на множестве $D_+\cup D_-$.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2.1. Пусть функции $\varphi\,(x)$ и $\psi\,(x)$ удовлетворяют условиям леммы 2.3, $C_1\,(y)\in C\,[0,\,\beta]\,,\quad C_2\,(y)\in C\,[-\alpha,\,0]$ и выполнены условия (20) и (27), то существует единственное решение задачи (2)–(5), и оно определяется рядом (26).

Литература

[1] Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа. Докл. АМАН. Нальчик. 2009. Т. 11. № 1. С. 66–73.

[2] Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Математические заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273–279.

[3] Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 103–108.

[4] Казиев В.М. Задача Трикоми для нагруженного уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 1. С. 173–175.

[5] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 86–94.

[6] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

[7] Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алмата, 1995. 270 с.

[8] Пулькина Л.С. Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения // Труды МИАН. 2002. Т. 236. С. 298–303.

[9] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[10] Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Вычислительная математика и математическая физика. 2004. Т. 44. № 4. С. 694–716.

[11] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

[12] Хубиев К.У. Локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Белгород, 2009. 15 с.

Поступила в редакцию 12/ V/2010;
в окончательном варианте — 12/ V/2010.

DIRICHLET PROBLEM FOR LOADED EQUATION OF LAVRENTIEV — BIZADZE

© 2010 E.P. Melisheva[2]

Necessary and sufficient conditions of the uniqueness of solution of the first boundary problem for the loaded equtation of Lavrentiev — Bitsadze in the rectangular area are established in this work.The solution of the task in view is constructed in the form of the number sum on the own functions of a corresponding one-dimensional problem on the own values.

Key words: loaded equation of the mixed type, Dirichlet problem, spectral method, uniqueness, existence.

Paper received 12/ V/2010.
Paper accepted 12/ V/2010.

[2]Melisheva Ekaterina Petrovna (melisheva86@mail.ru), the Dept. of Mathematical Analysis, Samara State Academy of Social Sciences and Humanities, Samara, 443090, Russian Federation.