УДК 512.6

АЛГЕБРЫ ПУТЕЙ НА ПОЛНЫХ ГРАФАХ

© 2010 В.Г. Мосин[1]

В статье определяются алгебры путей на связных графах. Описываются их свойства и центральные элементы тел, частных для случая, когда граф является полным неориентированным графом без петель.

Ключевые слова: квантовая алгебра, граф, алгебра скрученных многочленов.

1. Постановка задачи

Определение 1. Пусть $A = (\alpha_{ij})$ — кососимметричная $n \times n$-матрица с целыми элементами, q — переменная или комплексное число, не являющееся корнем из единицы. Ассоциативная алгебра над полем комплексных чисел называется алгеброй скрученных многочленов, если она порождена образующими $a_1, \ldots, a_n$ с соотношениями

$$a_i a_j = q^{\alpha_{ij}} a_j a_i \,. \tag{1.1}$$

Тело частных этой алгебры называется телом скрученных рациональных функций.

Если имеется связный граф G, то по каждой паре его вершин можно следующим образом построить ассоциативную алгебру путей.

Определение 2. Пусть G — связный граф, d — натуральное число. Объявим вершину g_i стартовой, а g_j — финишной и рассмотрим все пути, ведущие из g_i в g_j, длины которых не превышают d. Назовем алгеброй путей, ассоциированных со стартом g_i и финишем g_j, алгебру $\mathcal{A}$, порожденную всеми такими путями X, Y, ... с соотношениями:

$$XY = q^{\alpha} YX \,, \tag{1.2}$$

где α — это разность между длинами путей X и Y, а q — переменная или комплексное число, не являющееся корнем из единицы.

В силу данных выше определений, алгебра $\mathcal{A}$ является алгеброй скрученных многочленов, способы изучения которых хорошо проработаны (см. [1–3]). В частности, в [1] доказано следующее.

Теорема 1. Любое тело скрученных рациональных функций изоморфно телу скрученных рациональных функций, порожденному элементами

$$\langle u_1, \ldots, u_{k_1}; v_1, \ldots, v_{k_1}; z_1, \ldots, z_{k_2} \rangle \,,$$

[1]Мосин Владимир Геннадьевич (yanbacha@yandex.ru), кафедра высшей математики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

матрица соотношений между которыми имеет канонический вид:

$$\mathrm{diag}\,(E_1, \ldots, E_{k_1} 0, \ldots, 0)\,, \quad \text{где} \quad E_i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i \\ -\alpha_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Два тела с различными каноническими матрицами неизоморфны. Центр тела скрученных рациональных функций является полем рациональных функций от $z_{k_1}, \ldots, z_{k_2}$.

В настоящей работе находятся каноническая матрица и образующие элементы центра тела частных алгебры путей на полном неориентированном графе без петель (см. теорему 3 и теорему 4).

2. Алгебры $\mathcal{A}_n^{ij}(d)$

Определение 3. Пусть G — полный граф без петель, $g_1, \ldots, g_n$ — его вершины, d — натуральное число. Алгеброй $\mathcal{A}_n^{ij}(d)$ называется алгебра путей, ведущих из вершины g_i в вершину g_j, длины которых не превосходят d. Соотношения между образующими даны выше (см. 1.2).

Пути, ассоциированные со стартом g_i и финишем g_j, разбиваются на непересекающиеся классы путей равной длины. Поэтому из определения алгебры $\mathcal{A}_n^{ij}(d)$ сразу получается ее разложение в тензорное произведение:

$$\mathcal{A}_n^{ij}(d) = \bigotimes_{k=1}^{d} \mathcal{B}_n^{ij}(k)\,, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{B}_n^{ij}(k)$ — это подалгебра в $\mathcal{A}_n^{ij}(d)$, порожденная путями длины k. В силу соотношений (1.2) подалгебры $\mathcal{B}_n^{ij}(k)$ коммутативны, однако представители разных подалгебр не коммутируют друг с другом:

$$XY = q^{k-l} YX \qquad \forall\ X \in \mathcal{B}_n^{ij}(k)\,, \quad \forall\ Y \in \mathcal{B}_n^{ij}(l)\,. \tag{2.2}$$

Размерность Гельфанда — Кириллова подалгебры $\mathcal{B}_n^{ij}(k)$ совпадает с числом путей длины k, идущих из вершины g_i в вершину g_j. Это число в дальнейшем будем обозначать $\Phi_n^{ij}(k)$:

$$\Phi_n^{ij}(k) = \mathrm{GKdim}\, \mathcal{B}_n^{ij}(k)\,.$$

Лемма 1. Числа размерностей $\Phi_n^{ij}(k)$ таковы, что:

$$\begin{aligned} \Phi_n^{ij}(k) &= \Phi_n^{lm}(k) \qquad && \forall\ i \neq j,\ l \neq m\,, \\ \Phi_n^{ii}(k) &= \Phi_n^{jj}(k) \qquad && \forall\ i, j\,. \end{aligned}$$

Доказательство. По определению, $\Phi_n^{ij}(k)$ — это число различных путей длины k, ведущих из i-й в j-ю вершину графа G. Оно вычисляется как (i,j)-компонента k-й степени его матрицы смежностей M. Граф G является полным, поэтому матрица M такова:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq j\,, \\ 0, & \text{если } i = j\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Применим индукцию по k. Для $k = 1$ свойство очевидно. Допуская, что оно справедливо для $k - 1$,

$$m_{ij}^{(k-1)} = \begin{cases} a, & \text{если } i \neq j\,, \\ b, & \text{если } i = j \end{cases} \tag{2.4}$$

и непосредственно умножая (2.3) на (2.4), получим:

$$m_{ij}^{(k)} = \begin{cases} (n-2)a+b, & \text{если } i \neq j\,, \\ (n-1)a, & \text{если } i = j\,. \end{cases}$$

□

Лемма 2. Числа размерностей $\Phi_n^{ij}(k)$ могут быть вычислены по следующим рекуррентным формулам:

$$\Phi_n^{jj}(1) = 0\,, \quad \Phi_n^{ij}(1) = 1 \;\; \forall\;\, i \neq j\,,$$

$$\Phi_n^{ij}(k) = \sum_{m \neq j} \Phi_n^{im}(k-1)\,.$$

Доказательство. Как и в предыдущем утверждении, доказательство построено на последовательном возведении в степень матрицы смежностей M графа G. При этом начальные значения рекуррентных формул — это просто i-я строка матрицы (2.3), а рекуррентная связь получается матричным умножением $(k-1)$-й и первой степени этой матрицы:

$$\Phi_n^{ij}(k) = \Phi_n^{i1}(k-1)\cdot 1 + \ldots + \Phi_n^{ij}(k-1)\cdot 0 + \ldots + \Phi_n^{in}(k-1)\cdot 1 = \sum_{m \neq j} \Phi_n^{im}(k-1)\,.$$

□

Теорема 2. На полном графе G имеются лишь две неизоморфные алгебры путей: $\mathcal{A}_n^{ii}(d)$ и $\mathcal{A}_n^{ij}(d)$, если $i \neq j$.

Доказательство. Пусть $i \neq j$. Согласно лемме 1, размерности подалгебр $\mathcal{B}_n^{ij}(k)$ в разложении (2.1) и перестановочные соотношения (2.2) между представителями подалгебр $\mathcal{B}_n^{ij}(k)$ не зависят от индексов i и j. Поэтому

$$\mathcal{A}_n^{ij}(d) \cong \mathcal{A}_n^{ml}(d) \qquad \forall\;\, i \neq j,\;\, l \neq m\,.$$

Случай $i = j$ рассматривается аналогично. Установим неизоморфность:

$$\mathcal{A}_n^{ii}(d) \ncong \mathcal{A}_n^{ij}(d) \qquad \forall\;\, i \neq j.$$

Обозначим через X ребро, связывающее вершину g_i с вершиной g_j, Y — любой другой путь из $\mathcal{A}_n^{ij}(d)$. Тогда $XY = q^{\alpha} YX$, причем, так как X является кратчайшим путем из g_i в g_j, показатель α является строго положительным. Таким образом, среди образующих алгебры $\mathcal{A}_n^{ij}(d)$ имеется элемент, обладающий положительным весом относительно всех остальных образующих. С другой стороны, среди образующих алгебры $\mathcal{A}_n^{ii}(d)$ элемента, обладающего таким свойством, нет, так, при совпадении стартовой и финишной вершин имеется несколько кратчайших путей длины 2, и относительно друг друга они обладают нулевым, а не положительным весом. □

3. Тела частных $\mathcal{F}_n^{ij}(d)$

Определение 4. Телом $\mathcal{F}_n^{ij}(d)$ называется тело частных алгебры $\mathcal{A}_n^{ij}(d)$.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра скрученных многочленов, порожденная двумя семействами образующих:

$$\mathcal{A} = \langle a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_s \rangle\,,$$

$\mathcal{F}$ — тело частных алгебры $\mathcal{A}$. Пусть образующие b_i перестановочны между собой, а перестановочные соотношения между образующими a_i и b_j не зависят от i и j. Тогда:

$$\operatorname{Center}\mathcal{F} = (\operatorname{Center}\mathcal{F}') \otimes \mathcal{F}'' ,$$

где $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ — это тела, порожденные следующими образующими:

$$\mathcal{F}' = \langle a_1, \ldots, a_p, b_1 \rangle , \qquad \mathcal{F}'' = \langle b_2 b_1^{-1}, b_3 b_1^{-1}, \ldots, b_s b_1^{-1} \rangle .$$

Доказательство. В силу строения алгебры $\mathcal{A}$ все элементы тела $\mathcal{F}''$ являются центральными:

$$\mathcal{F}'' \subset \operatorname{Center}\mathcal{F} .$$

Кроме того, в качестве образующих тела $\mathcal{F}$ можно выбрать следующие элементы:

$$\mathcal{F} = \langle a_1, \ldots, a_p, b_1, b_2 b_1^{-1}, \ldots, b_s b_1^{-1} \rangle .$$

Отсюда сразу получается требуемое:

$$\operatorname{Center}\mathcal{F} = (\operatorname{Center}\mathcal{F}') \otimes \mathcal{F}'' .$$

□

Лемма 4. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра скрученных многочленов, порожденная d семействами образующих:

$$\mathcal{A} = \langle a_{11}, \ldots, a_{1p_1}; a_{21}, \ldots, a_{2p_2}; \ldots; a_{d1}, \ldots a_{dp_d} \rangle ,$$

$\mathcal{F}$ — тело частных алгебры $\mathcal{A}$. Пусть образующие одного семейства перестановочны между собой, а перестановочные соотношения между представителями разных семейств не зависят от выбора представителей. Тогда:

$$\operatorname{Center}\mathcal{F} = (\operatorname{Center}\mathcal{F}') \otimes \bigotimes_{k=1}^{d} \mathcal{F}_k ,$$

где $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}_k$ — это тела, порожденные следующими образующими:

$$\mathcal{F}' = \langle a_{11}, a_{21} \ldots, a_{d1} \rangle , \qquad \mathcal{F}_k = \langle a_{k2} a_{k1}^{-1}, a_{k3} a_{k1}^{-1}, \ldots, a_{kp_k} a_{k1}^{-1} \rangle .$$

Доказательство. Из леммы 3 следует, что:

$$\operatorname{Center}\mathcal{F} = (\operatorname{Center}\mathcal{F}') \otimes \mathcal{F}'' ,$$

где $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ — это тела, порожденные следующими образующими:

$$\mathcal{F}' = \langle a_{11}, \ldots, a_{1p_1}; a_{21}, \ldots, a_{2p_2}; \ldots; a_{d1} \rangle , \quad \mathcal{F}'' = \langle a_{d2} a_{d1}^{-1}, a_{d3} a_{d1}^{-1}, \ldots, a_{dp_d} a_{d1}^{-1} \rangle .$$

Проводя это действие d раз, получаем требуемое. □

Теорема 3. Пусть $\mathcal{A}_n^{ij}(d)$ — алгебра путей на полном, не содержащем петель графе G, $\mathcal{F}_n^{ij}(d)$ — ее тело частных, и пусть $\operatorname{tdeg}\mathcal{F}$ означает степень трансцендентности тела $\mathcal{F}$ над основным полем. Тогда для путей с различающимися стартом и финишем

$$\operatorname{tdeg}\operatorname{Center}\mathcal{F}_n^{ij}(d) = \operatorname{GKdim}\mathcal{A}_n^{ij}(d) - 2 \quad \forall\ i \neq j\ \forall\ d > 1 .$$

Если же пути финишируют в стартовой точке, то

$$\operatorname{tdeg}\operatorname{Center}\mathcal{F}_n^{ii}(d) = \operatorname{GKdim}\mathcal{A}_n^{ii}(d) - 2 \quad \forall\ d > 2 .$$

Доказательство. Рассмотрим случай $i \neq j$. Обозначим $X_n^{ij}(k,l)$ путь, l-й по счету в семействе путей длины длины k, ведущих из i-й в j-ю вершину графа G. Тогда, по определению, алгебра $\mathcal{A}_n^{ij}(d)$ оказывается порожденной d семействами путей:

$$\mathcal{A}_n^{ij}(d) = \langle X_n^{ij}(1,1), \ldots, X_n^{ij}(1,p_1); \ldots; X_n^{ij}(d,1), \ldots, X_n^{ij}(d,p_d) \rangle \,,$$

где числа p_k вычисляются по данным выше рекуррентным формулам (см. лемму 2). Перестановочные соотношения (2.2) в алгебре $\mathcal{A}_n^{ij}(d)$ таковы, что выполняются условия леммы 4. Тем самым сразу находятся следующие образующие центра:

$$X_n^{ij}(k,l) \left(X_n^{ij}(k,1) \right)^{-1} , \qquad k = \overline{1,d}\,, \;\; l = \overline{2,p_k}\,,$$

причем из разложения (2.1) следует, что их число равно

$$\operatorname{GKdim} \mathcal{A}_n^{ij}(d) - d\,. \tag{3.2}$$

Согласно той же лемме, к найденным образующим нужно добавить образующие центра тела, порожденного путями

$$X_n^{ij}(1,1), X_n^{ij}(2,1), \ldots, X_n^{ij}(d,1)\,.$$

Коммутационная матрица C этого тела имеет порядок d и обладает компонентами $c_{kl} = k - l$. Ранг этой матрицы равен 2, и, следовательно, имеется еще $d-2$ образующих центра. Прямой проверкой можно убедиться, что следующие мономы центральны:

$$X_n^{ij}(k-2,1) \left(X_n^{ij}(k-1,1) \right)^{-2} X_n^{ij}(k,1) \qquad \forall \;\; k = \overline{3,d}\,.$$

С учетом того, что они алгебраически независимы, их можно указать в качестве недостающих $d-2$ образующих центра. Складывая $d-2$ с (3.2), получим:

$$\operatorname{tdeg} \operatorname{Center} \mathcal{F}_n^{ij}(d) = \operatorname{GKdim} \mathcal{A}_n^{ij}(d) - d + (d-2) = \operatorname{GKdim} \mathcal{A}_n^{ij}(d) - 2\,,$$

что и требовалось.

Случай $i = j$ отличается от рассмотренного тем, что в полном графе без петель не существует путей длины 1, заканчивающихся в стартовой вершине, и, значит, алгебра $\mathcal{A}_n^{ii}(1)$ является скалярной, а алгебра $\mathcal{A}_n^{ii}(2)$ коммутативной. Начиная с допустимой длины 3, ситуация полностью воспроизводит случай $i \neq j$. $\square$

Теорема 4. Тело $\mathcal{F}_n^{ij}(d)$ изоморфно алгебре скрученных рациональных функций с блочно-диагональной матрицей соотношений, содержащей единственный нетривиальный блок:

$$\operatorname{diag}(E, 0, \ldots, 0)\,, \quad \text{где} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Как было показано в [1], любая алгебра скрученных рациональных функций изоморфна стандартной алгебре, порожденной элементами

$$\langle u_1, \ldots, u_{k_1}; v_1, \ldots, v_{k_1}; z_1, \ldots, z_{k_2} \rangle\,,$$

матрица соотношений между которыми имеет блочно-диагональный вид:

$$\operatorname{diag}(E_1, \ldots, E_{k_1} 0, \ldots, 0)\,, \quad \text{где} \quad E_i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i \\ -\alpha_i & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу предыдущей теоремы, для тела $\mathcal{F}_n^{ij}(d)$ число образующих центра вычисляется как $k_2 = \operatorname{GKdim} \mathcal{A}_n^{ij}(d) - 2$. Поэтому в блочно-диагональной матрице соотношений стандартной алгебры имеется единственный нетривиальный блок, а набор ее образующих таков:

$$\langle u; v; z_1, \ldots, z_{k_2} \rangle\,,$$

где в качестве элементов z_i можно выбрать центральные элементы, указанные в теореме 2. Положив

$$u = X_n^{ij}(1,1)\,, \qquad v = X_n^{ij}(2,1)\,,$$

получим требуемое для случая $i \neq j$. В случае $i = j$ следует выбрать

$$u = X_n^{ij}(2,1)\,, \qquad v = X_n^{ij}(3,1)\,.$$

□

Литература

[1] Панов А.Н. Тела скрученных рациональных функций и тело рациональных функций на $GL_q(n,K)$ // Алгебра и анализ. 1995. № 7(1). С. 153–167.

[2] Мосин В.Г., Панов А.Н. Тела частных и центральные элементы многопараметрических квантований // Матем. сб. 1996. № 187(6). С. 53—72.

[3] Мосин В.Г. Примитивные идеалы в алгебре регулярных функций на квантовых $(m \times n)$-матрицах // Матем. заметки, 2002. № 71(2). С. 318–320.

Поступила в редакцию $21/IV/2010$;
в окончательном варианте — $21/IV/2010$.

ALGEBRAS OF PATHS ON COMPLETE GRAPHS

© 2010 V.G. Mosin[2]

The algebras of paths on connected graphs are defined. Their properties are described and central elements of division rings for the case when the graph is a complete, indirected loop-free, are also described.

Key words: quantum algebra, graph, algebra of twisted polynomials.

Paper received $21/IV/2010$.
Paper accepted $21/IV/2010$.

[2]Mosin Vladimir Gennadievich (yanbacha@yandex.ru), the Dept. of Higher Mathematics, Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara, 443001, Russian Federation.