УДК 517.956.3

О ЗАДАЧЕ С ОПЕРАТОРАМИ М. САЙГО НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2010 С.А. Сайганова[1]

Для вырождающегося уравнения гиперболического типа в характеристической области исследована нелокальная задача, краевые условия которой содержат обобщенные операторы дробного интегродифференцирования на характеристиках. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: функция Гаусса, дробные интегралы и производные, краевая задача, интегральное уравнение, ядро Коши.

Введение

Рассмотрим уравнение

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области D, ограниченной характеристиками

$$AC\colon x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC\colon x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 1,$$
$$AD\colon x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BD\colon x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1).

Пусть $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$, $I = (0, 1)$. $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in I$, с характеристиками AD и BC соответственно.

Для уравнения (1) в области D изучим нелокальную краевую задачу со смещением по терминологии А.М. Нахушева [1].

Будем считать $m > 0$ при $y > 0$ и $y < 0$.

Следуя работам [2; 3] (см. также [4, с. 326–327]), введем обобщенные дробные интегралы и производные с гипергеометрической функцией Гаусса

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}\varphi\right)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta,\, -\eta;\, \alpha;\, 1-\frac{t}{x}\right)\varphi(t)\,dt$$
$$(0 < x < 1,\ \alpha > 0),$$

[1]Сайганова Светлана Александровна (`syomina_sa@mail.ru`), кафедра прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}\varphi\right)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}\varphi\right)(x)$$
$$(0<x<1,\ \alpha>0,\ n=[-\alpha]+1), \tag{2}$$

$$\left(I_{1-}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}\varphi\right)(x)=\frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x}^{1}(t-x)^{\alpha-1}F\left(\alpha+\beta,\,-\eta;\,\alpha;\,\frac{t-x}{1-x}\right)\varphi(t)\,dt$$
$$(0<x<1,\ \alpha>0),$$

$$\left(I_{1-}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}\varphi\right)(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_{1-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}\varphi\right)(x)$$
$$(0<x<1,\ \alpha>0,\ n=[-\alpha]+1), \tag{3}$$

которые при $\alpha+\beta=0$ обращаются в хорошо известные операторы Римана—Лиувилля [4, с. 42–43]

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\,-\alpha,\,\eta}\varphi\right)(x)=\left(I_{0+}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt$$
$$(0<x<1,\ \alpha>0),$$

$$\left(D_{0+}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\left(I_{0+}^{-\alpha,\,\alpha,\,\eta}\varphi\right)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_{0+}^{n-\alpha}\varphi\right)(x)$$
$$(0<x<1,\ \alpha>0,\ n=[\alpha]+1), \tag{4}$$

$$\left(I_{1-}^{\alpha,\,-\alpha,\,\eta}\varphi\right)(x)=\left(I_{1-}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x}^{1}\frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,dt$$
$$(0<x<1,\ \alpha>0),$$

$$\left(D_{1-}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\left(I_{1-}^{-\alpha,\,\alpha,\,\eta}\varphi\right)(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_{1-}^{n-\alpha}\varphi\right)(x)$$
$$(0<x<1,\ \alpha>0,\ n=[\alpha]+1). \tag{5}$$

Обозначим через $\mathrm{H}^{\lambda}[0,1]$ $(0<\lambda\leqslant 1)$ пространство функций, на отрезке $[0,1]$ удовлетворяющих условию Гельдера фиксированного порядка λ, через $\mathrm{H}_0^{\lambda}[0,1]$ — его подпространство

$$\mathrm{H}_0^{\lambda}[0,1]=\left\{\varphi(x)\in\mathrm{H}^{\lambda}[0,1],\ \varphi(0)=\varphi(1)=0\right\}.$$

Для функций $\rho(x)\geqslant 0$ будем употреблять обозначение: $\mathrm{H}^{\lambda}\left(\rho;[0,1]\right)$, при этом $\rho(x)\in\mathrm{H}_0^{\lambda}[0,1]$.

1. Постановка задачи

Найти решение уравнения (1)

$$u(x,\,y)=\begin{cases}u_1(x,\,y), & (x,\,y)\in D_1,\\ u_2(x,\,y), & (x,\,y)\in D_2\end{cases}$$

из класса $u(x,\,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D_1\cup I)\cap C^1(D_2\cup I)\cap C^2(D_1\cup D_2)$, удовлетворяющее условиям

$$B_1\left(I_{1-}^{a_1,\,b_1,\,-\beta-a_1}(1-t)^{2\beta-1}u\left[\theta_1(t)\right]\right)+$$
$$+B_2\left(I_{1-}^{a_1+1-\beta,\,b_1,\,-\beta-a_1}u_{1_y}(t,0)\right)(x)=\psi_1(x),\quad y>0, \tag{6}$$

$$\begin{gathered}C_1\left(I_{0+}^{a_2,\,b_2,\,-\beta-a_2}t^{2\beta-1}u\left[\theta_0(t)\right]\right)+\\+C_2\left(I_{0+}^{a_2+1-\beta,\,b_2,\,-\beta-a_2}u_{2_y}(t,0)\right)(x)=\psi_2(x),\quad y<0\end{gathered}\tag{7}$$

и условию сопряжения

$$u_{1_y}(x,+0)=u_{2_y}(x,-0),\tag{8}$$

где $2\beta=\frac{m}{m+2}$, B_i, C_i, a_i, b_i $(i=1,2)$ — заданные действительные числа, причем

$$B_1,\ B_2 \text{ — одного знака},\quad C_1,\ C_2 \text{ — разного знака};\tag{9}$$

$$|a_1|<\beta,\quad \beta-1<a_2<\beta,\quad 0<b_1\leqslant 2\beta.\tag{10}$$

Будем считать функцию $\psi_1(x)$ такой, что

$$\psi_1(x)\in \mathrm{H}^{\lambda_1}[0,1],\quad a_1+1-\beta<\lambda_1\leqslant 1\tag{11}$$

и $\int\limits_0^1 t^{-(a_1+\beta)}F(\beta-a_1-b_1-1,\,1;\,1-a_1-\beta;\,t)\psi_1(t)dt$ обращается в нуль порядка μ_1, $0\leqslant\mu_1<\lambda_1+2\beta$. Заметим, что множество функций вида $\psi_1(t)$ не является пустым. Например, в качестве функции $\psi_1(t)$ можно взять функцию следующего вида: $\psi_1(t)=\frac{\mu_1(t^2-t)^{\mu_1-1}(2t-1)t^{a_1+\beta}}{F(\beta-a_1-b_1-1,\,1;\,1-a_1-\beta;\,t)}$.

Пусть функция $\psi_2(x)$ такая, что

$$\psi_2(x)=\left(I_{0+}^{\delta_1,\,\delta_2,\,-a_2-b_2}\psi_0(t)\right)(x),\quad \psi_0(x)\in\mathrm{H}^{\lambda_2}[0,1],\quad 0<\lambda_2\leqslant 1\tag{12}$$

и $\psi_0(x)$ при $x=0$ обращается в нуль порядка β, $\delta_1>a_2+1-\beta$, $b_2-2\beta<\delta_2<b_2$.

Отметим, что исследование задач с заданием краевых условий на характеристиках различных семейств началось с работ Т.Ш. Кальменова [5]. Далее развитие этих задач получило в работах В.Ф. Волкодавова и его учеников [6], известны также результаты в данном направлении С.К. Кумыковой [7] и О.А. Репина [8]. Однако во всех перечисленных работах, за исключением работ О.А. Репина, в краевых условиях использовались либо операторы Римана—Лиувилля, либо они не использовались вовсе. В данном же случае в краевых условиях используются операторы более сложной структуры — операторы дробного интегродифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса.

2. Единственность решения

Введем обозначения

$$\begin{gathered}\lim_{y\to0+}u_1(x,\,y)=\tau_1(x),\quad \lim_{y\to0-}u_2(x,\,y)=\tau_2(x),\\ \lim_{y\to0+}u_{1_y}(x,\,y)=\nu_1(x),\quad \lim_{y\to0-}u_{2_y}(x,\,y)=\nu_2(x).\end{gathered}\tag{13}$$

Известно [9, с. 103], что решение задачи Коши

$$u|_{y=0}=\tau_1(x),\quad x\in\overline{I},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\nu_1(x),\quad x\in I$$

для уравнения (1) при $y>0$ имеет вид

$$\begin{gathered}u(x,y)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int\limits_0^1\tau_1\left[x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt+\\+\frac{2}{m+2}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}y\int\limits_0^1\nu_1\left[x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt.\end{gathered}\tag{14}$$

Используя (14) и учитывая формулу (3), находим

$$\begin{gathered} u[\theta_1(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta) \left(I_{1-}^{\beta,\, 0,\, \beta-1} \tau_1(t) \right)(x) + \\ + \gamma_2 \Gamma(1-\beta) \left(I_{1-}^{1-\beta,\, 2\beta-1,\, \beta-1} \nu_1(t) \right)(x), \end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Подставляя (15) в краевое условие (6), опираясь на формулы [2]

$$\begin{gathered} \left(I_{1-}^{\alpha,\, \beta,\, \eta} f \right)(x) = (1-x)^{-\alpha-\beta-\eta} \left(I_{1-}^{\alpha,\, -\alpha-\eta,\, -\alpha-\beta} f \right)(x), \quad \alpha > 0, \\ \left(I_{1-}^{\alpha,\, \beta,\, \eta} \left(I_{1-}^{\gamma,\, \delta,\, \alpha+\eta} f \right)(t) \right)(x) = \left(I_{1-}^{\alpha+\gamma,\, \beta+\delta,\, \eta} f \right)(x), \quad \gamma > 0, \end{gathered} \tag{16}$$

получим

$$\begin{gathered} B_1 \gamma_1 \Gamma(\beta) \left(I_{1-}^{a_1+\beta,\, b_1+1-2\beta,\, -\beta-a_1} \tau_1(t) \right)(x) + \\ + \left[B_1 \gamma_2 \Gamma(1-\beta) + B_2 \right] \left(I_{1-}^{a_1+1-\beta,\, b_1,\, -\beta-a_1} \nu_1(t) \right)(x) = \psi_1(x). \end{gathered} \tag{17}$$

Подействуем на обе части равенства (17) оператором $I_{1-}^{\beta-1-a_1,\, -b_1,\, 1-2\beta}$ и воспользуемся второй формулой из (16). В результате будем иметь

$$\begin{gathered} \left[B_1 \gamma_2 \Gamma(1-\beta) + B_2 \right] \nu_1(x) = \\ = -B_1 \gamma_1 \Gamma(\beta) \left(D_{1-}^{1-2\beta} \tau_1 \right)(x) + \left(I_{1-}^{\beta-1-a_1,\, -b_1,\, 1-2\beta} \psi_1(t) \right)(x). \end{gathered} \tag{18}$$

Лемма 1. Пусть $\psi_1(x) \equiv 0$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$, B_1 и B_2 — одного знака, а функция $\tau_1(x)$ в точке $x = x_0$ $(0 < x_0 < 1)$ принимает положительный максимум (отрицательный минимум). Тогда $\nu_1(x_0) < 0$ $(\nu_1(x_0) > 0)$.

Доказательство леммы 1 непосредственно следует из соотношения (18) на основании свойства строгой положительности (строгой отрицательности) производной дробного порядка $\left(D_{1-}^{1-2\beta} \tau_1 \right)(x)$ в точке положительного максимума (отрицательного минимума) [1].

Решение задачи Коши

$$u|_{y=0} = \tau_2(x), \quad x \in \overline{I}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \nu_2(x), \quad x \in I$$

для уравнения (1) при $y < 0$ имеет вид [9, с. 103]

$$\begin{gathered} u(x,y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int\limits_0^1 \tau_2 \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt + \\ + \frac{2}{m+2} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} y \int\limits_0^1 \nu_2 \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt. \end{gathered} \tag{19}$$

Используя (19) и формулу (2), находим

$$\begin{gathered} u[\theta_0(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta) \left(I_{0+}^{\beta,\, 0,\, \beta-1} \tau_2(t) \right)(x) - \\ - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) \left(I_{0+}^{1-\beta,\, 2\beta-1,\, \beta-1} \nu_2(t) \right)(x). \end{gathered} \tag{20}$$

Подставляя (20) в краевое условие (7), опираясь на формулы [2]

$$\begin{aligned} \left(I_{0+}^{\alpha,\,\beta,\,\eta} f\right)(x) &= x^{-\alpha-\beta-\eta}\left(I_{0+}^{\alpha,\,-\alpha-\eta,\,-\alpha-\beta} f\right)(x), \quad \alpha>0,\\ \left(I_{0+}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}\left(I_{0+}^{\gamma,\,\delta,\,\alpha+\eta} f\right)(t)\right)(x) &= \left(I_{0+}^{\alpha+\gamma,\,\beta+\delta,\,\eta} f\right)(x), \quad \gamma>0, \end{aligned} \tag{21}$$

получим

$$\begin{aligned} &C_1\gamma_1\Gamma(\beta)\left(I_{0+}^{a_2+\beta,\,b_2+1-2\beta,\,-\beta-a_2}\tau_2(t)\right)(x)+\\ &+\left[C_2-C_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)\right]\left(I_{0+}^{a_2+1-\beta,\,b_2,\,-\beta-a_2}\nu_2(t)\right)(x)=\psi_2(x). \end{aligned} \tag{22}$$

Подействуем на обе части равенства (22) оператором $I_{0+}^{\beta-1-a_2,\,-b_2,\,1-2\beta}$ и воспользуемся второй формулой из (21). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} &\left[C_2-C_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)\right]\nu_2(x)=\\ &=-C_1\gamma_1\Gamma(\beta)\left(D_{0+}^{1-2\beta}\tau_2\right)(x)+\left(I_{0+}^{\beta-1-a_2,\,-b_2,\,1-2\beta}\psi_2(t)\right)(x). \end{aligned} \tag{23}$$

Лемма 2. Пусть $\psi_2(x)\equiv 0$, $0<\beta<\frac{1}{2}$, C_1 и C_2 — разного знака, а функция $\tau_2(x)$ в точке $x=x_0$ $(0<x_0<1)$ принимает положительный максимум (отрицательный минимум). Тогда $\nu_2(x_0)>0$ $(\nu_2(x_0)<0)$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Итак, доказано, что при $y\to+0$ $\nu_1(x_0)<0$ $(\nu_1(x_0)>0)$, а при $y\to-0$ $\nu_2(x_0)>0$ $(\nu_2(x_0)<0)$.

Теорема 1. Если существует решение задачи (1), то оно единственно.

Доказательство. На основании условия сопряжения (8) и обозначений (13) получаем противоречие, которое и доказывает единственность решения задачи.

3. Существование решения

Действуя на обе части равенств (18) и (23) операторами $I_{1-}^{1-2\beta,\,2\beta-1,\,0}$ и $I_{0+}^{1-2\beta,\,2\beta-1,\,0}$ соответственно и применяя формулы (16) и (21), в результате получим

$$\begin{aligned} \tau_1(x) = &-\frac{B_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)+B_2}{B_1\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(I_{1-}^{1-2\beta,\,2\beta-1,\,0}\nu_1(t)\right)(x)+\\ &+\frac{1}{B_1\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(I_{1-}^{-\beta-a_1,\,-b_1-1+2\beta,\,0}\psi_1(t)\right)(x), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \tau_2(x) = &\frac{C_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)-C_2}{C_1\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(I_{0+}^{1-2\beta,\,2\beta-1,\,0}\nu_2(t)\right)(x)+\\ &+\frac{1}{C_1\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(I_{0+}^{-\beta-a_2,\,-b_2-1+2\beta,\,0}\psi_2(t)\right)(x). \end{aligned} \tag{25}$$

Учитывая условие сопряжения (8), класс решений, в котором мы находим решение задачи, вводя обозначения $\tau(x)=\tau_1(x)=\tau_2(x)$, $\nu(x)=\nu_1(x)=\nu_2(x)$, из (24) и (25) будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{C_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)-C_2}{C_1\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(I_{0+}^{1-2\beta,\,2\beta-1,\,0}\nu(t)\right)(x)+\\ &+\frac{B_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)+B_2}{B_1\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(I_{1-}^{1-2\beta,\,2\beta-1,\,0}\nu(t)\right)(x)=f(x), \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned} f(x) = &\frac{1}{B_1\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(I_{1-}^{-\beta-a_1,\,-b_1-1+2\beta,\,0}\psi_1(t)\right)(x)-\\ &-\frac{1}{C_1\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(I_{0+}^{-\beta-a_2,\,-b_2-1+2\beta,\,0}\psi_2(t)\right)(x). \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$
\begin{gathered}
P_1 = \frac{C_1\gamma_2\Gamma(1-\beta) - C_2}{C_1\gamma_1\Gamma(\beta)}, \quad P_2 = \frac{B_1\gamma_2\Gamma(1-\beta) + B_2}{B_1\gamma_1\Gamma(\beta)}, \\
P_3 = \frac{1}{C_1\gamma_1\Gamma(\beta)}, \quad P_4 = \frac{1}{B_1\gamma_1\Gamma(\beta)},
\end{gathered} \tag{27}
$$

применяя к выражению (26) оператор $I_{0+}^{2\beta-1,\,1-2\beta,\,0}$ и учитывая формулы (4) и (5), получим

$$
P_1\nu(x) + P_2\left(D_{0+}^{1-2\beta} I_{1-}^{1-2\beta}\nu\right)(x) = f_1(x), \tag{28}
$$

где

$$
\begin{gathered}
f_1(x) = P_4\left(I_{0+}^{2\beta-1,\,1-2\beta,\,0}\left(I_{1-}^{-\beta-a_1,\,-b_1-1+2\beta,\,0}\psi_1\right)(t)\right)(x) - \\
-P_3\left(I_{0+}^{2\beta-1,\,1-2\beta,\,0}\left(I_{0+}^{-\beta-a_2,\,-b_2-1+2\beta,\,0}\psi_2\right)(t)\right)(x).
\end{gathered}
$$

Известно [9], что

$$
D_{a+}^{\alpha}\left(I_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \cos(\pi\alpha)\varphi(x) + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int\limits_a^b \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{\varphi(t)dt}{t-x}. \tag{29}
$$

Применяя (29), перепишем (28) в виде особого интегрального уравнения с ядром Коши

$$
P_1\nu(x) - P_2\cos(2\pi\beta)\nu(x) + P_2\frac{\sin(2\pi\beta)}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{\nu(t)dt}{t-x} = f_1(x). \tag{30}
$$

Задача сводится к разрешимости интегрального уравнения (30).

Введем обозначения

$$
\begin{gathered}
x^{1-2\beta}\nu(x) = \varphi(x), \quad a = P_1 - P_2\cos(2\pi\beta), \\
b = P_2\sin(2\pi\beta), \quad f_2(x) = x^{1-2\beta}f_1(x).
\end{gathered} \tag{31}
$$

С учетом (31) уравнение (30) примет вид

$$
a\varphi(x) + \frac{b}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{\varphi(t)dt}{t-x} = f_2(x). \tag{32}
$$

Согласно [4], составим функцию $G(x)$

$$
G(x) = \frac{a(x) - ib(x)}{a(x) + ib(x)} = e^{i\theta(x)}, \quad \theta(x) = \arg G(x).
$$

Для уравнения (31) функция $G(x)$ является постоянной (так как выполняются условия (31) и (27)), а поэтому и $\arg G(x)$ также есть постоянное число.

$$
G(0) = G(1) = \frac{P_1 - P_2\cos(2\pi\beta) - iP_2\sin(2\pi\beta)}{P_1 - P_2\cos(2\pi\beta) + iP_2\sin(2\pi\beta)}. \tag{33}
$$

В силу (33) $0 < \theta(0) < 2\pi$, $0 < \theta(1) < 2\pi$. Тогда индекс уравнения (32) для искомого класса функций

$$
\kappa = \left[\frac{\theta(1)}{2\pi}\right] = 0.
$$

Рассмотрим правую часть интегрального уравнения (32)

$$f_2(x) = x^{1-2\beta} P_4 \left(I_{0+}^{2\beta-1,\, 1-2\beta,\, 0} \left(I_{1-}^{-\beta-a_1,\, -b_1-1+2\beta,\, 0} \psi_1 \right)(t) \right)(x) - \\ -x^{1-2\beta} P_3 \left(I_{0+}^{2\beta-1,\, 1-2\beta,\, 0} \left(I_{0+}^{-\beta-a_2,\, -b_2-1+2\beta,\, 0} \psi_2 \right)(t) \right)(x). \tag{34}$$

Используя определение оператора Римана—Лиувилля и формулы (21), перепишем (34) в виде

$$f_2(x) = x^{1-2\beta} P_4 \left(D_{0+}^{1-\beta} \left(I_{1-}^{-\beta-a_1,\, -b_1-1+2\beta,\, 0} \psi_1 \right)(t) \right)(x) - \\ -x^{1-2\beta} P_3 \left(D_{0+}^{1-\beta} \left(I_{0+}^{1-2\beta} g \right)(t) \right)(x),$$

где

$$g(x) = \left(I_{0+}^{-\beta-a_2,\, -b_2-1+2\beta,\, 0} \psi_2 \right)(x).$$

Нам потребуются некоторые свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования, рассмотренные в работе [10].

Лемма 3. Пусть $0 < -\alpha < \lambda \leqslant 1$ и $\beta < \min[0, \eta + 1]$. Если $\varphi(x) \in \mathrm{H}^{\lambda}[0,1]$, то $\left(I_{0+}^{\alpha,\, \beta,\, \eta} \varphi \right)(x)$, $\left(I_{1-}^{\alpha,\, \beta,\, \eta} \varphi \right)(x) \in \mathrm{H}^{\min[\lambda+\alpha, -\beta]}[0,1]$.

Лемма 4. Пусть $\alpha > 0$, $\beta < \min[0, \eta + 1]$, $0 < \lambda \leqslant 1$ и $\varphi(x) \in \mathrm{H}^{\lambda}[0,1]$. Тогда $\left(I_{0+}^{\alpha,\, \beta,\, \eta} \varphi \right)(x)$, $\left(I_{1-}^{\alpha,\, \beta,\, \eta} \varphi \right)(x) \in \mathrm{H}^{\min[\lambda, -\beta]}[0,1]$.

Лемма 5. Пусть $0 < \alpha < \lambda < 1$, $\lambda - \alpha < 1$ и $\rho(x) = x^{\mu}$, где $0 \leqslant \mu < \lambda - \alpha + 1$. Если $\varphi(x) \in \mathrm{H}_0^{\lambda}(\rho; [0,1])$, то $\left(D_{0+}^{\alpha} \varphi \right)(x) \in \mathrm{H}_0^{\lambda-\alpha}(\rho; [0,1])$.

Теперь, учитывая условия (11), на основании леммы 3 имеем

$$\left(I_{1-}^{-\beta-a_1,\, -b_1-1+2\beta,\, 0} \psi_1 \right)(t) \in \mathrm{H}^{h_1}[0,1], \\ h_1 = \min[\lambda_1 - (a_1 + \beta), b_1 + 1 - 2\beta]. \tag{35}$$

На основании условий (12) и леммы 4

$$\left(I_{0+}^{1-2\beta} g \right)(x) \in \mathrm{H}^{h_2}[0,1], \\ h_2 = \min[\lambda_2, \delta_2 - 2\beta + 1 + b_2]. \tag{36}$$

Используя условия (11), лемму 5 и выражение (35), получим

$$\left(D_{0+}^{1-\beta} \left(I_{1-}^{-\beta-a_1,\, -b_1-1+2\beta,\, 0} \psi_1 \right)(t) \right)(x) \in \mathrm{H}_0^{h_1-(1-2\beta)}(\rho; [0,1]), \\ \rho(x) = x^{\mu_1}. \tag{37}$$

Используя условия (12), лемму 5 и выражение (36), можем заключить, что

$$\left(D_{0+}^{1-\beta} \left(I_{0+}^{1-2\beta} g \right)(t) \right)(x) \in \mathrm{H}_0^{h_2-(1-2\beta)}(\rho; [0,1]), \quad \rho(x) = x^{\beta}. \tag{38}$$

Окончательно, объединяя (37) и (38), имеем

$$f_2(x) \in \mathrm{H}^{h_3}[0,1], \\ h_3 = \min[h_1 - (1-2\beta), h_2 - (1-2\beta)]. \tag{39}$$

Таким образом, уравнение (32), а следовательно и (30), однозначно разрешимо. А в силу того, что разрешимость нашей задачи эквивалентно сведена к вопросу разрешимости уравнения (30), то и исследуемая задача также разрешима.

Поэтому можно утверждать, что имеет место

Теорема 2. Пусть справедливы условия (11)–(12), а правая часть $f_2(x)$ интегрального уравнения (32) удовлетворяет условию (39). Тогда задача для уравнения (1) разрешима [11].

Литература

[1] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука. 2006. 287 с.

[2] Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. V. 11. № 2. P. 135–143.

[3] Saigo M. A certain boundary value problem for the Euler—Poisson—Darboux equation // Math. Japan. 1979. V. 24. № 4. P. 377–385.

[4] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[5] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Галым, 1993. 328 с.

[6] Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я. Краевые задачи для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу: учеб. пособие по спецкурсу "Уравнения математической физики". Куйбышев: Изд-во Куйбышев. гос. пед. ун-та, 1984. 80 с.

[7] Кумыкова С.К. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 1. С. 81–90.

[8] Репин О.А. О разрешимости задачи с краевым условием на характеристиках для вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 110–113.

[9] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.

[10] Saigo M., Kilbas A.A. Generalized fractional integrals and derivatives in Holder spaces // Transform Methods and Special Functions. Sofia 94 (Proceeding of International Workshop). Sci. Cult. Tech. Publ. Singapore, 1995. P. 282–293.

[11] Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 299 с.

Поступила в редакцию 20/V/2010;
в окончательном варианте — 20/V/2010.

ON THE PROBLEM WITH M. SAIGO OPERATORS ON CHARACTERISTICS FOR A DEGENERATIVE HYPERBOLIC EQUATION

© 2010 S.A. Sayganova[2]

A non-local problem in characteristic domain for a degenerative hyperbolic type equation boundary conditions of which contain generalized operators of fractional integrodifferentiation on characteristics is studied. Unique solvability of the problem is then proved.

Key words: Gauss function, fractional integrals and derivatives, boundary-value problem, integral equation, Cauchy kernel.

Paper received 20/ V/2010.
Paper accepted 20/ V/2010.

[2]Sayganova Svetlana Alexandrovna (syomina_sa@mail.ru), the Dept. of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation.