УДК 519.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕКУРСИВНО ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВЕРОЯТНОСТНЫХ НЕРАВЕНСТВ[1]

© 2010 К.Е. Тихомиров[2]

В работе рассматривается метод доказательства вероятностных неравенств, основанный на использовании рекурсивно определяемых функций. В качестве иллюстрации приводится решение одной задачи, естественным образом возникающей в связи с вопросом об усилении неравенства Розенталя.

Ключевые слова: неравенство Розенталя, независимые функции.

Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} = \{f_k\}_{k=1}^n$ — семейство неотрицательных независимых функций на отрезке $[0,1]$. Определим функцию

$$F(t) := \sum_{k=1}^{n} f_k(t-k+1)\chi_{(k-1,k]}(t), \quad t > 0. \tag{1}$$

Далее, через $F^*(t)$ будем обозначать невозрастающую непрерывную слева равноизмеримую с F функцию на вещественной полупрямой. Хорошо известно [1], что для каждого квазинормированного симметричного пространства X на $[0,1]$ выполнено

$$\|F^*\chi_{[0,1]}\|_X + \sum_{k=1}^{n} F^*(k) \leqslant C_X \|\sum_{k=1}^{n} f_k\|_X, \tag{2}$$

где константа C_X не зависит от выбора f_k. Вероятно, впервые это неравенство (для случая $X = L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$) появилось в работе Розенталя [2], и поэтому оно часто называется *неравенством Розенталя.* Впоследствии было опубликовано много работ, посвященных исследованию и обобщению соотношения (2). Так, неравенство

$$\|\sum_{k=1}^{n} F^*(k)e_k\|_E \leqslant D_{X,E}\| \ \|\sum_{k=1}^{n} f_k e_k\|_E \ \|_X, \tag{3}$$

где E — пространство последовательностей, $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — стандартный базис в E, а $D_{X,E}$ — константа, зависящая только от X и E, было доказано в [3] для произвольной последовательности $\mathbf{f} \subset X$ независимых функций и любого $n \in \mathbb{N}$ в

[1]Работа частично поддержана РФФИ, грант № 10–01–00077.

[2]Тихомиров Константин Евгеньевич (ktikhomirov@yandex.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

случае, когда X и E — банаховы симметричные пространства. Отметим, что оригинальное доказательство Монтгомери — Смита принципиально не может быть обобщено на случай квазинормированных X и E. С другой стороны, естественным представляется вопрос, можно ли найти комбинаторную интерпретацию этой задачи и получить таким образом более сильный аналог неравенства (3). Этот вопрос может быть решен положительно; в частности, несложно установить справедливость следующего комбинаторного утверждения: пусть ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ — независимые случайные величины на вероятностном пространстве Ω,

$$\mathbb{P}\{\xi_i = x_j\} = 1/n \ (i, j = 1, 2, \dots, n), \tag{4}$$

где $x_1 > x_2 > \dots > x_n \geqslant 0$. Через $(\xi_i^\sharp(\omega))_{i=1}^n$ будем обозначать невозрастающую перестановку вектора $(\xi_i(\omega))_{i=1}^n$ для каждого $\omega \in \Omega$.

Теорема 1. Существует константа $c_0 > 0$, не зависящая от $n \in \mathbb{N}$ и ξ_i, такая, что

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \, \xi_i^\sharp(\omega) \geqslant x_{2i-1}, \, i = 1, 2, \dots, [n/2]\right\} \geqslant c_0. \tag{5}$$

Заметим, что в соотношении (5) i-й компонент вектора $(\xi_i^\sharp(\omega))_{i=1}^n$ сравнивается не с x_i, но с x_{2i-1}. В этой связи может быть интересно проверить, как изменится оценка, если сравнивать элементы с одинаковыми индексами. Рассмотрим величину

$$P_{n,p} := \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \, \xi_i^\sharp(\omega) \geqslant x_i, \, i = 1, 2, \dots, p\right\}, \tag{6}$$

где $p > 0$ — некоторый параметр. Нами получена нетривиальная верхняя оценка для $P_{n,p}$; метод, используемый при доказательстве, может быть условно назван "методом рекурсивных неравенств". Мы вводим специальную функцию двух переменных $S_{n,p}(x, y)$, определяемую через саму себя (при других значениях аргументов), такую, что $S_{n,p}(n, n) = P_{n,p}$. Далее, мы оцениваем уже функцию $S_{n,p}$, используя при этом принцип математической индукции. Отметим, что полученная оценка, вполне возможно, не является точной; нашей задачей была реализация описанного выше "рекурсивно-индуктивного" подхода на практике. На наш взгляд, этот метод интересен не только с точки зрения чистой математики, но и с точки зрения вычислений, поскольку позволяет найти точное значение $P_{n,p}$ для достаточно больших n.

Обозначения, используемые в тексте:

C_n^j — биномиальные коэффициенты;

$\lceil t \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное t;

$f \sim g$ — величины f и g эквивалентны, то есть существует константа $C \geqslant 1$, такая, что $C^{-1} f \leqslant g \leqslant Cf$.

1. Верхняя оценка для $P_{n,p}$

Разумеется, величину $P_{n,p}$ можно тривиально оценить вероятностью $\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \, \xi_i^\sharp(\omega) \geqslant x_i\right\}$ для любого $1 \leqslant i \leqslant p$. Однако такая оценка ничего интересного не дает. Действительно, пусть S_n — сумма n независимых бернуллиевских случайных величин с вероятностью успеха i/n. Тогда, очевидно,

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \, \xi_i^\sharp(\omega) \geqslant x_i\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{S_n \leqslant i - 1\right\} =$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left\{\frac{S_n - i}{\sqrt{i(n-1)/n}} \leqslant -\frac{1}{\sqrt{i(n-i)/n}}\right\}.$$

Далее, согласно теореме Берри–Эссеена (см. например [4, с. 86]),

$$\left|\mathbb{P}\left\{\frac{S_n-i}{\sqrt{i(n-1)/n}}\leqslant-\frac{1}{\sqrt{i(n-i)/n}}\right\}-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{i(n-i)/n}}\right)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{i(n-i)/n}},$$

где Φ — нормальная функция распределения. Соответственно, при достаточно больших значениях $\frac{i(n-i)}{n}$

$$\mathbb{P}\left\{\omega\in\Omega:\,\xi_i^\sharp(\omega)\geqslant x_i\right\}\sim 1-\Phi(0)=\frac{1}{2}.$$

Важную роль в дальнейшем будет играть следующая функция двух целочисленных переменных x и y с областью определения $1\leqslant x\leqslant n$, $0\leqslant y\leqslant\max(x,n-p)$:

$$S_{n,p}(x,y)=\sum_{k_1,k_2,\dots,k_x}\frac{y!}{\prod_{i=1}^x k_i!}, \tag{7}$$

где суммирование идет по всем неотрицательным $k_1,k_2,\dots,k_x$, удовлетворяющим условиям

$$\sum_{i=1}^{x}k_i=y; \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{i}k_j\geqslant i+y-x,\ i=1,2,\dots,p+x-n. \tag{9}$$

Если $p+x-n\leqslant 0$, то условие (9) считается выполненным для любых k_j.

Лемма 1.1. Для функции $S_{n,p}$ справедливы следующие утверждения:

1. $S_{n,p}(n,n)=n^nP_{n,p}$.
2. $S_{n,p}(1,y)=S_{n,p}(x,0)=1$ для всех допустимых x,y.
3. Если $x>1$, то для любого допустимого y

$$S_{n,p}(x,y)=\sum_{k=m}^{y}C_y^kS_{n,p}(x-1,y-k), \tag{10}$$

где $m=\max(0,1+y-x)$, когда $p+x-n>0$, и $m=0$ в остальных случаях.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что представление (10) корректно в том смысле, что не "нарушает" границы области определения $S_{n,p}$. Это очевидно, когда $y\leqslant\max(x-1,n-p)$. Если же $\max(x-1,n-p)<y\leqslant\max(x,n-p)$, то с необходимостью $x=y$, $x>n-p$, и $m=\max(0,1+y-x)=1$.

1. Пусть $P(k_1,k_2,\dots,k_n)$ — вероятность того, что среди независимых случайных величин ξ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, удовлетворяющих соотношениям (4), k_i штук принимают значение x_i $(i=1,2,\dots,n)$. Если $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ — вектор, у которого первые k_1 координат равны x_1, следующие k_2 равны x_2 и т. д., то, очевидно, $P(k_1,k_2,\dots,k_n)=\mathbb{P}\left\{\xi_i^\sharp(\omega)=\alpha_i,\ i=1,2,\dots,n\right\}$. С другой стороны, подсчет числа выборок дает

$$n^nP(k_1,k_2,\dots,k_n)=\frac{n!}{\prod_{i=1}^n k_i!}.$$

Таким образом,

$$S_{n,p}(n,n)=n^n\sum_{\sum_{j=1}^{i}k_j\geqslant i,\ i\leqslant p}P(k_1,k_2,\dots,k_n)=$$
$$=n^n\sum_{\alpha_i\geqslant x_i,\ i\leqslant p}\mathbb{P}\left\{\xi_i^\sharp(\omega)=\alpha_i,\ i=1,2,\dots,n\right\}=n^nP_{n,p}.$$

2. Очевидно, если $x = 1$, то с необходимостью $k_1 = y$, и, соответственно, $S_{n,p}(1, y) = 1$. Если же $y = 0$, то $k_1 = k_2 = \ldots = k_x = 0$, и $S_{n,p}(x, 0) = 1$.

3. Если вынести суммирование по k_1 из формулы (7), то получим:

$$S_{n,p}(x,y) = \sum_{k_1} \frac{y!}{k_1!(y-k_1)!} \sum_{k_2,k_3,\ldots,k_x} \frac{(y-k_1)!}{\prod\limits_{i=2}^{x} k_i!},$$

где k_1 изменяется от нуля до y, если $p + x - n \leqslant 0$, и от $\max(0, 1 + y - x)$ до y, когда $p + x - n > 0$. Внутреннее суммирование производится по всем $k_2, \ldots, k_x$, удовлетворяющим условиям

$$\sum_{i=2}^{x} k_i = y - k_1;$$

$$\sum_{j=2}^{i} k_j \geqslant i + y - x - k_1,\ i = 2, \ldots, p + x - n.$$

Введем переобозначение: $k'_i := k_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, x - 1$. Вышеприведенные условия можно переписать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{x-1} k'_i = y - k_1;$$

$$\sum_{j=1}^{i} k'_j \geqslant i + y - k_1 - x + 1,\ i = 1, \ldots, p + x - 1 - n.$$

Несложно видеть, что эти ограничения соответствуют определению $S_{n,p}$ для аргументов $x - 1, y - k_1$. Соответственно,

$$S_{n,p}(x,y) = \sum_{k_1} C_y^{k_1} S_{n,p}(x - 1, y - k_1).$$

В частности, для $1 \leqslant x \leqslant n - p$ и $0 \leqslant y \leqslant n - p$ $S_{n,p}(x, y) = x^y$.

Понятно, что функция $S_{n,p}$ более информативна, чем "статичная" величина $P_{n,p}$. В частности, формула (10) позволит использовать математическую индукцию для получения верхней оценки для $S_{n,p}$ и, соответственно, $P_{n,p}$.

Лемма 1.2. Пусть $0 < C_0 \leqslant 1$ — некоторая константа, и $H_{n,p}$ — функция двух целочисленных аргументов x и y, $1 \leqslant x \leqslant n$, $0 \leqslant y \leqslant \max(x, n - p)$, такая, что

1) $H_{n,p}(1, y) = S_{n,p}(1, y),\ 0 \leqslant y \leqslant \max(1, n - p)$;

2) для всех допустимых x и y выполнено

$$H_{n,p}(x,y) \geqslant \min\left(\sum_{k=m}^{y} C_y^k H_{n,p}(x-1, y-k), C_0 x^y\right),$$

где m определяется так же, как в формуле (10).

Тогда для всех допустимых x и y

$$H_{n,p}(x,y) \geqslant C_0 S_{n,p}(x,y). \tag{11}$$

Доказательство. Докажем это утверждение по индукции. Предположим, что для $x - 1$ справедлива формула (11). Тогда

$$H_{n,p}(x,y) \geqslant \min\left(\sum_{k=m}^{y} C_y^k C_0 S_{n,p}(x-1, y-k), C_0 x^y\right) \geqslant$$
$$\geqslant C_0 \min\left(\sum_{k=m}^{y} C_y^k S_{n,p}(x-1, y-k), S_{n,p}(x,y)\right) = C_0 S_{n,p}(x,y).$$

Лемма 1.2 позволит получить верхнюю оценку для $S_{n,p}$ при удачном выборе $H_{n,p}$. Следует обратить внимание на то, что проверка (11), как и вычисление $S_{n,p}$ при конкретных значениях аргументов, не составляет большого труда. Поэтому процесс поиска "методом проб и ошибок" может быть значительно ускорен при написании машинного теста, проверяющего истинность (11) для пробной функции. Функция, которая будет нами использована для получения верхней оценки, найдена с использованием машинного теста. В то же время, несмотря на громоздкое определение, эта функция является вполне естественной. Еще раз подчеркнем, что полученная нами оценка, возможно, не является точной. Цель этой работы — реализовать "рекурсивный подход" на практике.

В следующей лемме собраны некоторые вспомогательные результаты, необходимые для доказательства теоремы.

Лемма 1.3. Пусть $0 < C_0 < 1/2, C_1 \geqslant 4$ — некоторые константы,

$$v(k) = 1 - \frac{1}{\sqrt{C_1 + k}}$$

— функция натурального аргумента,

$$q(k) = \min\{j > 0 : 1 - v(k)^j \geqslant C_0\},\ k \geqslant 0.$$

Справедливы следующие утверждения:

1) $q(k) \leqslant \lceil C_0\sqrt{C_1 + k}/(1 - C_0))\rceil$ для любого $k \geqslant 0$;

2) $q(k+1) \leqslant q(k) + 1$ для любого $k \geqslant 0$;

3) если $k > 0$ и $q(k+1) \geqslant 2$, то

$$\frac{v(k) - v(k-1)}{v(k-1)} \leqslant \frac{2}{C_1 + k - 1}\sqrt{\frac{C_1 + 2}{C_1}}\frac{C_0}{(1 - C_0)q(k+1)}.$$

Доказательство. 1. Несложно видеть, что $v(k)^j \leqslant 1 - C_0$ для всех

$$j \geqslant \lceil \sqrt{C_1 + k}(-\log(1 - C_0))\rceil.$$

Далее, принимая во внимание, что

$$-\log(1 - C_0) = \log\left(1 + \frac{C_0}{1 - C_0}\right) \leqslant \frac{C_0}{1 - C_0},$$

получаем, что $q(k)$ не может быть больше, чем $\lceil C_0\sqrt{C_1 + k}/(1 - C_0))\rceil$.

2. Нам достаточно доказать, что $v(k+1)^{q(k)+1} \leqslant v(k)^{q(k)}$. Так как v возрастает, а $C_0/(1-C_0) < 1$, то с учетом свойства 1 вполне достаточно проверить неравенство $v(k+1)^{\sqrt{C_1+k}+2} \leqslant v(k)^{\sqrt{C_1+k}+1}$. Покажем, что производная функции

$$h(t) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{C_1 + k + t}}\right)^{\sqrt{C_1+k}+1+t}$$

действительного аргумента t, $0 < t \leqslant 1$, отрицательна:

$$h(t)' = h(t)\left(\log\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{C_1+k+t}}\right) + \tfrac{\sqrt{C_1+k}+1+t}{2(C_1+k+t)^{3/2} - 2(C_1+k+t)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant h(t)\left(\log\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{C_1+k+t}}\right) + \tfrac{1}{\sqrt{C_1+k+t}}\right) \leqslant 0.$$

3. Используя свойство 1, получаем

$$\tfrac{v(k)-v(k-1)}{v(k-1)} \leqslant 2(v(k) - v(k-1)) \leqslant \tfrac{1}{(C_1+k-1)^{3/2}} \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{C_1+k-1}\sqrt{\tfrac{C_1+2}{C_1}}\tfrac{1}{\sqrt{C_1+k+1}} \leqslant \tfrac{2}{C_1+k-1}\sqrt{\tfrac{C_1+2}{C_1}}\tfrac{C_0}{(1-C_0)q(k+1)}.$$

Теорема 1.1. Существует абсолютная константа $C > 0$, такая, что для любых $n > 0$ и $0 < p \leqslant n$ выполнено $P_{n,p} \leqslant Cp^{-1/3}$.

Доказательство. Разумеется, мы можем считать, что $n > 1$ и $p \leqslant n/2$. Пусть функции v и q определяются так же, как и в лемме 1.3, причем $C_1 \geqslant 100$, а C_0 таково, что $\frac{1}{\sqrt{C_1+1}} \geqslant C_0$ (отсюда, в частности, следует, что $q(1) = 1$). Для $x > n-p$ и $0 \leqslant y \leqslant x$ положим

$$H_{n,p}(x, y) = x^y \min\left(C_0, 1 - v(k)^{x-y+1}\right), \tag{12}$$

где k подбирается следующим образом: если $l > 0$ таково, что

$$\sum_{j=1}^{l-1} q(j) < x - (n-p) \leqslant \sum_{j=1}^{l} q(j), \tag{13}$$

то мы полагаем $k = l$, когда

$$x - y < x - (n-p) - \sum_{j=1}^{l-1} q(j), \tag{14}$$

и $k = l-1$ в противном случае. Если $x \leqslant n-p$, то будем считать, что $H_{n,p}(x, y) = x^y$.

Приведем несколько менее формальное определение $H_{n,p}(x, y)$. Интервал $[n-p+1, n]$ разбивается на "блоки", так что первый "блок" содержит $q(1)$ элементов (от $n-p+1$ до $n-p+q(1)$ включительно), второй — $q(2)$ элементов и т. д. Предположим, что x принадлежит l-му "блоку". Тогда мы считаем, что $H_{n,p}(x, y)$ вычисляется по формуле (12), где $k = l$ или $k = l-1$, в зависимости от значения разности $x - y$. Если внутри своего "блока" x имеет порядковый номер j, то при $x - y < j$ считаем $k = l$, а при $x - y \geqslant j$ — $k = l-1$.

Нам будет удобно расширить область определения функции $H_{n,p}$, положив $H_{n,p}(x, y) = 0$, когда $x \geqslant n-p$ и $y = x+1$. Как уже было отмечено, первый "блок" содержит лишь один элемент $n-p+1$ и $H_{n,p}(n-p+1, u) = C_0(n-p+1)^u$ для $u \leqslant n-p+1$. Пусть теперь x принадлежит l-му "блоку", $l > 1$. Очевидно, если $x-y+1 \geqslant q(l)$, то $H_{n,p}(x, y) = C_0 x^y$. Далее, если $0 \leqslant x-y+1 < q(l)$, и x не является первым по порядку элементом в своем "блоке" (то есть $1 + \sum\limits_{j=1}^{l-1} q(j) < x - (n-p)$), то

$$H_{n,p}(x-1, y) = (x-1)^y \min\left(C_0, 1 - v(k)^{x-y}\right); \tag{15}$$
$$H_{n,p}(x-1, u) \leqslant (x-1)^u \min\left(C_0, 1 - v(k-1)^{x-u}\right) \tag{16}$$

для любого $u < y$, где k взято из формулы (12) для пары аргументов (x, y). Наконец, если $0 \leqslant x-y+1 < q(l)$ и $x = n-p+1+\sum\limits_{j=1}^{l-1} q(j)$, то, согласно свойству 2 леммы 1.3, $x - y < q(l) - 1 \leqslant q(l-1)$ и $x-1-y < x-1-(n-p) - \sum\limits_{j=1}^{l-2} q(j) - 1$ (ср. с формулой (14)). Соответственно, выполнено (15). Несложно также проверить справедливость соотношения (16).

Нашей задачей является доказательство (11). С учетом леммы 1.2 и определения функции $H_{n,p}$ вполне достаточно доказать, что для $x > n-p+1$ и $0 \leqslant x-y < q(l)-1$

$$H_{n,p}(x,y) \geqslant \min\left(\sum_{j=1}^{y} C_y^j (x-1)^{y-j} \min\left(C_0, 1 - v(k-1)^{x-y+j}\right) + \right.$$
$$\left. + (x-1)^y \min\left(C_0, 1 - v(k)^{x-y}\right), C_0 x^y\right),$$

где k определено для пары аргументов (x, y). В свою очередь, последнее неравенство является следствием соотношения

$$x^y(1 - v(k)^{x-y+1}) \geqslant \sum_{j=1}^{y} C_y^j (x-1)^{y-j}(1 - v(k-1)^{x-y+j}) +$$
$$+(x-1)^y(1 - v(k)^{x-y}) = x^y - v(k-1)^{x-y}(x - 1 + v(k-1))^y +$$
$$+(x-1)^y v(k-1)^{x-y} - (x-1)^y v(k)^{x-y}.$$

После деления на x^y и элементарных преобразований получаем неравенство

$$\frac{v(k)^{x-y}}{v(k-1)^{x-y}} \leqslant 1 + \frac{\left(1 - \frac{1-v(k-1)}{x}\right)^y - v(k)}{v(k) - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^y},$$

эквивалентное предыдущему при условии $v(k) > \left(1 - \frac{1}{x}\right)^y$ (это, очевидно, выполняется с учетом того, что $y \geqslant \frac{x}{2}$). Оценим отдельно левую и правую части неравенства. Поскольку для рассматриваемых аргументов $q(l) \geqslant 2$, то, согласно свойству 3 из леммы 1.3, $\frac{v(k)-v(k-1)}{v(k-1)} < \frac{4C_0}{(C_1+k-1)q(l)}$, то есть

$$\frac{v(k)^{x-y}}{v(k-1)^{x-y}} = \sum_{j=0}^{x-y} C_{x-y}^j \frac{(v(k)-v(k-1))^j}{v(k-1)^j} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{x-y} \frac{(4C_0)^j}{(C_1+k-1)^j} < 1 + \frac{8C_0}{C_1+k-1}.$$

Далее, если потребовать

$$\left(1 - \frac{1 - v(k-1)}{x}\right)^y > v(k), \tag{17}$$

то, учитывая, что $1 - v(k-1) \leqslant \frac{1}{10}$,

$$1 + \frac{\left(1 - \frac{1-v(k-1)}{x}\right)^y - v(k)}{v(k) - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^y} > 1 - v(k) + \left(1 - \frac{1-v(k-1)}{x}\right)^y >$$
$$> 1 - v(k) + 1 - \frac{y}{x}(1 - v(k-1)) + \frac{y^2}{3x^2}(1 - v(k-1))^2 \geqslant$$
$$\geqslant 1 + v(k-1) - v(k) + \frac{1}{3}(1 - v(k-1))^2.$$

Таким образом, остается проверить неравенство

$$\frac{8C_0}{C_1 + k - 1} \leqslant \frac{1}{3}(1 - v(k-1))^2 + v(k-1) - v(k).$$

Несложно видеть, что оно выполняется для достаточно малых C_0. Разумеется, в этом случае также выполнено (17).

Итак, мы доказали, что $H_{n,p}$ удовлетворяет условиям леммы 1.2, и для некоторой константы $C_3 > 0$

$$n^n P_{n,p} = S_{n,p}(n,n) \leqslant C_3 H_{n,p}(n,n) \leqslant \frac{C_3 n^n}{\sqrt{C_1 + m}}, \tag{18}$$

где m — номер "блока" для $x = n$. Ввиду свойства 1 леммы 1.3, $\sqrt{C_1}\sum\limits_{j=1}^{m} j^{1/2} \geqslant$ $\geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \lceil C_0\sqrt{C_1+j}/(1-C_0))\rceil \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} q(j) \geqslant p$, то есть $p \leqslant C_4 m^{3/2}$ для некоторой абсолютной константы C_4. Комбинируя последнюю оценку с (18), мы приходим к утверждению теоремы.

Следствие 1.1. Пусть $0 < C < 1$ — произвольная константа. Тогда $P_{n,[Cn]} \to 0$ при $n \to \infty$.

Литература

[1] Johnson W., Schechtman G. Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces // Ann. Probab. 17 (1989). P. 789–808.

[2] Rosenthal H.P. On the subspaces of L_p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables // Israel J. Math. 8 (1970). P. 273–303.

[3] Montgomery-Smith S. Rearrangement invariant norms of symmetric sequence norms of independent sequences of random variables, Israel J. Math. 131 (2002). P. 51–60.

[4] Ширяев А.Н. Вероятность: в 2 кн. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2004.

Поступила в редакцию 18/*VI*/2010;
в окончательном варианте — 18/*VI*/2010.

THE USAGE OF RECURSIVE FUNCTIONS FOR PROVING PROBABILISTIC INEQUALITIES

 K.E. Tikhomirov[3]

In the paper, the method of proving probabilistic inequalities based on the usage of recursive functions is considered. As an illustration, we give a solution to the problem which naturally arises in connection with Rosenthal's inequality intensification.

Key words: Rosenthal inequality, independent functions.

Paper received 18/ *VI*/2010.
Paper accepted 18/ *VI*/2010.

[3]Tikhomirov Konstantin Evgenievich (ktikhomirov@yandex.ru), the Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.