УДК 517.928.1

# ТЕОРЕМА УСРЕДНЕНИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

© 2010 О.П. Филатов[1]

Доказано, что предел максимального среднего равен сумме пространственного среднего функции и добавки. Добавка зависит от отношения максимальной нормы скорости к минимальной норме. Если максимальная норма совпадает с минимальной, то получается классическая теорема усреднения.

**Ключевые слова:** тор, рационально независимые числа, дифференциальное включение, усреднение, предел максимального среднего.

## 1. Постановка задачи

Для функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ и дифференциального включения

$$\dot y\in G,\quad y(0)=a, \tag{1}$$

где множество $G\subset\mathbb{R}^n$, начальный вектор $a\in\mathbb{R}^n$, $\dot y$ — производная по времени $t\in\mathbb{R}$, предел максимального среднего $M(f)$ определяется соотношением

$$M(f)=\lim_{\tau\to\infty}\sup_{y\in Y}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(y(t))\,dt. \tag{2}$$

Здесь $Y$ — множество всех решений (в смысле Каратеодори) задачи (1), определенных в промежутке $[0,\infty)$. Вычисление подобных пределов связано с построением правых частей усредненных дифференциальных включений для эволюционных задач с быстрыми и медленными переменными [1].

В работах [2; 3] в одномерном случае ($n=1$) для периодической локально интегрируемой по Лебегу функции $f_0$ (для определенности периода $2\pi$) с нулевым средним и множеством допустимых скоростей

$$G=\{v_1,v_2\}\subset\mathbb{R},\quad 0<v_1\leqslant v_2$$

дифференциального включения (1) получена формула для вычисления предела максимального среднего (2) следующего вида:

$$M(f_0)=\sup_{c\geqslant 0}\frac{(k-1)I_c}{2\pi+(k-1)\mu_c},\quad k=\frac{v_2}{v_1}. \tag{3}$$

Здесь $\mu(\cdot)$ — мера Лебега на $\mathbb{R}$,

$$I_c=\int_{K_c}f_0(y)\,dy,\quad K_c=\{y\in[0,2\pi]:f_0(y)\geqslant c\},\qquad \mu_c=\mu(K_c).$$

[1]Филатов Олег Павлович (filatov_oleg@samaradom.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

В [3] приведен и более общий результат для локально интегрируемой по Лебегу функции $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с нулевым средним, который потребуется при доказательстве основной теоремы:

$$M_*(g)=\lim_{\tau\to\infty}\sup_{c\geqslant 0}\frac{(k-1)I_{c,\tau}}{1+(k-1)\mu_{c,\tau}}. \tag{4}$$

Здесь

$$I_{c,\tau}=\frac{1}{\tau}\int_{R_{c,\tau}} g(t)\,dt,\quad R_{c,\tau}=\{t\in[0,\tau]:g(t)\geqslant c\},\quad \mu_{c,\tau}=\frac{\mu(R_{c,\tau})}{\tau}.$$

Оказывается, что в многомерном случае ($n>1$) при определенных условиях можно получить аналог соотношения (3). С этой целью зафиксируем вектор $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\mathbb{R}^n$, число $\alpha\in(0,1]$, начальный вектор $a=(a_1\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ и рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot y\in\{\alpha\omega,\omega\},\quad y(0)=a, \tag{5}$$

определяемое допустимыми скоростями $\alpha\omega$ и $\omega$. Решением задачи (5) называется функция $y:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n, y(0)=a$, абсолютно непрерывная на любом отрезке из промежутка $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, производная которой $\dot y$ почти всюду принадлежит множеству допустимых скоростей.

Рассмотрим функцию $f:K\to\mathbb{R}$ на $n$-мерном кубе $K=[0,2\pi]\times\cdots\times[0,2\pi]$, которая $2\pi$-периодически по каждой координате $y_j$ продолжается на все пространство $\mathbb{R}^n$, $j=1,\ldots,n$. Другими словами, функция $f$ задана на $n$-мерном торе.

Если $\alpha=1$, то единственное решение $y(t)=a+t\omega$ задачи (5) определяет условно-периодическое движение в пространстве $\mathbb{R}^n$. Поэтому в случае $\alpha\in(0,1]$ будем говорить о неопределенном условно-периодическом движении в $\mathbb{R}^n$, которое задается дифференциальным включением (5).

Если координаты вектора $\omega$, называемые частотами, независимы (равенство $k_1\omega_1+\cdots k_n\omega_n=0$ для целочисленных $k_1,\ldots,k_n$ влечет $k_1=\cdots=k_n=0$), функция $f(a+t\omega)$ локально интегрируема по Риману в промежутке $\mathbb{R}_+$, то пространственное среднее функции $f$, определяемое формулой

$$m(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_K f(y)\,dy,$$

совпадает с ее временным средним

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(a+t\omega)\,dt.$$

Этот результат известен как теорема об усреднении для условно-периодических движений на торе. Строгое доказательство теоремы было получено в 1909 году П. Бойлем, В. Серпинским и Г. Вейлем. Доказательство Г. Вейля можно прочитать в книге В.И. Арнольда [4]. В данной работе теорема усреднения обобщается на случай неопределенных условно-периодических движений, при этом среднее значение функции естественно заменяется на предел максимального среднего

$$M(f)=\lim_{\tau\to\infty}\sup_{y\in Y}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(y(t))\,dt,$$

где $Y$ — множество всех решений задачи (5). С другой стороны, для такой задачи (см. п. 2) получается обобщение соотношения (3) на многомерный случай.

## 2. Теорема усреднения

Пусть $\lambda(\cdot), \mu(\cdot)$ — меры Жордана соответственно на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}$, функция $f_0 = f - m(f)$ имеет нулевое пространственное среднее,

$$K_c = \{y \in K : f_0(y) \geqslant c\}, \quad I_c = \int_{K_c} f_0(y)\,dy, \quad \lambda_c = \lambda(K_c).$$

Кроме того, обозначим $k = 1/\alpha$ и введем функцию

$$\varphi(k,c) = \frac{(k-1)I_c}{(2\pi)^n + (k-1)\lambda_c}.$$

Стандартным способом разобьем $n$-мерный куб $K$ на попарно непересекающиеся кубики $K_j, j \in J$, число которых $|J| = l^n, l = 1, 2, \ldots$ . Из множества индексов $J$ выделим подмножества

$$J_{c,1} = \{j \in J : K_j \subset K_c\}, \quad J_{c,2} = \{j \in J : K_j \cap K_c \neq \emptyset\},$$

которые определяют элементарные аппроксимирующие множества для данного жорданова множества $K_c$ соответственно

$$K_{c,1} = \bigcup_{j \in J_{c,1}} K_j \quad \text{и} \quad K_{c,2} = \bigcup_{j \in J_{c,2}} K_j.$$

**Определение 1.** Семейство множеств $\{K_c\}, c \in \mathbb{R}_+$ называется равномерно измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $l_0$, что для любого целого $l \geqslant l_0$ и любого $c \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\lambda(K_{c,2}) - \lambda(K_{c,1}) \leqslant \varepsilon.$$

Заметим, что семейство $\{K_c\}$ равномерно измеримо, если граница любого множества $K_c$ имеет $(n-1)$-мерную жорданову меру, которая не превосходит некоторой общей для всего семейства постоянной. Для $\tau > 0$ введем обозначения

$$R_{j,\tau} = \{t \in [0,\tau] : (a + t\omega) \in K_j \text{ modd } 2\pi\}, \quad r = \max\{1, \sup_{y \in K} |f_0(y)|\},$$

$$R_{j,\tau,c} = \{t \in [0,\tau] : (a + t\omega) \in K_j \cap K_c \text{ modd } 2\pi\}.$$

**Теорема.** Пусть частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ – независимы, $2\pi$-периодическая по каждой координате функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема на $n$-мерном кубе $K$ по Риману, а $f(a + t\omega)$ локально интегрируема на $\mathbb{R}_+$ по Риману, и при любых $c \in \mathbb{R}, \tau > 0$ множества $K_c$, $R_{c,\tau}$ измеримы по Жордану, при этом семейство множеств $\{K_c\}, c \in \in \mathbb{R}_+$ равномерно измеримо. Тогда предел максимального среднего $M(f)$ для задачи (1), (5) вычисляется по формуле

$$M(f) = m(f) + \sup_{c \geqslant 0} \varphi(k,c). \tag{6}$$

**Доказательство.** Функция $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет нулевое пространственное среднее, поэтому по теореме усреднения [4, с. 251–254] пространственное среднее этой функции совпадает с временным средним функции $f_0(a + t\omega)$. Следовательно, функция $g(s) = f_0(a+s\omega)$ имеет нулевое среднее. Так как $M(f) = m(f)+M(f_0)$, то достаточно вычислить предел максимального среднего для функции $f_0$. Заметим, что имеет место соотношение $M(f_0) = M_*(g)$, где предел максимального среднего

$$M_*(g) = \lim_{\tau \to \infty} \sup_{s \in S} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(s(t))\,dt.$$

Здесь $S$ — множество всех решений задачи

$$\dot{s} \in \{\alpha, 1], \quad s(0) = 0,$$

рассматриваемых в промежутке $[0, \infty)$. Следовательно, по формуле (4) получим

$$M(f_0) = M_*(g) = \lim_{\tau\to\infty} \sup_{c \geqslant 0} \frac{(k-1)I_{c,\tau}}{1 + (k-1)\mu_{c,\tau}}. \tag{7}$$

Здесь

$$R_{c,\tau} = \{t \in [0,\tau] : f_0(a + t\omega) \geqslant c\}, \quad I_{c,\tau} = \frac{1}{\tau}\int_{R_{c,\tau}} f_0(a + t\omega)\,dt, \quad \mu_{c,\tau} = \frac{\mu(R_{c,\tau})}{\tau}.$$

Пусть $\chi_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция множества $K_c$. Точную нижнюю грань функции $f_0\chi_c$ на кубике $K_j$ обозначим $\gamma_{c,j}$, а верхнюю – $\Gamma_{c,j}$. Введем ступенчатые функции $\gamma_c$ и $\Gamma_c$, сужения которых на кубик $K_j$ равны соответственно $\gamma_{c,j}$ и $\Gamma_{c,j}$. По построению $\gamma_c \leqslant f_0\chi_c \leqslant \Gamma_c$. Далее, воспользуемся соотношением

$$I_{c,\tau} = \frac{1}{\tau}\sum_{j\in J_{c,2}} \int_{R_{j,\tau,c}} f_0(a + t\omega)\,dt \tag{8}$$

и учтем, что $\mu(R_{j,\tau,c}) = \mu(R_{j,\tau})$, если $K_j \subset K_c$ и $\mu(R_{j,\tau,c}) \leqslant \mu(R_{j,\tau})$ для любого $j$. Следовательно, из (8) получим двухсторонние оценки

$$\sum_{j\in J_{c,1}} \gamma_{c,j}\frac{\mu(R_{j,\tau})}{\tau} \leqslant I_{c,\tau} \leqslant \sum_{j\in J_{c,2}} \Gamma_{c,j}\frac{\mu(R_{j,\tau})}{\tau}. \tag{9}$$

По следствию из теоремы усреднения [4, следствие 2, с. 252] имеем

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\mu(R_{j,\tau})}{\tau} = \frac{\lambda(K_j)}{(2\pi)^n}.$$

Выберем $\tau_1$ так, чтобы для заданного $\varepsilon > 0$ при $\tau \geqslant \tau_1$ и любом $j \in J$ выполнялись неравенства

$$\frac{\lambda(K_j)}{(2\pi)^n} - \frac{\varepsilon}{r|J|} \leqslant \frac{\mu(R_{j,\tau})}{\tau} \leqslant \frac{\lambda(K_j)}{(2\pi)^n} + \frac{\varepsilon}{r|J|}. \tag{10}$$

Из (9), (10) при $\tau \geqslant \tau_1$ и любом $c \geqslant 0$ имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{K_{c,1}} \gamma_c(y)\,dy - \varepsilon \leqslant I_{c,\tau} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{K_{c,2}} \Gamma_c(y)\,dy + \varepsilon.$$

На основании равномерной измеримости семейства множеств $\{K_c\}$ и определения интеграла Римана следует, что при достаточно большом $l$ и любых $\tau \geqslant \tau_1, c \geqslant 0$ выполняются двухсторонние оценки

$$\frac{I_c}{(2\pi)^n} - 2\varepsilon \leqslant I_{c,\tau} \leqslant \frac{I_c}{(2\pi)^n} + 2\varepsilon.$$

Подобным же образом получаются оценки

$$\frac{\lambda_c}{(2\pi)^n} - 2\varepsilon \leqslant \mu_{c,\tau} \leqslant \frac{\lambda_c}{(2\pi)^n} + 2\varepsilon$$

для средней меры множества $\mathbb{R}_{c,\tau}$, которые, можно считать, выполняются при достаточно большом $l$ и любых $\tau \geqslant \tau_1, c \geqslant 0$. Полученные соотношения означают, что равномерно по $c \geqslant 0$ имеют место предельные равенства

$$\lim_{\tau\to\infty} \mu_{c,\tau} = \frac{\lambda_c}{(2\pi)^n}, \quad \lim_{\tau\to\infty} I_{c,\tau} = \frac{I_c}{(2\pi)^n}. \tag{11}$$

Следовательно, сначала можно выполнить предельный переход при $\tau \to \infty$ в равенстве (7) с учетом (11), а затем перейти к вычислению точной верхней границы. В результате получим

$$M(f_0) = \sup_{c \geqslant 0} \varphi(k, c).$$

Так как $M(f) = M(f_0) + m(f)$, то теорема доказана.

Заметим, что при $k = 1$ получается классическая теорема усреднения. Приведем пример для $n = 2$. Введем ступенчатую функцию $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая на отрезке $[0, \pi]$ и в точке $t = 2\pi$ принимает значение 1, в интервале $(\pi, 2\pi)$ — значение $-1$, и $2\pi$-периодически продолжена на $\mathbb{R}$. Тогда определена $2\pi$-периодическая по каждой координате ступенчатая функция $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(y) = g(y_1)g(y_2)$, $y = (y_1, y_2)$, которая имеет нулевое пространственное среднее. Для данной функции (с точностью до множества меры 0) множество $K_c = [0, \pi] \times [0, \pi]$, если $0 \leqslant c \leqslant 1$. При $c > 1$ множество $K_c = \emptyset$. Следовательно, если $0 \leqslant c \leqslant 1$, то мера $\lambda_c = \lambda(K_c) = \pi^2$, интеграл $I_c = \pi^2$. При $c > 1$ имеем $\lambda_c = 0, I_c = 0$. Следовательно, для любого вектора $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ с рационально независимыми координатами, например, $\omega_1 = 1, \omega_2 = \sqrt{2}$, для задачи

$$\dot{y} \in \{\alpha\omega, \omega\}, \quad y(0) = a, \quad M(h) = \lim_{\tau \to \infty} \sup_{y \in Y} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau h(y(t))\, dt$$

по формуле (6) легко вычисляется предел максимального среднего

$$M(h) = \frac{(k-1)\pi^2}{(2\pi)^2 + (k-1)\pi^2} = \frac{(k-1)}{3+k},$$

где, напомним, $k = 1/\alpha \geqslant 1$, начальный вектор $a \in \mathbb{R}^2$— произвольный.

# Литература


[1] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1998. 160 с.

[2] Филатов О.П. Об оценках опорных функций усредненных дифференциальных включений // Математические заметки. 1991. Т. 50. Вып. 3. С. 135–142.

[3] Филатов О.П. Вычисление пределов максимальных средних // Математические заметки. 1996. Т. 59. Вып. 5. С. 759–767.

[4] Арнольд В.И. Математические методы классической механики М.: Наука, 1989. 472 с.



Поступила в редакцию 18/ *VI*/2010;
в окончательном варианте — 18/ *VI*/2010.

# THE THEOREM OF AVERAGING AND INDETERMINATE CONDITIONAL PERIODIC MOTIONS

© 2010 O.P. Filatov[2]

It is proved that the limit of the maximal mean is equal to the sum of the space average of the function and the addition. The addition is the function of the maximal norm of the speed over the minimal norm of the speed. If the maximal norm is equal to the minimal norm we have the classic theorem of averaging.

**Key words:** theorem of averaging, torus, rational independent numbers, differential inclusion, averaging, limit of maximal mean.

Paper received 18/*VI*/2010.
Paper accepted 18/*VI*/2010.

[2]Filatov Oleg Pavlovich (`filatov_oleg@samaradom.ru`), the Dept. of Mathematics and Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.