УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ БЫСТРО-МЕДЛЕННЫХ СИСТЕМ И ЗАТЯГИВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ[1]

© 2010 Е.В. Щетинина[2]

Работа посвящена исследованию быстро-медленных систем, у которых в спектре линейной части быстрой подсистемы есть пара комплексно-сопряженных чисел, пересекающих мнимую ось слева направо при изменении времени. Показано, что если ввести в систему дополнительную функцию, которую можно рассматривать как управление, то получившаяся быстро-медленная система имеет медленное интегральное многообразие со сменой устойчивости.

Ключевые слова: интегральные многообразия, смена устойчивости, затягивание потери устойчивости, разнотемповые системы.

Введение

Быстро-медленные системы обыкновенных дифференциальных уравнений используются для моделирования процессов различной природы. Одним из наиболее эффективных методов исследования разнотемповых систем является метод интегральных многообразий. Основы теории интегральных многообразий были заложены в работах Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского [1]. Под интегральным многообразием здесь понимается гладкая инвариантная поверхность дифференциальной системы. Большой интерес представляют интегральные многообразия меньшей размерности. Интегральные многообразия размерности медленной переменной называются медленными интегральными многообразиями. Их использование позволяет понижать размерность изучаемых моделей и избавляться от вычислительной жесткости. По сути дела производится построение упрощенных моделей изучаемых объектов, но при этом более простые модели с высокой степенью точности отражают поведение исходных моделей. Теория интегральных многообразий применялась для исследования разнотемповых систем в работах различных авторов (см., например [2–4]).

Обычное предположение теории разнотемповых систем состоит в том, что линейная часть быстрой подсистемы удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии. В этом случае существование медленных интегральных многообразий

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-01-00169-а и Государственного контракта № 02.740.11.5048 от 20.07.2009 "Анализ и синтез нелинейных и рассинхронизованных систем".

[2]Щетинина Екатерина Владимировна (`schetinina_k@mail.ru`), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

рассматривалось в работах различных авторов (см., например [1–3]). Однако во многих прикладных задачах это условие нарушается, и возникают критические ситуации. Например, нарушение этого условия может привести к возникновению эффекта затягивания потери устойчивости. Впервые этот эффект был описан в работе М.А. Шишковой [5]. В дальнейшем исследование природы этого эффекта проводилось в работах многих авторов. Следует отметить работы А.И. Нейштадта [6], в которых достаточно подробно описан эффект затягивания потери устойчивости для сингулярно возмущенных систем. Также в них нарушение основного предположения может привести к появлению траекторий-уток [7]. Термин "утка" возник в математической литературе в связи с применением нестандартного анализа к исследованию дифференциальных уравнений. Заметим, что если первоначально термин "утка" употреблялся применительно к предельным циклам уравнений типа уравнения Ван-дер-Поля (так называемые циклы-утки), то позднее речь идет об объектах более общей природы — о траекториях-утках как одномерных устойчиво–неустойчивых медленных интегральных многообразиях [8].

В настоящей работе предполагается, что обычное предположение теории разнотемповых систем нарушается. А именно в спектре матрицы быстрой подсистемы имеется пара комплексно-сопряженных собственных чисел, которые пересекают мнимую ось слева направо, не проходя через ноль. В работе исследуются условия, при которых исследуемая система имеет медленное интегральное многообразие.

1. Интегральные многообразия быстро-медленных систем

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим быстро-медленную систему

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon Y(t, y, z, \varepsilon), \qquad \frac{dz}{dt} = B(t)z + Z(t, y, z, \varepsilon), \tag{1.1}$$

где $y \in \mathbf{R}^n$, $z \in \Omega_z$, $\Omega_z := \{z \in \mathbf{R}^2 : \|z\| \leqslant \Delta\}$, $\Delta > 0$, $\varepsilon \in I_{\varepsilon_0}$, $I_{\varepsilon_0} := \{\varepsilon \in \mathbf{R} : 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \ll 1\}$, $B(t)$ — матрица вида

$$B(t) = \begin{pmatrix} \alpha t & \beta \\ -\beta & \alpha t \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{1.2}$$

Вектор y называется вектором медленных переменных, а вектор z — вектором быстрых переменных.

Полагая $\varepsilon = 0$, мы получаем порождающую систему

$$\frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{dz}{dt} = B(t)z + Z(t, y, z, 0). \tag{1.3}$$

Из (1.3) видно, что $y = y_0 = \mathrm{const}$. В [9] доказано, что если во второе уравнение системы ввести дополнительный вектор параметров, то система

$$\frac{dz}{dt} = B(t)z + Z(t, y_0, z, a, 0) + a,$$

имеет единственное ограниченное на всей оси решение $z = h^*(t)$ при некотором значении параметра $a = a_0$. Это значение параметра называется склеивающим. Ограниченное на всей оси решение является притягивающим при $t < 0$ и отталкивающим при $t > 0$ в следующем смысле. При $t < 0$ произвольное решение, начинающееся в точке $z(t_0) = z_0, t_0 < 0$, достаточно быстро попадает в малую окрестность ограниченного на всей оси решения. Однако при $t > 0$ произвольное решение еще некоторое время проводит в малой окрестности решения $z = h^*(t)$ и достаточно быстро покидает окрестность ограниченного на всей оси решения при $t > |t_0|$. Такое поведение решений похоже на эффект затягивания потери устойчивости для сингулярно возмущенных систем [5; 6].

Очевидно, что склеивающее значение вектора параметров a зависит от выбора y_0. Следовательно, если мы добавим в систему (1.1) дополнительный параметр, то получившаяся система будет иметь одно ограниченное на всей оси решение. Для того чтобы получить множество таких решений, мы должны склеивать решения, ограниченные на каждой из полуосей, для всех y, то есть параметр a должен быть функцией от переменной y. Несложно увидеть близость такого подхода к методу функционализации параметра, разработанного М.А. Красносельским [10].

Таким образом, в дальнейшем мы будем рассматривать систему вида

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon Y(t, y, z, \varepsilon), \qquad \frac{dz}{dt} = B(t)z + Z(t, y, z, a(y, \varepsilon), \varepsilon) + a(y, \varepsilon), \tag{1.4}$$

где $y \in \mathbf{R}^n$, $z \in \Omega_z$, a — функция медленной переменной y и ε, $a \in \Omega_a$, $\Omega_a :=$ $:= \{a : \mathbf{R}^n \times I_{\varepsilon_0} \to \mathbf{R}^2 : \|a\| \leqslant \delta\}$, $\varepsilon \in I_{\varepsilon_0}$, $B(t)$ — матрица вида (1.2). Мы докажем, что при выполнении некоторых условий система (1.4) имеет медленное интегральное многообразие $z = h(t, y, \varepsilon)$.

Относительно функций Y, Z мы предположим

(H_1) Функция Y непрерывна на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \Omega_z \times I_{\varepsilon_0}$ и удовлетворяет неравенствам для всех $t \in \mathbf{R}$, $y, \bar{y} \in \mathbf{R}^n, z, \bar{z} \in \Omega_z$, $\varepsilon \in I_{\varepsilon_0}$

$$\|Y(t, y, z, \varepsilon)\| \leqslant K, \quad \|Y(t, y, z, \varepsilon) - Y(t, \bar{y}, \bar{z}, \varepsilon)\| \leqslant K \left(\|y - \bar{y}\| + \|z - \bar{z}\|\right). \tag{1.5}$$

(H_2) Функция Z непрерывна на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \Omega_z \times \Omega_a \times I_{\varepsilon_0}$ и удовлетворяет неравенствам для всех $t \in \mathbf{R}$, $y, \bar{y} \in \mathbf{R}^n$, $z, \bar{z} \in \Omega_z$, $a, \bar{a} \in \Omega_a$, $\varepsilon \in I_{\varepsilon_0}$

$$\|Z(t, y, z, a, \varepsilon)\| \leqslant L, \tag{1.6}$$

$$\|Z(t, y, z, a, \varepsilon) - Z(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{a}, \varepsilon)\| \leqslant \mu \left(\|y - \bar{y}\| + \|z - \bar{z}\|\right) + \nu\|a - \bar{a}\|. \tag{1.7}$$

Здесь K, M, μ, ν — некоторые положительные числа.

Пусть F обозначает полное метрическое пространство непрерывных функций a, действующих из $\mathbf{R}^n \times I_{\varepsilon_0}$ в Ω_a и удовлетворяющих неравенствам

$$\|a(y, \varepsilon)\| \leqslant M, \quad \|a(y, \varepsilon) - a(\bar{y}, \varepsilon)\| \leqslant \zeta\|y - \bar{y}\|, \tag{1.8}$$

где $M \leqslant \delta$, с метрикой $\rho\,(a, \bar{a}) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n,\, \varepsilon \in I_{\varepsilon_0}} \|a(y, \varepsilon) - \bar{a}(y, \varepsilon)\|$. Через H обозначим полное метрическое пространство непрерывных функций h, действующих из $\mathbf{R} \times$ $\times \mathbf{R}^n \times I_{\varepsilon_0}$ в Ω_z и удовлетворяющих неравенствам

$$\|h(t, y, \varepsilon)\| \leqslant N, \quad \|h(t, y, \varepsilon) - h(t, \bar{y}, \varepsilon)\| \leqslant \xi\|y - \bar{y}\|, \tag{1.9}$$

для всех $t \in \mathbf{R}, y, \bar{y} \in \mathbf{R}^n, \varepsilon \in I_{\varepsilon_0}$, где N, ξ — некоторые положительные числа, такие, что $N \leqslant \Delta$. На пространстве H зададим метрику $\rho(h, \bar{h}) =$ $= \sup_{t \in \mathbf{R},\, y \in \mathbf{R}^n, \varepsilon \in I_{\varepsilon_0}} \|h(t, y, \varepsilon) - \bar{h}(t, y, \varepsilon)\|$.

Функции $y(t, \varepsilon)$, $z(t, \varepsilon) = h(t, y(t, \varepsilon), \varepsilon)$ являются решением (1.4), если они удовлетворяют системе (1.4). Первое уравнение при этом принимает вид

$$\frac{dy}{ds} = \varepsilon Y(s, y, h(s, y, \varepsilon), \varepsilon). \tag{1.10}$$

Из условий (1.5), (1.9) следует

$$\|Y(s,y,h(s,y,\varepsilon),\varepsilon)-Y(s,\bar{y},h(s,\bar{y},\varepsilon),\varepsilon)\|\leqslant K(1+\xi)\|y-\bar{y}\|.$$

Функция Y является ограниченной и удовлетворяет условию Липшица по переменной y для всех $s\in\mathbf{R}$, $y,\bar{y}\in\mathbf{R}^n$. Следовательно, задача Коши для уравнения (1.10) с начальными условиями $y(t)=y_0$ имеет для любого $y_0\in\mathbf{R}^n$ единственное решение, определенное при всех $s\in\mathbf{R}$. Обозначим решение этой задачи Коши через $\Phi_{s,t}(y_0,h,\varepsilon)$.

Функция $z(t,\varepsilon)=h(t,\Phi_{s,t}(y_0,h,\varepsilon),\varepsilon)$ является ограниченным на всей оси решением уравнения

$$\frac{dz}{dt}=B(t)z+Z(t,\Phi_{s,t}(y_0,h,\varepsilon),z,a(\Phi_{s,t}(y_0,h,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)+a(\Phi_{s,t}(y_0,h,\varepsilon),\varepsilon). \qquad (1.11)$$

Из результатов [9] следует, что функция $z(t,\varepsilon)$ удовлетворяет интегральному равенству

$$z(t,\varepsilon)=\begin{cases} -\int\limits_t^{+\infty} e^{\frac{\alpha(t^2-s^2)}{2}}W(t-s)\left[Z(\cdot)+a(\Phi_{s,t}(y_0,h,\varepsilon),\varepsilon)\right]ds, & t\geqslant 0,\\ \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\frac{\alpha(t^2-s^2)}{2}}W(t-s)\left[Z(\cdot)+a(\Phi_{s,t}(y_0,h,\varepsilon),\varepsilon)\right]ds, & t<0,\end{cases}$$

где $Z(\cdot)=Z(s,\Phi_{s,t}(y_0,h,\varepsilon),z,a(\Phi_{s,t}(y_0,h,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)$, а через $W(t-s)$ обозначена матрица

$$W(t-s)=\begin{pmatrix}\cos(t-s) & \sin(t-s)\\ -\sin(t-s) & \cos(t-s)\end{pmatrix}.$$

В верхней строке определения решения $z(t,\varepsilon)$ записано решение, ограниченное при $t\to+\infty$, в нижней строке — решение, ограниченное при $t\to-\infty$ [11]. Вектор a используется для склеивания решений, ограниченных на каждой из полуосей.

Если мы возьмем вместо y_0 произвольную функцию y, то получим, что функция $h(t,y,\varepsilon)$, описывающая медленное интегральное многообразие, удовлетворяет уравнению

$$h(t,y,\varepsilon)=\begin{cases} -\int\limits_t^{+\infty} e^{\frac{\alpha(t^2-s^2)}{2}}W(t-s)\left[Z(\cdot)+a(\,\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon),\varepsilon\,)\right]ds, & t\geqslant 0,\\ \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\frac{\alpha(t^2-s^2)}{2}}W(t-s)\left[Z(\cdot)+a\,(\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon),\varepsilon)\right]ds, & t<0,\end{cases} \qquad (1.12)$$

где $Z(\cdot)=Z(s,\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon),h(t,\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon),\varepsilon),a(\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)$.

С другой стороны, если (1.12) имеет решение $z=h(t,y,\varepsilon)$, удовлетворяющее (1.9), то функция $z=h(t,y,\varepsilon)$ описывает медленное интегральное многообразие системы (1.4). На самом деле для любого $\varepsilon\in I_{\varepsilon_0}$ и любой начальной точки (t_0,y_0,z_0), лежащей на медленном интегральном многообразии ($z_0=h(t_0,y_0,\varepsilon)$), уравнение (1.10) имеет решение $y(t,\varepsilon)=\Phi_{t,t_0}(y_0,h,\varepsilon)$. Из (1.12) следует, что $z==h(t,\Phi_{t,t_0}(y_0,h,\varepsilon),\varepsilon)$ является решением (1.11).

Определим на пространстве H оператор T следующим образом:

$$(Th)(t,y,\varepsilon)=\begin{cases} -\int\limits_t^{+\infty} e^{\frac{\alpha(t^2-s^2)}{2}}W(t-s)\left[Z(\cdot)+a(\,\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon),\varepsilon\,)\right]ds, & t\geqslant 0,\\ \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\frac{\alpha(t^2-s^2)}{2}}W(t-s)\left[Z(\cdot)+a\,(\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon),\varepsilon)\right]ds, & t<0,\end{cases} \qquad (1.13)$$

где $Z(\cdot)=Z\left(s,\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon),h(s,\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon),\varepsilon),a(\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon\right)$.

Здесь в верхней строке записан оператор, используемый для доказательства существования интегрального многообразия, ограниченного при $t \to +\infty$, в нижней строке — оператор, используемый для доказательства существования интегрального многообразия, ограниченного при $t \to -\infty$. Функция $a(y,\varepsilon)$ служит для склеивания интегральных многообразий.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1.1. Пусть функции Y, Z в правой части (1.4) удовлетворяют условиям (H_1), (H_2). Тогда существует значение $\varepsilon^* \in I_{\varepsilon_0}$ и числа L, N, ζ, ξ, такие, что для всех ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, существует функция $a \in F$ и соответствующее ей медленное интегральное многообразие $z = h(t, y, \varepsilon)$, $h \in \ H$.

1.2. Доказательство теоремы 1.1

1.2.1. Вспомогательные неравенства

Лемма 1.1. Пусть функция Y удовлетворяет условиям (H_1). Тогда при $h, \bar{h} \in \in H$ справедливы следующие неравенства:

$$\|\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon) - \Phi_{s,t}(\bar{y},h,\varepsilon)\| \leqslant \|y-\bar{y}\| e^{\varepsilon K(1+\xi)|s-t|},$$

$$\|\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon) - \Phi_{s,t}(y,\bar{h},\varepsilon)\| \leqslant \frac{1}{1+\xi}\rho(h,\bar{h})\left(e^{\varepsilon K(1+\xi)|s-t|}-1\right).$$

Доказательство. Из (1.10) следуют равенства

$$\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon) = y + \varepsilon \int_t^s Y(\eta, \Phi_{\eta,t}(y,h,\varepsilon), h(\eta, \Phi_{\eta,t}(y,h,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)d\eta, \tag{1.14}$$

$$\Phi_{s,t}(\bar{y},h,\varepsilon) = \bar{y} + \varepsilon \int_t^s Y(\eta, \Phi_{\eta,t}(\bar{y},h,\varepsilon), h(\eta, \Phi_{\eta,t}(\bar{y},h,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)d\eta, \tag{1.15}$$

$$\Phi_{s,t}(y,\bar{h},\varepsilon) = y + \varepsilon \int_t^s Y(\eta, \Phi_{\eta,t}(y,\bar{h},\varepsilon), \bar{h}(\eta, \Phi_{\eta,t}(y,\bar{h},\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)d\eta. \tag{1.16}$$

Используя (1.14), (1.15) и неравенства (1.5), (1.9), при $s \geqslant t$ мы имеем

$$\|\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon) - \Phi_{s,t}(\bar{y},h,\varepsilon)\| \leqslant \|y-\bar{y}\| + \int_t^s \varepsilon K(1+\xi)\|\Phi_{\eta,t}(y,h,\varepsilon) - \Phi_{\eta,t}(\bar{y},h,\varepsilon)\|d\eta.$$

Используя неравенство Гронуолла — Беллмана, получаем

$$\|\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon) - \Phi_{s,t}(\bar{y},h,\varepsilon)\| \leqslant \|y-\bar{y}\| e^{\varepsilon K(1+\xi)(s-t)}, \quad s \geqslant t. \tag{1.17}$$

Используя (1.14), (1.16) и неравенства (1.5), (1.9), для разности $\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon) - - \Phi_{s,t}(y,\bar{h},\varepsilon)$ имеем следующую оценку:

$$\|\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon) - \Phi_{s,t}(y,\bar{h},\varepsilon)\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_t^s \varepsilon K\Big((1+\xi)\|\Phi_{\eta,t}(y,h,\varepsilon) - \Phi_{\eta,t}(y,\bar{h},\varepsilon)\| + \rho(h,\bar{h})\Big)d\eta.$$

Используя неравенство Гронуолла — Беллмана, имеем

$$\|\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon) - \Phi_{s,t}(y,\bar{h},\varepsilon)\| \leqslant \frac{\rho(h,\bar{h})}{1+\xi}\left(e^{\varepsilon K(1+\xi)(s-t)}-1\right),\ s \geqslant t. \tag{1.18}$$

Аналогично при $s \leqslant t$ получаем

$$\|\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon) - \Phi_{s,t}(\bar{y},h,\varepsilon)\| \leqslant \|y-\bar{y}\| e^{\varepsilon K(1+\xi)(t-s)},$$

$$\|\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon)-\Phi_{s,t}(y,\bar h,\varepsilon)\|\leqslant\frac{1}{1+\xi}\rho(h,\bar h)\left(e^{\varepsilon K(1+\xi)(t-s)}-1\right).$$

Из последних неравенств и (1.17), (1.18) следует утверждение леммы 1.1.

В дальнейшем мы будем пользоваться интегралом вероятностей

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx.$$

В следующей лемме мы получим некоторые оценки для него.

Лемма 1.2. При $0\leqslant x\leqslant\frac12$ справедливо следующее неравенство:

$$e^{x^2}\operatorname{erf}(x)\leqslant 1.$$

Доказательство. При $x<1$ интеграл вероятностей может быть аппроксимирован следующим образом [12]:

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{x^2}x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x^2)^n}{(2n+1)!!}. \tag{1.19}$$

Так как по условию $0\leqslant x\leqslant\frac12$, получаем

$$\frac{(2x^2)^n}{(2n+1)!!}\leqslant\frac{1}{2^n(2n+1)!!}\leqslant\frac{1}{2^n3^n}.$$

Следовательно, ряд в (1.19) может быть оценен сверху геометрической прогрессией $\sum_{n=0}^{\infty}1/6^n$, сумму которой можно вычислить: $\sum_{n=0}^{\infty}1/6^n=6/5$. Значит,

$$e^{x^2}\operatorname{erf}(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x^2)^n}{(2n+1)!!}\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6^n}=\frac{6}{5\sqrt{\pi}}<1,$$

что и требовалось доказать.

1.2.2. Непрерывность Th при $t=0$

Легко показать, что функция Th непрерывна при $t<0$ и $t>0$ для любой функции $h\in H$. Из определения оператора T (1.13) следует, что непрерывность Th при $t=0$ эквивалентна равенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-\alpha s^2}{2}}W^{-1}(s)\left[Z(\cdot)+a(\Phi_{s,0}(y,h,\varepsilon),\varepsilon)\right]ds\;=\;0. \tag{1.20}$$

Здесь $Z(\cdot)=Z\left(s,\Phi_{s,0}(y,h,\varepsilon),h(s,\Phi_{s,0}(y,h,\varepsilon),\varepsilon),a(\Phi_{s,0}(y,h,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon\right)$. Это равенство будем рассматривать как уравнение для нахождения функции $a(y,\varepsilon)$.

Перепишем уравнение (1.20) в виде

$$Aa(y,\varepsilon)=Qa(y,\varepsilon),$$

где операторы A и Q определены следующим образом:

$$Aa(y,\varepsilon):=\frac{\sqrt{\alpha}e^{\beta^2/2\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-\alpha s^2}{2}}W^{-1}(s)a(\Phi_{s,0}(y,h,\varepsilon),\varepsilon)\,ds,$$

$$Qa(y,\varepsilon):=-\frac{\sqrt{\alpha}e^{\beta^2/2\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-\alpha s^2}{2}}W^{-1}(s)Z(\cdot)\,ds.$$

Удобно представить оператор A в виде суммы $A = I + R$, где I — тождественный оператор, а R определяется равенством

$$Ra(y,\varepsilon) := \frac{\sqrt{\alpha}e^{\beta^2/2\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\alpha s^2}{2}} W^{-1}(s)[a(\Phi_{s,0}(y,h,\varepsilon),\varepsilon) - a(y,\varepsilon)]ds.$$

Из неравенств (1.5), (1.8) следует оценка

$$\|Ra(y,\varepsilon)\| \leqslant \frac{\sqrt{\alpha}e^{\beta^2/2\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\alpha s^2}{2}} \| \; a(\Phi_{s,0}(y,h,\varepsilon),\varepsilon) - a(y,\varepsilon)\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon\sqrt{\alpha}e^{\beta^2/2\alpha}\zeta K}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-\alpha s^2}{2}} s ds = \frac{\varepsilon\sqrt{2}e^{\beta^2/2\alpha}\zeta K}{\sqrt{\alpha\pi}}.$$

При $\frac{\varepsilon\sqrt{2}e^{\beta^2/2\alpha}\zeta K}{\sqrt{\alpha\pi}} < 1$ существует линейный оператор $(I+R)^{-1}$, для которого справедливо следующее неравенство:

$$\|(I+R)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon\sqrt{2}e^{\beta^2/2\alpha}\zeta K/\sqrt{\alpha\pi}}. \tag{1.21}$$

Определим на пространстве F оператор P равенством

$$Pa := (I+R)^{-1}Qa. \tag{1.22}$$

Покажем, что оператор P переводит пространство F в себя и является сжимающим. Для этого получим сначала некоторые оценки для оператора Q. Из (1.6) следует

$$\|Qa(y,\varepsilon)\| \leqslant \frac{\sqrt{\alpha}e^{\beta^2/2\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\alpha s^2}{2}} \|Z(\cdot)\| ds \leqslant e^{\beta^2/2\alpha}L.$$

Используя последнее неравенство и (1.21), получаем

$$\|Pa(y,\varepsilon)\| \leqslant \frac{Le^{\beta^2/2\alpha}}{1 - \varepsilon\sqrt{2}e^{\beta^2/2\alpha}\zeta K/\sqrt{\alpha\pi}}.$$

При условии

$$\frac{\varepsilon\sqrt{2}\zeta K e^{\beta^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha\pi}} \leqslant \frac{1}{2} \tag{1.23}$$

справедливо неравенство

$$\|Pa(y,\varepsilon)\| \leqslant 2Le^{\beta^2/2\alpha}.$$

Далее, согласно лемме 1.1 и неравенству (1.7), имеем

$$\|Qa(y,\varepsilon) - Qa(\bar{y},\varepsilon)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sqrt{\alpha}e^{\beta^2/2\alpha}(\mu(1+\xi)+\nu\zeta)}{\sqrt{2\pi}} \|y-\bar{y}\| \int_0^{+\infty} e^{\frac{-\alpha s^2}{2}} e^{\varepsilon K(1+\xi)s} ds.$$

Используя интеграл вероятностей $\operatorname{erf}(\lambda)$, оценим последний интеграл.

$$\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{-\alpha s^2}{2}} e^{\varepsilon K(1+\xi)s} ds = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{\lambda^2 - (\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}}s - \lambda)^2} ds =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\lambda}^{+\infty} e^{\lambda^2 - s_1^2} ds_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[2\int_0^{|\lambda|} e^{\lambda^2 - s_1^2} ds_1 + \int_{|\lambda|}^{+\infty} e^{\lambda^2 - s_1^2} ds_1 \right] \leqslant$$

$$\leqslant 1 + 2e^{\lambda^2}\operatorname{erf}(\lambda),$$

где $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\varepsilon K(1+\xi)$. Если $\lambda \leqslant 1/2$ или $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}}\varepsilon K(1+\xi) \leqslant 1$, то из леммы 1.2 следует $e^{\lambda^2}\mathrm{erf}(|\lambda|) \leqslant 1$. Значит,

$$\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{-\alpha s^2}{2}} e^{\varepsilon K(1+\xi)s} ds \leqslant 3.$$

Таким образом, мы получаем

$$\|Qa(y,\varepsilon) - Qa(\bar{y},\varepsilon)\| \leqslant 3e^{\beta^2/2\alpha}(\mu(1+\xi)+\nu\zeta)\|y-\bar{y}\|.$$

Тогда для оператора P получаем оценку

$$\|Pa(y,\varepsilon) - Pa(\bar{y},\varepsilon)\| \leqslant \frac{3e^{\beta^2/2\alpha}(\mu(1+\xi)+\nu\zeta)}{1-\varepsilon\sqrt{2}e^{\beta^2/2\alpha}\zeta K/\sqrt{\alpha\pi}}\|y-\bar{y}\| \leqslant$$

$$\leqslant 6e^{\beta^2/2\alpha}(\mu(1+\xi)+\nu\zeta)\|y-\bar{y}\|.$$

Следовательно, если справедливо неравенство (1.23) и неравенства

$$2Le^{\beta^2/2\alpha} \leqslant M, \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}}\varepsilon K(1+\xi) \leqslant 1, \qquad \frac{6e^{\beta^2/2\alpha}\mu(1+\xi)}{1-6e^{\beta^2/2\alpha}\nu} \leqslant \zeta, \tag{1.24}$$

то оператор P действует в F.

Найдем условия, гарантирующие, что P — сжимающий оператор. В начале оценим разность $\|Qa - Q\bar{a}\|$. Из неравенства (1.8) следует

$$\|Qa(y,\varepsilon) - Q\bar{a}(y,\varepsilon)\| \leqslant \frac{\sqrt{\alpha}e^{\beta^2/2\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\alpha s^2}{2}} \nu\rho(a,\bar{a})ds = \nu e^{\beta^2/2\alpha}\rho(a,\bar{a}).$$

Следовательно, из (1.21)–(1.23) мы получаем

$$\|Pa(y,\varepsilon) - P\bar{a}(y,\varepsilon)\| \leqslant \frac{\nu e^{\beta^2/2\alpha}}{1-\varepsilon\sqrt{2}e^{\beta^2/2\alpha}\zeta K/\sqrt{\alpha\pi}}\rho(a,\bar{a}) \leqslant 2\nu e^{\beta^2/2\alpha}\rho(a,\bar{a}).$$

Если справедливо неравенство $2\nu e^{\beta^2/2\alpha} < 1$, то P — сжимающий оператор в F. Следовательно, уравнение $a = Pa$, которое эквивалентно (1.20), имеет единственное решение в F. Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма 1.3. Предположим, что функции Y, Z в правой части (1.4) удовлетворяют условиям (H_1), (H_2). Тогда существуют $\varepsilon^* \in I_{\varepsilon_0}$ и такие числа L, ζ, ν, что для всех ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$ и для любой функции $h \in H$ существует единственная функция $a \in F$, гарантирующая, что функция Th, определенная формулой (1.13), непрерывна.

Получим одно вспомогательное неравенство. Пусть a — решение (1.20), соответствующее функции $h \in H$, $\bar{a}$ — решение (1.20), соответствующее $\bar{h} \in H$. Тогда мы имеем

$$Aa = Qa \qquad \text{или} \qquad (I+R)a = Qa,$$
$$\bar{A}\bar{a} = \bar{Q}\bar{a} \qquad \text{или} \qquad (I+\bar{R})\bar{a} = \bar{Q}\bar{a},$$

где

$$\bar{R}\bar{a}(y,\varepsilon) := \frac{\sqrt{\alpha}e^{\beta^2/2\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\alpha s^2}{2}} W^{-1}(s)[\bar{a}(\Phi_{s,0}(y,\bar{h},\varepsilon),\varepsilon) - \bar{a}(y,\varepsilon)]ds,$$

$$\bar{Q}\bar{a}(y,\varepsilon) := -\frac{\sqrt{\alpha}e^{\beta^2/2\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\alpha s^2}{2}} W^{-1}(s)Z(\cdot)ds.$$

Здесь $Z(\cdot) = Z(s, \Phi_{s,0}(y,\bar{h},\varepsilon), \bar{h}(s,\Phi_{s,0}(y,\bar{h},\varepsilon),\varepsilon), \bar{a}(\Phi_{s,0}(y,\bar{h},\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)$.

После элементарных преобразований мы получаем

$$a - \bar{a} = (I + R)^{-1}[Qa - \bar{Q}\bar{a} + (\bar{R} - R)\bar{a}]. \tag{1.25}$$

Оценим сначала выражение в квадратных скобках. Из неравенств (1.8), (1.9) и леммы 1.1 следует

$$\|Qa(y,\varepsilon) - \bar{Q}\bar{a}(y,\varepsilon)\| \leqslant e^{\beta^2/2\alpha}\left(\nu\rho(a,\bar{a}) + \frac{4\mu(1+\xi)+3\nu\zeta}{1+\xi}\rho(h,\bar{h})\right),$$

и

$$\|(\bar{R} - R)\bar{a}\| \leqslant \frac{\sqrt{\alpha}e^{\beta^2/2\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\alpha s^2}{2}}\|\bar{a}(\Phi_{s,0}(y,\bar{h},\varepsilon),\varepsilon) - \bar{a}(\Phi_{s,0}(y,h,\varepsilon),\varepsilon)\|ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sqrt{\alpha}e^{\beta^2/2\alpha}\zeta}{\sqrt{2\pi}(1+\xi)}\int_0^{+\infty} e^{\frac{-\alpha s^2}{2}}(e^{\varepsilon K(1+\xi)s} - 1)\rho(h,\bar{h})ds \leqslant \frac{3e^{\beta^2/2\alpha}\zeta}{1+\xi}\rho(h,\bar{h}).$$

Из (1.21), (1.25) получаем

$$\|a(y,\varepsilon) - \bar{a}(y,\varepsilon)\| \leqslant \frac{e^{\beta^2/2\alpha}}{1 - \varepsilon\sqrt{2}e^{\beta^2/2\alpha}\zeta K/\sqrt{\alpha\pi}}\left[\nu\rho(a,\bar{a}) + \right.$$

$$\left. + \frac{4\mu(1+\xi)+3\zeta(1+\nu)}{1+\xi}\rho(h,\bar{h})\right].$$

Из этого неравенства и условия (1.23) следует следующая лемма.

Лемма 1.4. Предположим, что справедливы условия леммы 1.3 и выполняется условие (1.23). Тогда справедлива следующая оценка:

$$\rho(a,\bar{a}) \leqslant \frac{2e^{\beta^2/2\alpha}}{1 - 2e^{\beta^2/2\alpha}\nu}\frac{4\mu(1+\xi)+3\zeta(1+\nu)}{1+\xi}\rho(h,\bar{h}).$$

1.2.3. Существование медленного интегрального многообразия

Найдем условия, гарантирующие существование медленного интегрального многообразия для системы (1.4). Покажем, что $Th(t,y,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (1.9). При $t \geqslant 0$ имеем

$$\|Th(t,y,\varepsilon)\| \leqslant \int_t^{+\infty} e^{\frac{\alpha(t^2-s^2)}{2}}\left[\|Z(\cdot)\| + \|a(\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon),\varepsilon)\|\right]ds \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}}(L+M).$$

Эта же оценка справедлива при $t \leqslant 0$. Следовательно, функция Th равномерно ограничена для всех $t \in \mathbf{R}$.

Оценим норму разности $\|Th(t,y,\varepsilon) - Th(t,\bar{y},\varepsilon)\|$.

$$\|Th(t,y,\varepsilon) - Th(t,\bar{y},\varepsilon)\| \leqslant$$

$$\leqslant (\mu(1+\xi) + \zeta(\nu+1))\int_t^{+\infty} e^{\frac{\alpha(t^2-s^2)}{2}}\|\Phi_{s,t}(y,h,\varepsilon) - \Phi_{s,t}(\bar{y},h,\varepsilon)\|ds \leqslant$$

$$\leqslant (\mu(1+\xi) + \zeta(\nu+1))\int_t^{+\infty} e^{\frac{\alpha(t^2-s^2)}{2}}e^{\varepsilon K(1+\xi)(s-t)}\|y - \bar{y}\|ds.$$

Используя интеграл вероятностей $\mathrm{erf}(\lambda)$ и лемму 1.2, оценим последний интеграл

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}}\int_t^{+\infty} e^{\frac{\alpha(t^2-s^2)}{2}}e^{\varepsilon\mu(1+\varepsilon\xi)(s-t)}ds = \int_{t_1-\lambda}^{+\infty} e^{(t_1-\lambda)^2-(s_1-\lambda)^2}d(s_1-\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^{|t_1-\lambda|} e^{(t_1-\lambda)^2-(s_1-\lambda)^2} d(s_1-\lambda) + \int_{|t_1-\lambda|}^{+\infty} e^{(t_1-\lambda)^2-(s_1-\lambda)^2} d(s_1-\lambda) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sqrt{\pi} e^{(t_1-\lambda)^2} \operatorname{erf}(|t_1-\lambda|) < \frac{3\sqrt{\pi}}{2},$$

где $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\varepsilon K(1+\xi)$. Последнее неравенство справедливо, если мы выберем ε достаточно малым, так что $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$.

Следовательно, при $t \geqslant 0$ имеем

$$\|Th(t,y,\varepsilon) - Th(t,\bar{y},\varepsilon)\| < \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}}(\mu(1+\xi) + \zeta(\nu+1))\|y-\bar{y}\|.$$

Эта же оценка справедлива при $t \leqslant 0$.

Выберем N, ξ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}}(L+M) \leqslant N, \qquad \frac{3\sqrt{\pi}(\mu + \zeta(1+\nu))}{\sqrt{2\alpha} - 3\sqrt{\pi}\mu} \leqslant \xi.$$

Следовательно, оператор T переводит пространство H в себя.

Покажем, что оператор T является сжимающим в пространстве H

$$\|Th(t,y,\varepsilon) - T\bar{h}(t,y,\varepsilon)\| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}}\left(\mu\rho(h,\bar{h}) + (\nu+1)\rho(a,\bar{a})\right) +$$

$$+ \frac{\mu(1+\xi) + \zeta(1+\nu)}{1+\xi}\rho(h,\bar{h}) \int_t^{+\infty} e^{\frac{\alpha(t^2-s^2)}{2}} \left(e^{\varepsilon K(1+\xi)(s-t)} - 1\right) ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}} \frac{4\mu(1+\xi) + 3\zeta(1+\nu)}{(1-2e^{\beta^2/2\alpha}\nu)(1+\xi)}\rho(h,\bar{h}).$$

Если μ, ν, ξ, ζ таковы, что справедливо неравенство

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}} \frac{4\mu(1+\xi) + 3\zeta(1+\nu)}{(1-2e^{\beta^2/2\alpha}\nu)(1+\xi)} < 1,$$

то оператор T является сжимающим в пространстве H. Тогда в силу теоремы Банаха о сжимающих отображениях оператор T имеет единственную неподвижную точку в пространстве H.

При исследовании свойств операторов T и P были найдены в виде нескольких неравенств достаточные условия, обеспечивающие существование единственной неподвижной точки каждого из этих операторов в соответствующем пространстве в силу принципа сжатия. Нетрудно убедиться в том, что эти неравенства совместны как система неравенств относительно M, N, ζ и ξ при достаточно малых μ, ν, ε. Отсюда следует, что при этих значениях параметров рассматриваемая дифференциальная система (1.4) имеет интегральное многообразие вида $z = h(t,y,\varepsilon)$, где h — неподвижная точка оператора T. Это интегральное многообразие является глобальным, так как определено при всех t и y. На случай локальных многообразий этот результат переносится обычным образом [2; 3].

Таким образом, мы доказали теорему 1.1.

Замечание 1.1. Теорему 1.1 можно обобщить на случай, когда $B(t)$ имеет вид

$$B(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t)\,t & \beta(t) \\ -\beta(t) & \alpha(t)\,t \end{pmatrix},$$

где $\alpha(t), \beta(t)$ — функции, непрерывные при $t \in \mathbf{R}$ и удовлетворяющие условиям

$$0 < \alpha_1 \leqslant \alpha(t) \leqslant \alpha_2 < +\infty, \quad 0 < \beta_1 \leqslant \beta(t) \leqslant \beta_2 < +\infty.$$

Замечание 1.2. Если функции $Y(t,y,z,\varepsilon)$ и $Z(t,y,z,a,\varepsilon)$ в правой части системы (1.4) имеют непрерывные и ограниченные частные производные по переменным y,z,a,ε до порядка $(k+1)$, то медленное интегральное многообразие $z = h(t,y,\varepsilon)$ и склеивающую функцию $a(y,\varepsilon)$ можно представить в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра

$$h(t,y,\varepsilon) = \sum_{i\geqslant 0}^{k} \varepsilon^i h_i(t,y) + r_h(t,y,\varepsilon), \quad a(y,\varepsilon) = \sum_{i\geqslant 0}^{k} \varepsilon^i a_i(y) + r_a(y,\varepsilon),$$

где h_i и a_i — непрерывные и ограниченные функции, а $r_h = O(\varepsilon^{k+1}), r_u = O(\varepsilon^{k+1})$. Коэффициенты $h_i(t,y)$ в этом разложении определяются обычным образом, а коэффициенты $a_i(y)$ на каждом шаге определяются из условия непрерывности функции $h_i(t,y)$ при $t=0$. Для обоснования асимптотического характера разложения система приводится в окрестности k-го приближения медленного интегрального многообразия к виду (1.4), где функция Z удовлетворяет неравенству

$$\|Z(t,y,u,v,\varepsilon)\| \leqslant M_1 \left(\varepsilon\|u\| + \varepsilon\|v\| + \|u\|^2 + \varepsilon^{k+1}\right).$$

В этом случае при определении пространств F и H вместо (1.8), (1.9) следует использовать неравенства

$$\|h(t,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{k+1} q, \qquad \|a(t,y,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{k+1} p.$$

Замечание 1.3. Если функции $Y(t,y,z,\varepsilon)$ и $Z(t,y,z,a,\varepsilon)$ в правой части системы (1.4) имеют непрерывные и ограниченные частные производные по переменным y,z,a до порядка k, то медленное интегральное многообразие $z = h(t,y,\varepsilon)$ и склеивающая функция $a(y,\varepsilon)$ имеют непрерывные и ограниченные частные производные по компонентам вектора y до порядка k. Доказательство этого факта проходит с помощью метода математической индукции и принципа обобщенного сжатия А.И. Перова [13].

Получившееся медленное интегральное многообразие является притягивающим при $t<0$ и отталкивающим при $t>0$ в следующем смысле. Решения (1.4), не лежащие на многообразии и начинающиеся в момент времени $t_0<0$, достаточно быстро попадают в малую окрестность медленного интегрального многообразия и находятся в ней до момента $t^*>0$. При $t>|\ t_0|$ решения срываются с медленного интегрального многообразия. Доказательство этого факта аналогично тому, как это было сделано для ограниченных на всей оси решений в [9]. Таким образом, для решений, не лежащих на многообразии, наблюдается эффект, близкий к эффекту затягивания потери устойчивости для сингулярно возмущенных систем [5; 6]. Отметим, что чем больше времени система проводит около притягивающего участка медленного интегрального многообразия, тем позднее произойдет срыв с него.

1.2.4. Примеры

Пример 1.1. Рассмотрим систему (1.4) при условиях, что $y \in \mathbf{R}^n$, $\alpha=\beta=1$, и функция Z задана равенством

$$Z(t,y,z,a(y,\varepsilon),\varepsilon) = Z(t,\varepsilon) = (\varepsilon\cos t,\ 0)^T.$$

Функция Z удовлетворяет предположениям (H_2). Следовательно, по теореме 1.1 существует единственная функция $a(y,\varepsilon)$, при которой исследуемая система имеет медленное интегральное многообразие.

Используя (1.20), имеем следующее уравнение для функции $a(y,\varepsilon)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-s^2}{2}} W^{-1}(s) a(y,\varepsilon) ds = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-s^2}{2}} W^{-1}(s) Z(s,\varepsilon) ds.$$

Вычисляя значение интеграла в правой части, получаем

$$a^* := -\frac{e^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-s^2}{2}} W^{-1}(s) Z(s,\varepsilon) ds = -\left(\frac{\varepsilon e^{1/2}}{2}(1+e^{-2}),\ 0 \right)^T.$$

Подставляя найденное значение функции $a^*(y,\varepsilon)$ в (1.4), мы получаем систему, для которой существует медленное интегральное многообразие $z = h(t,y,\varepsilon) = (h_1(t,y,\varepsilon), h_2(t,y,\varepsilon))^T$, определяемое формулой

$$h_1(t,\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon \int_t^{+\infty} e^{\frac{t^2-s^2}{2}} \cos(t-s)(\cos s - \frac{e^{1/2}}{2}(1+e^{-2}))ds, & t \geqslant 0, \\ \varepsilon \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{t^2-s^2}{2}} \cos(t-s)(\cos s - \frac{e^{1/2}}{2}(1+e^{-2}))ds, & t < 0, \end{cases}$$

$$h_2(t,\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon \int_t^{+\infty} e^{\frac{t^2-s^2}{2}} \sin(t-s)(\cos s - \frac{e^{1/2}}{2}(1+e^{-2}))ds, & t \geqslant 0, \\ \varepsilon \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{t^2-s^2}{2}} \sin(t-s)(\cos s - \frac{e^{1/2}}{2}(1+e^{-2}))ds, & t < 0. \end{cases}$$

В этом примере функция Z не зависит от y, следовательно, склеивающая функция a и медленное интегральное многообразие $z = h(t,\varepsilon)$ не зависят от y.

Пример 1.2. Рассмотрим систему (1.4) при условии, что $y \in \mathbf{R}$ и функция Z имеет вид

$$Z(t,y,z,a(y,\varepsilon),\varepsilon) = (\varepsilon \cos t \cos y,\ 0)^T.$$

Функция Z удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Следовательно, существует единственная функция $a(y,\varepsilon)$, $a \in F$, при которой система имеет медленное интегральное многообразие $z = h(t,y,\varepsilon)$, $h \in H$.

Из уравнения (1.20) получаем следующее выражение для нахождения функции a:

$$a^*(y,\varepsilon) = -\frac{e^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-s^2}{2}} W^{-1}(s) Z(s,y) ds = -\left(\frac{\varepsilon e^{1/2}}{2}(1+e^{-2})\cos y,\ 0 \right)^T.$$

Подставляя $a^*(y,\varepsilon)$ в (1.4), получаем, что медленное интегральное многообразие $z = h(t,y,\varepsilon) = (h_1(t,y,\varepsilon), h_2(t,y,\varepsilon))^T$ системы определяется формулой

$$h_1(t,\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon \int_t^{+\infty} e^{\frac{t^2-s^2}{2}} \cos(t-s)\cos y \left(\cos s - \frac{e^{1/2}}{2}(1+e^{-2})\right) ds, & t \geqslant 0, \\ \varepsilon \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{t^2-s^2}{2}} \cos(t-s)\cos y \left(\cos s - \frac{e^{1/2}}{2}(1+e^{-2})\right) ds, & t < 0, \end{cases}$$

$$h_2(t,\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon \int_t^{+\infty} e^{\frac{t^2-s^2}{2}} \sin(t-s)\cos y \left(\cos s - \frac{e^{1/2}}{2}(1+e^{-2})\right) ds, & t \geqslant 0, \\ \varepsilon \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{t^2-s^2}{2}} \sin(t-s)\cos y \left(\cos s - \frac{e^{1/2}}{2}(1+e^{-2})\right) ds, & t < 0. \end{cases}$$

Литература

[1] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

[2] Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.

[3] Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.

[4] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985. 376 с.
[5] Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 3. С. 576–579.
[6] Нейштадт А.И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060–2067; 1988. Т. 24. № 2. С. 226–233.
[7] Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 247 с.
[8] Shchepakina E., Sobolev V. Integral manifolds, canards and black swans // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 2001. V. 44A. № 7. P. 897–908.
[9] Shchetinina E.V. On existence of a bounded solution in a problem with a control parameter // System Analysis and Control: Theory and Appl. 2004. V. 6. № 2. P. 94-102.
[10] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 512 с.
[11] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
[12] Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1965. 1100 с.
[13] Перов А.И., Кибенко А.В. Об одном общем методе исследования краевых задач // Изв. АН СССР. Сер.: Математика, 1966. Т. 30. № 2. С. 249–264.

Поступила в редакцию 20/*IV*/2010;
в окончательном варианте — 20/*IV*/2010.

INTEGRAL MANIFOLDS FOR SLOW-FAST SYSTEMS AND THE STABILITY LOSS DELAY

© 2010 E.V. Shchetinina[3]

The paper is devoted to the study of the slow-fast systems under the condition that the spectrum of the linear part of the fast subsystem consists of the pair of complex conjugate eigenvalues that cross the imaginary axis from left to right. It is proved that if we introduce the additional function into the system then the modified system has the slow integral manifold with change of stability.

Key words: integral manifolds, change of stability, stability loss delay, multiscale systems.

Paper received 20/*IV*/2010.
Paper accepted 20/*IV*/2010.

[3]Shchetinina Ekaterina Vladimirovna (`schetinina_k@mail.ru`), the Dept. of Differential Equations and Control Theory, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.