УДК 538.56:519.25

МЕТОД РАСЧЕТА СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2010 В.В. Зайцев[1]

Предложен метод расчета функции корреляции случайного процесса в динамической системе первого порядка с произвольного вида потенциалом возвращающей силы, находящейся под действием периодического сигнала и белого шума. Метод основан на разложении решений нестационарного уравнения Фоккера — Планка по собственным функциям стационарного оператора и численных решениях матричной проблемы собственных значений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: нелинейная стохастическая система, марковский процесс, корреляционная функция, численный анализ

Модель в форме нелинейной динамической системы, возбуждаемой совместным воздействием внешнего детерминированного сигнала и внутреннего шума, широко используется при анализе статистических характеристик радиоэлектронных устройств [1–3], а также при описании множества других физических явлений и систем [4]. При условии гауссовости и дельта-коррелированности шума случайный процесс в системе относится к классу марковских. В этом случае использование аппарата кинетических уравнений, в частности уравнения Фоккера — Планка (УФП), позволяет существенным образом продвинуться по пути исследования его вероятностных и спектрально-корреляционных характеристик [5]. Но и здесь наиболее детальные результаты удается получить на основе численных методов.

В настоящей работе описан численный метод расчета функции корреляции марковского процесса в нелинейной системе с потенциалом возвращающей силы произвольного вида при периодическом внешнем воздействии.

Будем рассматривать нелинейную систему первого порядка, находящуюся под действием периодического детерминированного сигнала $s(t)$ и шума $\xi(t)$. Уравнение движения системы запишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - s(t) + \xi(t), \tag{1}$$

где $f(x)$ — нелинейная сила с потенциалом $\varphi(x) = -\int\limits_0^x f(x)dx$.

[1]Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Предполагается, что потенциал силового поля имеет нулевой уровень в точке $x = 0$. Случайный процесс $\xi(t)$ — гауссов белый шум с нулевым средним и интенсивностью D: $\langle\xi(t)\rangle = 0$, $\langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle = D\delta(\tau)$.

Стохастическому дифференциальному уравнению (1) соответствует УФП для одномоментной плотности вероятности $W(x,t)$ и плотности вероятности перехода $W(x_0, t_0|x, t)$ вида

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \hat{L}_0(x)W + s(t)\frac{\partial W}{\partial x} \tag{2}$$

со стационарным оператором Фоккера — Планка

$$\hat{L}_0(x)W = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(x)W\right) + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Собственные числа и собственные функции оператора (3) в области $-\infty < x < < \infty$, а также в конечной области с отражающими границами обладают следующими свойствами [1; 6]. Наименьшее по модулю собственное число $\lambda_0 = 0$, а все остальные собственные числа λ_n имеют отрицательные значения. Собственная функция $Y_0(x)$ представляет собой стационарную плотность вероятности: $Y_0(x) \equiv W_{st}(x)$. Функции $Y_n(x)$ и $Y_m(x)$ при $n \neq m$ ортогональны с весом $Y_0^{-1}(x)$. В дальнейшем будем считать их ортонормированными, т. е. норма

$$Nor_n = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_0^{-1}(x)Y_n^2(x)dx} = 1.$$

При периодическом внешнем воздействии установившийся процесс $x(t)$ в системе (1) представляет собой периодически нестационарный марковский процесс. Спектральная плотность мощности $P(\omega)$ периодически нестационарных процессов согласно [2; 3] определяется как фурье-образ усредненной корреляционной функции $\Phi(\tau)$ (функции корреляции второго рода [2]):

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau,$$

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{T_0}\int\limits_{0}^{T_0} \langle x(t_0)x(t_0+\tau)\rangle dt_0 = \overline{\langle x(t_0)x(t_0+\tau)\rangle}. \tag{4}$$

Усреднение в (4) проводится по периоду динамического воздействия $s(t)$, что эквивалентно усреднению по равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi]$ начальной фазе воздействия.

Корреляционная функция $K(t_0, t_0+\tau) = \langle x(t_0)x(t_0+\tau)\rangle$, в свою очередь, вычисляется с использованием плотностей вероятности $W(x,t)$ и $W(x_0, t_0|x, t)$:

$$K(t_0, t_0+\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xx_0W(x_0, t_0)W(x_0, t_0|x, t_0+\tau)dxdx_0.$$

Если ввести в рассмотрение функцию [7; 8]

$$V(x, t_0, t_0+\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_0W(x_0, t_0)W(x_0, t_0|x, t_0+\tau)dx_0,$$

то $K(t_0, t_0+\tau)$ можно представить в виде

$$K(t_0, t_0+\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xV(x, t_0, t_0+\tau)dx.$$

Тогда функцию корреляции $\Phi(\tau)$ можно вычислять с помощью интеграла

$$\Phi(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\bar{V}(x,\tau)dx, \tag{5}$$

где

$$\bar{V}(x,\tau) = \overline{V(x, t_0, t_0+\tau)} = \frac{1}{T_0}\int\limits_{0}^{T_0} V(x, t_0, t_0+\tau)dt_0.$$

Определив спектральную плотность мощности (спектр мощности) случайного процесса $x(t)$ как преобразование Фурье функции корреляции (5), получим

$$P(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\bar{V}(x,\omega)dx,$$

где $\bar{V}(x,\omega)$ — преобразование Фурье функции $\bar{V}(x,\tau)$ по временному аргументу.

Нетрудно показать, что функция $V(x, t_0, t_0+\tau)$ удовлетворяет УФП (2)

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \hat{L}_0(x)V + s(t_0+\tau)\frac{\partial V}{\partial x} \tag{6}$$

с начальным условием

$$V(x, t_0, t_0) = xW(x, t_0). \tag{7}$$

Решение уравнения (2) для одномоментной плотности вероятности представим в виде разложения по собственным функциям $Y_n(x)$:

$$W(x,t) = Y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)Y_n(x). \tag{8}$$

Для зависящих от времени коэффициентов разложения удается получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dw_n(t)}{dt} = \lambda_n w_n(t) + s(t)\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{n,m}w_m(t) + \gamma_{n,0}s(t), \;\; n = 1,\, 2,\, 3\dots \tag{9}$$

с зависящими от интенсивности шума параметрами

$$\gamma_{n,m} = \gamma_{n,m}(D) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_0^{-1}(x)Y_n(x)Y'_m(x)dx.$$

Установившееся решение системы (9) позволяет сформировать начальное условие (7):

$$V(x, t_0, t_0) = xY_0(x) + x\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t_0)Y_n(x). \tag{10}$$

Аналогичным образом решение УФП (6) для функции $V(x, t_0, t_0+\tau)$ с начальным условием (10) представим в виде разложения

$$V(x, t_0, t_0+\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(t_0,\tau)Y_n(x). \tag{11}$$

Для зависящих от времени коэффициентов разложения получим систему дифференциальных уравнений ($\tau \geqslant 0$):

$$\frac{dk_n(t_0,\tau)}{d\tau} = \lambda_n k_n(t_0,\tau) + s(t_0+\tau)\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_{n,m}k_m(t_0,\tau) \tag{12}$$

с начальными условиями

$$k_n(t_0,0) = \rho_{n,0} + \sum_{m=1}^{\infty}\rho_{n,m}w_m(t_0)\,, \quad n = 0,\,1,\,2\,..., \tag{13}$$

где

$$\rho_{n,m} = \rho_{n,m}(D) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xY_0^{-1}(x)Y_n(x)Y_m(x)dx.$$

Причем следует иметь в виду, что значения $\gamma_{0,m} \equiv 0$.

Теперь функцию корреляции (5) при $\tau \geqslant 0$ с учетом выражения (11) можно записать в виде ряда

$$\Phi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho_{n,0}\overline{k_n(t_0,\tau)}, \tag{14}$$

а спектр мощности — ряда

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho_{n,0}p_n(\omega),$$

где $p_n(\omega)$ — удвоенная действительная часть одностороннего преобразования Фурье функции $\overline{k_n(t_0,\tau)}$.

Таким образом, предлагаемый метод расчета функции корреляции случайного процесса $x(t)$ основан на использовании ряда (14) и состоит в численном интегрировании системы уравнений (12) с начальными условиями (13), которые, в свою очередь, вычисляются по установившемуся численному решению системы уравнений (9).

Заметим, что для стационарного марковского процесса в системе (1) без внешнего воздействия уравнения (12) имеют аналитическое решение

$$k_n(\tau) = \rho_{n,0}\exp(\lambda_n\tau),$$

и ряд (14) для функции корреляции принимает известный вид [1; 9]:

$$\Phi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho_{n,0}^2\exp(\lambda_n|\tau|).$$

Отметим, что, как следует из общего вида уравнений (12), функция корреляции (14) содержит экспоненциально затухающие и периодические компоненты. Затухающие компоненты формируют спектр мощности шумовой составляющей процесса $x(t)$, в то время как периодические ответственны за мощность регулярного отклика системы на внешнее воздействие. В исследованиях по стохастическому резонансу [10], например, в первую очередь интересуются мощностью регулярного отклика. В этом случае периодическое решение системы уравнений (12) может быть найдено численными методами матричной алгебры.

Приведем пример расчета корреляционных функций стохастических колебаний в нелинейной системе с классическим бистабильным потенциалом

$$\varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

Результаты расчетов корреляционных функций и функций корреляции второго рода в виде соответствующих графиков представлены на рис. 1–3.

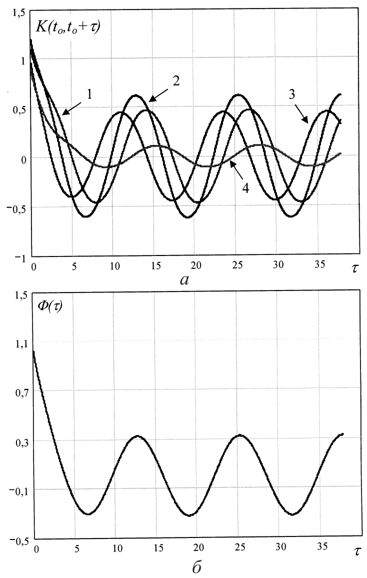

Рис. 1. Корреляционная функция (*а*) и функция корреляции второго рода (*б*): $\omega_0 = 0,5$

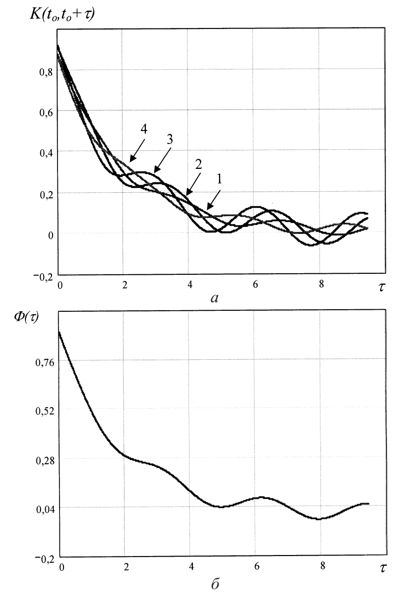

Рис. 2. Корреляционная функция (*а*) и функция корреляции второго рода (*б*): $\omega_0 = 2,0$

На рис. 1, *а* показаны графики корреляционной функции стохастических колебаний в системе, находящейся под действием белого шума с интенсивностью $D = 1$ и гармонического сигнала $s(t) = A\cos(\omega_0 t)$ с амплитудой $A = 0,75$ и часто-

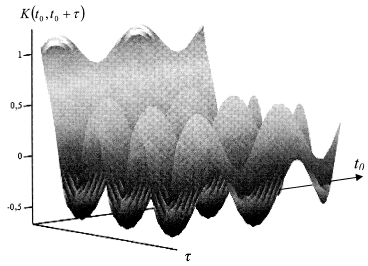

Рис. 3. Корреляционная функция $K(t_0, t_0 + \tau)$ стохастических колебаний в бистабильной системе с параметрами $\omega_0 = 0,5$, $A = 0,75$, $D = 1$

той $\omega_0 = 0,5$. Кривая *1* соответствует моменту времени $t_0 = t_*$, *2* — $t_0 = t_* + T_0/10$, *3* — $t_0 = t_* + T_0/4$ и *4* — $t_0 = t_* + 2T_0/5$. Начальный момент t_* определяется по разности фаз первой гармоники установившихся колебаний $W(x,t)$ и внешнего воздействия $s(t)$. График функции корреляции второго рода приведен на рис. 1, *б*.

Аналогичные графики корреляционной функции и функции корреляции второго рода для частоты гармонического сигнала $\omega_0 = 2,0$ приведены на рис. 2. Понижение уровня периодической составляющей функции $\Phi(\tau)$ на последовательности графиков объясняется уменьшением амплитуды динамического отклика системы с повышением частоты внешнего воздействия.

На рис. 3 показан трехмерный график корреляционной функции стохастических колебаний в системе с параметрами $\omega_0 = 0,5$, $A = 0,75$, $D = 1$. Как видно из графика, по переменной t_0 функция $K(t_0, t_0 + \tau)$ совершает колебания с удвоенной частотой [10].

Литература

[1] Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.

[2] Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968. 660 с.

[3] Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 496 с.

[4] Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990. 376 с.

[5] Маланин В.В., Полосков И.Е. Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. 296 с.

[6] Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 528 с.

[7] Зайцев В.В. Об одном способе вычисления корреляционных характеристик марковских случайных процессов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2006. Т. 9. № 4. С. 73–75.

[8] Зайцев В.В. Метод расчета функции корреляции периодически нестационарного марковского процесса в нелинейной системе // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11. № 1. С. 11–13.

[9] Дубков А.А., Малахов А.Н., Саичев А.И. Время корреляции и структура функции корреляции нелинейного равновесного броуновского движения в потенциальных ямах произвольной формы // Известия вузов. Сер.: Радиофизика. 2000. Т. 43. № 4. С. 369–382.

[10] Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка / В.С. Анищенко [и др.] // УФН. 1999. Т. 169. Вып. 1. С. 7–38.

Поступила в редакцию 18/*VII*/2010;
в окончательном варианте — 18/*VII*/2010.

CALCULATION METHOD OF SPECTRAL-CORRELATION CHARACTERISTICS OF STOCHASTIC PROCESSES IN THE FIRST ORDER NON-LINEAR SYSTEMS

 V.V. Zaitsev[2]

Calculation method of correlation function of stochastic process in the first order dynamical system with arbitrary sort potential of recovery force lying under action of periodic signal and white noise is offered in the article. Method is based on the decomposition of non-stationary Fokker-Plank equation solution in eigen functions of stationary operator and numerical solutions of matrix problem of eigen values and system of ordinary differential equations.

Key words: non-linear stochastic system, Markovian process, correlation function, numerical analysis.

Paper received 18/*VII*/2010.
Paper accepted 18/*VII*/2010.

[2]Zaitsev Valeriy Vasilievich (zaitsev@ssu.samara.ru), the Dept. of Radiophysics and Computer Modelling of Radio Systems, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.