

УДК 130.145

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССА ЛАЗЕРНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ ПРОТЯЖЕННЫХ ПРИМЕСНЫХ КРИСТАЛЛОВ С УЧЕТОМ КОЛЛЕКТИВНЫХ ЭФФЕКТОВ¹

© 2010 М.П. Ступацкая, Е.С. Тарельник²

Получена система замкнутых кинетических уравнений, описывающих процесс лазерного охлаждения в протяженных кристаллах, легированных примесями редкоземельных ионов с учетом коллективных эффектов.

Ключевые слова: лазерное охлаждение, антистоксов режим охлаждения, сверхизлучение.

Лазерное охлаждение твердых тел является в настоящее время одной из наиболее важных проблем лазерной физики в связи практической потребностью в создании компактных высокоэффективных твердотельных лазерных рефрижераторов, функционирующих без криогенной жидкости [1–9]. Эффект охлаждения твердых тел может быть достигнут при использовании антистоксового режима флуоресценции. В качестве наиболее эффективной системы для реализации антистоксового режима охлаждения используются примесные редкоземельные ионы в прозрачных кристаллах. В первом эксперименте по лазерному охлаждению твердых тел в режиме антистоксовой флуоресценции в качестве рабочих ионов использовались редкоземельные примесные ионы (Yb^{3+}) в тяжелометаллическом флюоридном стекле [10]. При этом удалось понизить температуру образца на 3 К по сравнению с комнатной. В последние годы с помощью антистоксова режима флуоресценции удалось понизить температуру различных примесных кристаллов до примерно 150 К от комнатной температуры [8]. Для теоретического описания процесса антистоксового охлаждения примесных кристаллов была предложена модель локальных или псевдолокализованных фононов [3]. Детальное описание модели псевдолокализованных фононов можно также найти в обзоре [11].

В работах [12–14] показано, что одним из способов увеличения эффективности лазерного охлаждения может стать использование режима сверхизлучения для примесных ионов в кристалле. Для этого предложено наряду с непрерывной накачкой использовать вспомогательные короткие лазерные импульсы с частотой, резонансной частоте атомного перехода в редкоземельных примесях, позволяющие

¹Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы по лоту "Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области оптики, лазерной физики и лазерных технологий", шифр "2010-1.1-122-084" (номер государственного контракта 14.740.11.0063).

²Ступацкая Мария Петровна (Stupatskaya@NetCracker.com), Тарельник Елена Сергеевна (pouemy4@mail.ru), кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

создать инверсную заселенность среды с последующим испусканием коллективного импульса. Однако при теоретическом анализе предложенной схемы авторы работы [12] ограничились только исследованием динамики примесных ионов, исключив из рассмотрения динамику фононных мод. В работе [13], наоборот, исследовалась динамика псевдолокализованной фононной моды примесного кристалла в рамках сосредоточенной модели примесного кристалла (длина волны излучения намного меньше характерных размеров образца). В работе [14] для описания коллективных эффектов в лазерном охлаждении использовались полуфеноменологические кинетические уравнения. Для описания реальных экспериментов по лазерному охлаждению кристаллов, легированных редкоземельными металлами, сосредоточенная модель кристалла неприменима [1–8]. Поэтому представляет большой интерес обобщение результатов работы [13] на случай протяженной модели кристалла.

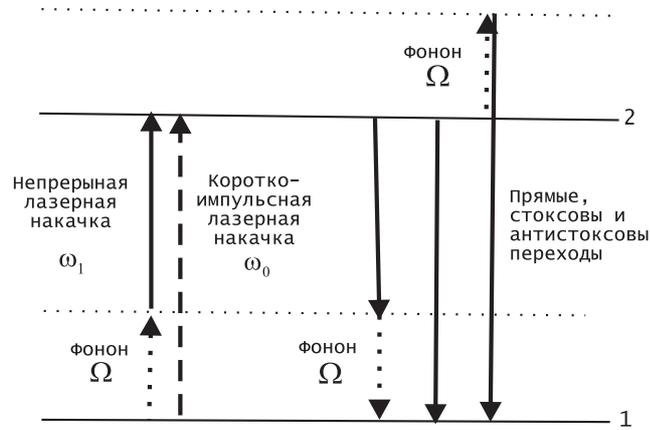


Рис. Схема энергетических уровней и возможных переходов в двухуровневом примесном ионе для сверхизлучательного режима антистоксового лазерного охлаждения примесного кристалла. Значками 1 и 2 обозначены основное и возбужденное состояние иона, ω_1 — частота непрерывной лазерной накачки, ω_0 — частота резонансного перехода в двухуровневом ионе и частота короткоимпульсной накачки, используемой для создания инверсной заселенности уровней в ионе, Ω — частота псевдолокализованного фонона

Рассмотрим систему N двухуровневых примесных редкоземельных ионов в протяженном кристалле вида вытянутого стержня с резонансной частотой перехода ω_0 , взаимодействующую с двумя когерентными полями накачки — непрерывной накачкой на частоте ω_1 , удовлетворяющей условию $\omega_1 < \omega_0$, и импульсной лазерной накачкой с частотой ω_0 . Примесные ионы также взаимодействуют с псевдолокализованными фононами с частотой Ω . Частота непрерывной накачки подбирается так, чтобы выполнялось условие $\omega_1 = \omega_0 - \Omega$. Схема энергетических уровней и возможных переходов в примесном двухуровневом ионе представлена на рисунке.

Гамильтониан рассматриваемой системы можно представить в виде

$$H = H_M + H_F + H_{MF},$$

где

$$H_M = \sum_{f=1}^N \hbar\omega_0 R_f^z + \sum_q \hbar\Omega_q b_q^\dagger b_q +$$

$$+\frac{1}{2}\hbar\omega_R(t)\sum_{f=1}^N\left\{e^{-i(\omega_0t-\vec{k}_0\vec{x}_f)}R_f^{(+)}+e^{i(\omega_0t-\vec{k}_0\vec{x}_f)}R_f^{(-)}\right\}$$

– гамильтониан системы свободных двухуровневых ионов, свободного псевдолокализированного фононного поля и импульсной накачки;

$$H_F=\sum_k\hbar\omega_k a^+{}_k a_k$$

– гамильтониан свободного квантового электромагнитного поля, включающий в себя вакуумное поле и поле непрерывной накачки, и

$$H_{AF}=H_{AF}^{(1)}+H_{AF}^{(2)}$$

– гамильтониан взаимодействия, включающий прямое

$$H_{AF}^{(1)}=\sum_{k,f}\hbar g_k\left(e^{i\vec{k}\vec{r}_f}a_k R_f^++e^{-i\vec{k}\vec{r}_f}a^+{}_k R_f^-\right)$$

и непрямое ион-фотонное взаимодействие (с поглощением и испусканием фононов)

$$H_{AF}^{(2)}=\sum_{q,k,f}\kappa_{kq}\left\{e^{i(\vec{k}-\vec{q})\vec{r}_f}a_k R_f^+(b_{-q}+b^+{}_q)+e^{-i(\vec{k}-\vec{q})\vec{r}_f}a^+{}_k R_f^-(b_q+b^+{}_{-q})\right\}.$$

Здесь индекс f нумерует двухуровневые ионы, \vec{r}_f – радиус-вектор f -го иона, ω_0 – частота перехода в двухуровневом ионе, R_f^z – оператор инверсии населенности f -го излучателя, R_f^\pm – понижающие и повышающие операторы в f -м излучателе, $a_k^+(a_k)$ – оператор рождения (уничтожения) фотона с частотой ω_k , волновым вектором \vec{k} и поляризацией \vec{e}_σ ;

$$g_k=\omega_0\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega_k V}}\vec{d}\vec{e}_\sigma$$

– константа прямого диполь-фотонного взаимодействия, V – объем системы излучателей, совпадающий с объемом квантования электромагнитного поля; \vec{d} – вектор дипольного момента двухуровневого атома, $\omega_R(t)=E_0(t)d/\hbar$ – частота Раби для огибающей поля накачки $\vec{E}_0(t)$, \vec{k}_0 – волновой-вектор поля накачки, $b_q^+(b_q)$ – оператор рождения (уничтожения) фонона с частотой Ω , волновым вектором \vec{q} и поляризацией \vec{e}_μ ,

$$\kappa_{kq}=\frac{k\vec{e}_\mu}{\sqrt{2m\Omega\hbar}}$$

– константа ион-фотон-фононного взаимодействия и m – масса примесного иона.

Используя метод исключения бозонных переменных и стандартные расцепления для ион-фотон-фононных корреляторов [15], мы получили для кристаллов в форме длинного стержня в случае очень больших ($F \gg 1$) и очень малых ($F \ll 1$) значений числа Френеля (где $F = S\omega_0/2\pi L$, S – площадь поперечного сечения кристалла и L – длина образца системы марковских кинетических уравнений, описывающих полную динамику лазерного охлаждения с учетом коллективных эффектов

$$\begin{aligned} \frac{dW_c}{dt} &= \frac{i}{2}\hbar\omega_R(t)\sum_{f=1}^N\left\{e^{-i(\omega_0t-\vec{k}_0\vec{x}_f)}R_f^+-e^{i(\omega_0t-\vec{k}_0\vec{x}_f)}R_f^-\right\}- \\ &- \left\{\frac{1}{\tau^-}+\left(\frac{1+n}{\tau_{(s)}^-}+\frac{n}{\tau_{(as)}^-}\right)\right\}\left(\frac{N}{2}+W_c\right)+\left\{\frac{1}{\tau^+}+\left(\frac{1+n}{\tau_{(as)}^+}+\frac{n}{\tau_{(s)}^+}\right)\right\}\left(\frac{N}{2}-W_c\right)- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{\mu}{\tau^-} + \left[\frac{\mu_{(s)}}{\tau_{(s)}^-} (1+n) + \frac{\mu_{(as)}}{\tau_{(as)}^-} n \right] \right\} K + \left\{ \frac{\mu}{\tau^+} + \left[\frac{\mu_{(as)}}{\tau_{(as)}^+} (1+n) + \frac{\mu_{(s)}}{\tau_{(s)}^+} n \right] \right\} K, \quad (1) \\
\frac{dn}{dt} &= \left\{ \frac{1}{M\tau_{(s)}^-} (1+n) - \frac{1}{M\tau_{(as)}^-} n \right\} \left(\frac{N}{2} + W_c \right) + \left\{ \frac{1}{M\tau_{(as)}^+} (1+n) - \frac{1}{M\tau_{(s)}^+} n \right\} \times \\
& \times \left(\frac{N}{2} - W_c \right) + \frac{1}{M} \left\{ \left[\frac{\mu_{(s)}}{\tau_{(s)}^-} + \frac{\mu_{(as)}}{\tau_{(as)}^+} \right] (1+n_q) - \left[\frac{\mu_{(as)}}{\tau_{(as)}^-} + \frac{\mu_{(s)}}{\tau_{(s)}^+} \right] n_q \right\} K, \\
\frac{dK}{dt} &= -\frac{1}{2} W_c \frac{dW_c}{dt},
\end{aligned}$$

где $W_c = 2 \sum_f \langle R_f^+ \rangle$ и $\langle R_f^+ R_{f'}^- \rangle = \frac{1}{N^2} K e^{i\vec{k}_0(\vec{r}_f - \vec{r}_{f'})}$.

При записи системы уравнений (1) использованы также следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau^-} &= 2\pi \sum_k (1+N_k) g_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0), \\
\frac{1}{\tau^+} &= 2\pi \sum_k N_k g_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0), \\
\frac{1}{\tau_{q(s)}^-} &= 2\pi \sum_{kq} (1+N_k) \kappa_{kq}^2 / \hbar^2 \delta(\omega_k - \omega_0 + \Omega), \\
\frac{1}{\tau_{q(s)}^+} &= 2\pi \sum_{kq} N_k \kappa_{kq}^2 / \hbar^2 \delta(\omega_k - \omega_0 + \Omega), \\
\frac{1}{\tau_{q(as)}^-} &= 2\pi \sum_{kq} (1+N_k) \kappa_{kq}^2 / \hbar^2 \delta(\omega_k - \omega_0 - \Omega), \\
\frac{1}{\tau_{q(as)}^+} &= 2\pi \sum_{kq} N_k \kappa_{kq}^2 / \hbar^2 \delta(\omega_k - \omega_0 - \Omega)
\end{aligned}$$

— обратные времена излучения и поглощения фотонов для прямого, стоксового и антистоксового переходов:

$$\begin{aligned}
\mu &= 2\pi\tau^- \sum_k (1+N_k) g_k^2 \Gamma(\vec{k}) \delta(\omega_k - \omega_0), \\
\mu_{(s)} &= 2\pi\tau_{(s)}^- \sum_{kq} (1+N_k) h_{kq_0}^2 / \hbar^2 \Gamma(\vec{k} - \vec{q}) \delta(\omega_k - \omega_0 + \Omega), \\
\mu_{(as)} &= 2\pi\tau_{(as)}^- \sum_{kq} (1+N_k) \pi h_{kq_0}^2 / \hbar^2 \Gamma(\vec{k} + \vec{q}) \delta(\omega_k - \omega_0 - \Omega),
\end{aligned}$$

где

$$\Gamma(\vec{k}) = \left| \frac{1}{N} \sum_f e^{i(\vec{k})\vec{r}_f} \right|^2.$$

Величины $\mu, \mu_{(s)}, \mu_{(as)}$ представляют собой геометрические факторы, $n = \langle n_q(t) \rangle$ — среднее число фононов в псевдолокализованной моде Ω , q — модуль волнового вектора псевдолокализованного фонона и M — число псевдолокализованных фононных состояний, вовлеченных в процесс охлаждения. Для того чтобы система (1) стала замкнутой, необходимо добавить к ней уравнения для средних $\langle R_f^+ \rangle, \langle R_f^- \rangle$. Указанные уравнения не представлены в настоящей статье ввиду их громоздкого вида. Полученная система уравнений может быть использована для описания

полной динамики лазерного охлаждения в примесных твердых телах в режиме сверхизлучения. Результаты численного моделирования системы коллективных кинетических уравнения (1) будут представлены в нашей следующей работе. Здесь мы ограничимся качественным анализом некоторых частных решений полученных уравнений.

Легко заметить, что при использовании ряда упрощающих предположений уравнения вида (1) переходят в кинетические уравнения, полученные ранее для описания стационарного режима лазерного охлаждения примесных кристаллов в работе [3]. Действительно, опустим в (1) слагаемые, описывающие коллективные процессы излучения и поглощения фотонов на прямых, стоксовых и антистоксовых переходах. Будем полагать также, что испущенные фотоны быстро уходят из образца, т. е. среднее число фотонов в моде k , заданное внешним источником (лазерной накачкой), совпадает со средним числом фотонов в системе. Поскольку непрерывная накачка имеет частоту, совпадающую с частотой стоксового перехода в примеси, положим все числа фотонов, за исключением фотонов частотой $\omega_0 - \Omega$, равными нулю. В этом случае вынужденные процессы поглощения и излучения на прямом переходе будут отсутствовать. Кроме того, в приближении низких температур можно показать, что антистоксовые процессы проявляют себя лишь во втором порядке малости по среднему числу фононов всевозможных мод, определяемым взаимодействием с термостатом. Поле источника будем считать не слишком малым $N_k \gg 1$ (N_k — среднее число фотонов в моде непрерывной накачки). В этом случае мы можем пренебречь процессами спонтанного стоксового излучения по сравнению с процессами вынужденного стоксового излучения, тогда $1 + N_k \approx N_k$ и $\tau^-(s) = \tau^+(s) = \tau_s$. Наконец, для описания процесса обмена энергией между выделенной псевдолокализованной модой и остальными фононными модами кристалла во второе уравнение введем феноменологическое слагаемое вида

$$\frac{1}{\tau_v}(n - n_{eq}),$$

где n_{eq} — равновесное число резонансных фононов и τ_v — время их термализации. В указанных приближениях мы действительно получаем из (1) уравнения, совпадающими с уравнениями, полученными ранее в [3; 4]):

$$\begin{aligned} \frac{dW_c}{dt} &= -\frac{1}{\tau^-} \left(\frac{N}{2} + W \right) + \frac{1}{\tau_s} \left\{ (2n + 1)W_c + \frac{N}{2} \right\}, \\ \frac{dn}{dt} &= \frac{1}{M\tau_s} \left\{ (2n + 1)W_c + \frac{N}{2} \right\} - \frac{1}{\tau_v}(n - n_{eq}). \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим стационарные решения уравнений (2). В приближении низких температур $n_{eq} \ll 1$ и при выполнении условия $N\tau_v \ll M\tau^-$ стационарное решение для среднего числа псевдолокализованных фононов есть

$$n_{st} = n_{eq} \frac{\tau^- M}{\tau_v N}. \quad (3)$$

Соответственно, для эффективной температуры кристалла в стационарном режиме из (3) имеем

$$T = T_{eq} \left\{ 1 + \frac{k_B T_s}{\hbar \Omega} \ln \left(\frac{\tau_v N}{\tau^- M} \right) \right\}^{-1}.$$

В высокотемпературном приближении $n_{eq} \gg 1$ решение для стационарного среднего числа фононов сводится к

$$n_{st} = n_{eq} - \frac{\tau_v N}{\tau^- M}. \quad (4)$$

В этом случае эффективная температура кристалла есть

$$T = T_{eq} \left\{ 1 - \frac{\hbar \Omega}{k_B T_s} \frac{\tau_v N}{\tau^- M} \right\}.$$

В формулах (3), (4) n_{eq} и T_{eq} — значения среднего числа псевдолокализованных фононов и температуры кристалла в состоянии термодинамического равновесия соответственно. Нетрудно также показать, что в случае сосредоточенной модели примесного кристалла уравнения (1) переходят в уравнения, полученные ранее в [11].

Таким образом, в настоящей работе нами получены замкнутая система кинетических уравнений, описывающих полную динамику процесса лазерного охлаждения протяженного примесного кристалла в режиме сверхизлучения. Численное моделирование полученных кинетических уравнений, а также обсуждение условий, при которых в процессе лазерного охлаждения необходимо учитывать коллективные эффекты, будет являться предметом нашей следующей работы.

Литература

- [1] Mungan C.E., Gosnell T.R. Laser cooling of solids // *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics*. 1999. V. 40. P. 161–228.
- [2] Ruan X.L., Kaviany M. *Advances in Laser cooling of solids* // *J. Heat Transfer*. 2007. V. 120. P. 3–10.
- [3] Андрианов С.Н., Самарцев В.В. *Оптическое сверхизлучение и лазерное охлаждение в твердых телах*. Казань: Изд-во КГУ, 1988. 132 с.
- [4] Петрушкин С.В., Самарцев В.В. *Лазерное охлаждение твердых тел*. М.: Физматлит, 2005. 252 с.
- [5] Petrushkin S.V., Samartsev V.V. *Laser cooling of solids*. Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 2009. 236 p.
- [6] Petrushkin S.V., Samartsev V.V. *Advances of laser refrigeration in solids* // *Laser Physics*. 2010. V. 20. № 1. P. 38–46.
- [7] Sheik-Bahae M., Epstein R.I. *Optical refrigeration*. Weinheim: Wiley-VCH, 2009. 520 p.
- [8] Laser cooling of solids to cryogenic temperatures / D.V. Seletsky [et al.] // *Nature Photonics*. 2010. V. 4. P. 161–164.
- [9] Nemova G., Kashyap R. Laser cooling of solids // *Rep. Prog. Phys.* 2010. V. 73. 086501.
- [10] Observation of laser-induced fluorescent cooling of a solid / R.I. Epstein [et al.] // *Nature*. 1995. V. 377. P. 500–502.
- [11] Башкиров Е.К. Лазерное охлаждение примесных кристаллов в режиме сверхизлучения // *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*. 2005. № 3(37). С. 90–109.
- [12] Petrushkin S.V., Samartsev V.V. Superradiant regime of laser cooling of crystals and glasses doped with rare-earth ions // *Laser Physics*. 2001. V. 11. № 8. P. 948–956.

- [13] Bashkirov E.K. Dynamics of phonon mode in superradiance regime of laser cooling of crystals // Phys. Lett. 2005. V. A341. P. 345–351.
- [14] Nemova G., Kashyap R. Alternative technique for laser cooling with superradiance / Phys. Rev. A. 2011. V. 83. 013404.
- [15] Боголюбов-мл. Н.Н., Шумовский А.С. Сверхизлучение. Дубна: ОИЯИ, 1987. 85 с.

Поступила в редакцию 13/VI/2010;
в окончательном варианте — 13/VI/2010.

KINETIC EQUATIONS FOR LASER COOLING OF EXTENDED SOLIDS TAKING INTO ACCOUNT THE COLLECTIVE EFFECTS

© 2010 M.P. Stupatskaya, E.S. Tarelnik³

The system of closed kinetic equations for laser cooling of extensive crystals doped with impurities of rare-earth ions in the presence of collective effects has been obtained.

Key words: laser cooling, antistokes regime of cooling, super-radiance.

Paper received 13/VI/2010.
Paper accepted 13/VI/2010.

³Stupatskaya Maria Petrovna (Stupatskaya@NetCracker.com), Tarelnik Elena Sergeevna (noyemy4@mail.ru), the Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.