УДК 519.6

*И.А. Бородинова, Л.А. Сараев**

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Произведено обобщение классической транспортной задачи при наличии риска потерь перевозимых грузов с учетом расходов на содержание излишков и расходов в связи с недопоставкой груза.

Ключевые слова: стохастическая транспортная задача, поставщик, потребитель.

1. Классическая транспортная задача

Рассмотрим классическую транспортную задачу. Пусть некоторый продукт, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве a_i единиц $i = \overline{1,m}$, необходимо доставить n потребителям B_i в количестве b_i, $j = \overline{1,n}$. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от поставщика A_i к потребителю B_j. Требуется составить план перевозки, позволяющий с минимальными затратами вывезти все грузы и полностью удовлетворить потребителей [1].

Стоимость всего плана перевозок составит

$$Q = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

Здесь x_{ij} – размер груза, перевозимого от i-го поставщика j-му потребителю.

Система ограничений обусловлена тем, что все грузы должны быть перевезены

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m} \quad (2)$$

и все потребности должны быть удовлетворены

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,n} \ . \quad (3)$$

Кроме того, условия неотрицательности $x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ исключают обратные перевозки.

В закрытой модели предполагается равенство суммарных запасов суммарным потребностям

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \quad (4)$$

Если суммарные запасы превышают потребности, то вводится фиктивный потребитель B_{n+1} с потребностями

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

Если суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится фиктивный поставщик A_{m+1} с запасами в размере

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \ .$$

Бородинова Ирина Александровна (teacher79@mail.ru), *Сараев Леонид Александрович* (saraev@ssu.samara.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя полагается равной нулю $c_{m+1,j} = 0, j = \overline{1,n}$ и стоимость перевозки груза от фиктивного поставщика также полагается равной нулю $c_{i,n+1} = 0, i = \overline{1,m}$, так как груз в обоих случаях не перевозится.

Транспортная задача имеет ($n + m$) уравнений с nm неизвестными.

Матрицу перевозок $X = (x_{ij})$ называют планом перевозок.

План X^*, при котором целевая функция обращается в минимум, называется оптимальным планом перевозок.

Пример.

Даны поставщики фактические a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 с запасами 100; 200; 150; 50; 390 и потребители с потребностями в размере 150; 340; 400.	a_1	100	b_1	150
	a_2	200	b_2	340
	a_3	150	b_3	400
	a_4	50		890
	a_5	390		

Решение имеет вид

Матрица c_{ij} имеет вид, где для фиктивного поставщика стоимость $c_{5j} = 0$				Решение задачи линейного программирования имеет вид:				
C_{ij}	b_1	b_2	b_3	x_{ij}	b_1	b_2	b_3	
a_1	1	2	3	a_1	0	100	0	100
a_2	4	5	6	a_2	150	50	0	200
a_3	3	2	1	a_3	0	0	150	150
a_4	5	2	3	a_4	0	50	0	50
a_5	2	1	1	a_5	0	140	250	390
					150	340	400	

Все расходы – это только расходы на транспортировку в размере 1690 д. е.

2. Транспортная задача при случайном спросе

Рассмотрим теперь стохастическую транспортную задачу, в которой стоимость транспортировки, спрос, объем производства, время доставки предполагаются случайными величинами [2–4].

Пусть спрос b_j в j-м пункте потребления есть случайная величина с функцией распределения $f_j(b_j)$. Общий объем продукта, предназначенного в соответствии с планом, составленным до реализации b_j, для j-го потребления выражается соотношением

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}.$$

Если после установления спроса b_j выяснится, что $y_j < b_j$, то спрос не будет удовлетворен. При этом ущерб, наносимый системе, предполагается пропорциональным объему неудовлетворенного спроса

$$g_j^- [b_j - y_j].$$

Здесь g_j^- — ущерб (штраф за дефицит), связанный с нехваткой единицы продукта.

В противоположном случае при $y_j > b_j$ возникает необходимость в хранении избыточного продукта. Дополнительные затраты системы пропорциональны объему избыточного продукта

$$g_j^+ [y_j - b_j].$$

Здесь g_j^+ — затраты на хранение единицы продукта.

Математическое ожидание суммарных потерь, связанных с перевозкой продукта, ущербом от неудовлетворенного спроса и затратами на хранение избыточного продукта, имеет вид

$$Q(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} g_j^+ \int_0^{y_j} (y_j - b_j) f_j(b_j) db_j + \sum_{j=1}^{n} g_j^- \int_{y_j}^{\infty} (b_j - y_j) f_j(b_j) db_j. \quad (5)$$

Детерминированный эквивалент стохастической транспортной задачи представляет собой задачу выпуклого программирования

$$Q(x,y) \to \min;\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i;\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = y_j;\ \sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{i=1}^{m} a_i,\ x_{ij} \ge 0,\ y_j \ge 0,\ i = 1,2,..,m; j = 1,2,...,n.$$

В случае, когда спрос b_j распределен дискретно, детерминированный эквивалент является задачей линейного программирования.

Пусть спрос b_j в j-м пункте потребления принимает значения b_{jk} с вероятностями $p_{jk}, k = 1,2,...,s_j$; $j = 1,2,...,n$. При этом очевидно, что $\sum_{k=1}^{s_j} p_{jk} = 1$.

Введем вспомогательные переменные

$$u_{jk} = (b_{jk} - y_j)_+ = (b_{jk} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij})_+, \quad (6)$$

$$v_{jk} = (y_j - b_{jk})_+ = (\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_{jk})_+. \quad (7)$$

Здесь $(x)_+ = \begin{cases} 0, x < 0, \\ x, x \ge 0. \end{cases}$

Очевидно, что всегда имеет место равенство $u_{jk} - v_{jk} = b_{jk} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_{jk} - y_j$.

В этом случае детерминированный эквивалент стохастической транспортной задачи будет представлен задачей линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s_j} (g_j^{(-)} p_{jk} u_{jk} + g_j^{(+)} p_{jk} v_{jk}) \to \min,$$

$$x_{ij} \ge 0;\ u_{jk} \ge 0;\ v_{jk} \ge 0;\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};\ k = \overline{1,s_j}, \quad (8)$$

$$u_{jk} - v_{jk} = b_{jk} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_{jk} - y_j;\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i.$$

В качестве примера рассмотрим ту же постановку транспортной задачи со следующим распределением случайного спроса потребителей:

	$b_1(k)$	$p_1(k)$	$b_2(k)$	$p_2(k)$	$b_3(k)$	$p_3(k)$
$k=1$	100	0,25	190	0,5	400	0,25
$k=2$	200	0,25	290	0,3	200	0,5
$k=3$	150	0,5	340	0,2	400	0,25
$E(b_j)$	150		250		300	

Здесь $E(b_j)$ – математическое среднее спроса в j-м пункте потребления

$$E(b_j) = \sum_{k=1}^{s_j} b_{jk} p_{jk}.$$

Введем значения штрафов за дефицит и расходов на хранение

	j=1	j=2	j=3		j=1	j=2	j=3
g_j^-	1	2	3	g_j^+	2	3	1

Неизвестными являются $x_{ij}; u_{jk}; v_{jk}$. Решая задачу линейного программирования с той же матрицей транспортных расходов c_{ij} и теми же запасами продуктов a_i, получим

x_{ij}	b_1	b_2	b_3	
a_1	100,0	0,0	0,0	100,0
a_2	53,1	146,9	0,0	200,0
a_3	0,0	0,0	150,0	150,0
a_4	0,0	50,0	0,0	50,0
a_5	0,0	144,7	245,3	390,0
	153,1	341,6	395,3	**890,0**

При этом матрицы u_{jk} и v_{jk} имеют вид

u_{jk}	j=1	j=2	j=3	v_{jk}	j=1	j=2	j=3
k=1	0,00	0,00	6,25	k=1	1,56	0,00	0,00
k=2	0,00	1,56	7,81	k=2	0,00	0,00	0,00
k=3	1,56	3,13	9,37	k=3	0,00	0,00	0,00

Общие расходы составят величину 1547,5 д. е., в том числе 1 190 д.е. – это расходы на транспортировку, расходы в связи с избытком и хранением – 325 д. е. и штрафы за неполную поставку – 32,5 д. е.

Можно отметить, что в фиксированном спросе мы получаем детерминированное решение.

3. Транспортная задача в условиях риска перевозимых грузов

На практике при перевозке в силу возможных дорожно-транспортных происшествий, противоправных действий третьих лиц, нарушений температурного режима и прочих факторов риска приходится планировать потери груза.

Пусть r_{ij} – случайная величина потерь при перевозке груза в размере x_{ij}, зависящая от риска на маршруте (ij)и от размера перевозки x_{ij}

$$r_{ij} = r_{ij}(r_{ij};\theta_{ij}) .$$

Здесь θ_{ij} – параметр риска данного маршрута.

С учетом риска потерь на маршруте j-й потребитель получит от i-го поставщика товар в размере

$$y_{ij} = x_{ij} - r_{ij} .$$

Общее количество грузов, доставленных от всех поставщиков в адрес j-го потребителя, будет равно $y_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}$.

Вероятностные свойства случайной величины определяются стохастическим процессом потерь груза на всех маршрутах.

Если груза завезли меньше, чем это нужно

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(x_{ij} - r_{ij}) < b_j ,$$

то спрос будет неудовлетворен. Ущерб, наносимый потребителю, пропорционален объему неудовлетворенного спроса

$$g_j^- [b_j - y_j]_+ = g_j^- [b_j - \sum_{i=1}^{m}(x_{ij} - r_{ij})]_+ . \qquad (9)$$

Здесь g_j^- – ущерб (штраф за дефицит), связанный с нехваткой единицы продукта, $[a]_+ = 0$, если $a \le 0$, $[a]_+ = a$, если $a > 0$.

Для избыточного продукта необходима организация хранения. При этом дополнительные затраты потребителя прямо пропорциональны объему избыточного товара

$$g_j^+ [y_j - b_j]_+ = g_j^+ [\sum_{i=1}^{m}(x_{ij} - r_{ij}) - b_j]_+ . \qquad (10)$$

Здесь g_j^{+} – затраты на хранение единицы товара.

Предположим, что потребитель самостоятельно осуществляет перевозки и оплачивает все транспортные расходы. Кроме того, после оплаты товара поставщику потребитель становится собственником груза и несет все риски и убытки от случайной гибели или повреждения груза. Таким образом, общая стоимость расходов, связанных с транспортировкой, составляет величину

$$\sum_{i=1}^{m}(c_{ij}x_{ij} + s_0 r_{ij}) .$$

Здесь s_0 – стоимость единицы товара (груза).

Очевидно, что $P(r_{ij} = 0) > 0$, и распределение величины r_{ij} имеет дискретно-непрерывный характер. Случайная величина r_{ij} потерь груза пропорциональна размеру перевозимого груза x_{ij} и может быть представлена в виде

$$r_{ij} = I_{ij} R_{ij} .$$

Здесь L_{ij} – индикатор события потери груза, R_{ij} – размер потери груза в случае его наступления. Распределение величины R_{ij} есть условное распределение величины r_{ij} при условии, что $r_{ij} > 0$.

$$P(R_{ij}) = P(r_{ij} \big| r_{ij} > 0) \ .$$

При этом величины I_{ij} и R_{ij} считаются независимыми, например, наступление ДТП и размер ущерба от этого ДТП) [5, 6].

Индикатор I_{ij} может принимать значение 0 и 1. Вероятность утраты груза при его транспортировке из i-го в j-й пункт можно считать прямо пропорциональной длине этого маршрута l_{ij}. Длину маршрута $l_{ij} \sim c_{ij}$ можно считать пропорциональной стоимости перевозок на этом маршруте.

Таким образом

$$P(I_{ij} = 1) = q_{ij} = ql_{ij} = \lambda \cdot c_{ij} \ , \ P(I_{ij} = 0) = 1 - \lambda \cdot c_{ij} \ .$$

Здесь λ – коэффициент пропорциональности. Величина R_{ij} имеет непрерывное распределение и может принимать значения от 0 до x_{ij}. Его можно представить в виде $R_{ij} = X \times x_{ij}$. Случайная величина X называется степенью ущерба и принимает значения от 0 до 1. Будем считать что величина X имеет бета-распределение [4]

$$f(\chi) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \chi^{\alpha-1}(1-\chi)^{\beta-1}, \ \alpha > 0, \beta > 0 \ .$$

Так как $E(I_{ij}) = \lambda c_{ij}$, то среднее значение $E(r_{ij}) = \lambda \cdot c_{ij} \cdot E(\chi) \ \ x_{ij}$.

В целевую функцию следует включить стоимость утраченных грузов в размере $s_0 r_{ij}$, где s_0 стоимость единицы груза. Если имущество застраховано, то такое включение необязательно, и $s_0 = 0$.

Общая величина расходов потребителей включает в себя расходы на транспортировку, покрытие убытков в размере стоимости утраченных грузов, штрафы за недопоставку и расходы на хранение избыточной продукции

$$Q(x,r) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}x_{ij} + s_0 r_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} g_j^{+} \, [\sum_{i=1}^{m}(x_{ij} - r_{ij}) - b_j]_{+} + \sum_{j=1}^{n} g_j^{-} \, [b_j - \sum_{i=1}^{m}(x_{ij} - r_{ij})]_{+} \ . \qquad (11)$$

Пусть величина X принимает дискретный ряд значений $\chi_k, k = \overline{1,K}$ с вероятностями p_k.

Обозначим

$$v_{jk} = [\sum_{i=1}^{m}(1 - \lambda c_{ij}\chi_k)x_{ij} - b_j]_{+} \ ; \ u_{jk} = [b_j - \sum_{i=1}^{m}(1 - \lambda c_{ij}\chi_k)x_{ij}]_{+} \ . \qquad (12)$$

Эти величины связаны соотношением

$$v_{jk} - u_{jk} + b_j = \sum_{i=1}^{m}(1 - \lambda c_{ij}\chi_k)x_{ij} \ .$$

Задача линейного программирования с целевой функцией $E(Q(x,r))$ будет иметь вид

$$(1 + s_0\lambda \cdot E(\chi))\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} g_j^{-} \sum_{k=1}^{K} p_k u_{jk} + \sum_{j=1}^{n} g_j^{+} \sum_{k=1}^{K} p_k v_{jk} \to \min \ ; \qquad (13)$$

$$x_{ij} \geq 0; u_{jk} \geq 0; v_{jk} \geq 0\ ;\ i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n}\ ;\ k = \overline{1,K}\ ;$$

$$v_{jk} - u_{jk} + b_j = \sum_{i=1}^{m} (1 - \lambda c_{ij} \chi_k) x_{ij}\ ;\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\ .$$

Отметим, что в данном случае множитель $(1 + s_0 \lambda E(\chi))$ не влияет на решение x_{ij}, после нахождения решения может быть вычислена стоимость утраченных грузов $s_0 \lambda E(\chi) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$.

Например, пусть распределение X имеет вид

k	1	2	3
$\chi(k)$	0,1	0,2	0,3
$p(k)$	0,25	0,5	0,25

Среднее значение $E_{(X)} = 0{,}2$.

Величины $g_j^{+,-}$ зададим в виде

$g_j^{(-)}$	1	2	3	$g_j^{(+)}$	2	3	1

Положим $\lambda = 0{,}05$ и $s_0 = 100$. Тогда для той же матрицы стоимости перевозок c_{ij} находим решение

x_{ij}	b_1	b_2	b_3	
a_1	100,0	0,0	0,0	100,0
a_2	53,1	146,9	0,0	200,0
a_3	0,0	0,0	150,0	150,0
a_4	0,0	50,0	0,0	50,0
a_5	0,0	144,7	245,3	390,0
	153,1	341,6	395,3	**890,0**

Вспомогательные величины: матрицы u_{jk} и v_{jk} имеют вид

u_{jk}	j=1	j=2	j=3	v_{jk}	j=1	j=2	j=3
k=1	0	0,00	6,25	k=1	1,56	0	0
k=2	0	1,56	7,81	k=2	0	0	0
k=3	1,56	3,13	9,37	k=3	0	0	0

Всего расходы составят 3 394,453, в том числе расходы на транспортировку 1 686,875, расходы на хранение 0,781251, штрафы за недостаток 19,92 и стоимость утраченных грузов 1 686,9.

Библиографический список

1. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Мир, 1973. Т. 3. 503 с.
3. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Сов. радио, 1974. 400 с.
4. Юдин Д.Б., Юдин А.Д. Экстремальные модели в экономике. М.: Либроком, 2010. 312 с.
5. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
6. Современная актуарная теория риска / Р. Каас [и др.]; пер. с англ. А.А. Новоселова; под ред. В.К. Малиновского. М.: Янус-К, 2007. 372 с.

I.A. Borodinova, L.A. Saraev*

STOCHASTIC TRANSPORTATION PROBLE

The generalization of a classical transportation problem where there is risk of loss of transportable goods, taking into account the cost of the surplus and expenses in the connection with the short delivery of goods is given.

Key words: stochastic transportation problem, the supplier, the consumer.

* *Borodinova Irina Alexandrovna* (teacher79@mail.ru), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev@ssu.samara.ru), the Dept. of Mathematics, and Business Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.